EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

BAZI FONKSİYON UZAYLARININ VE DUALLERİNİN ZAMAN SKALASINDA İNCELENMESİ

Özlem BATIT

Matematik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu: 403.03.01
Sunuş Tarih: 06.11.2007

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Harun TUNCAY

Bornova-İZMİR

Özlem BATIT tarafından doktora tezi olarak sunulan "Bazı fonksiyon uzaylarının ve duallerinin zaman skalasında incelenmesi" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 06.11.2007 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Prof. Dr. Harun TUNCAY**	**.................................**
Raportör Üye:	**Doç. Dr. Ferhan M. ATICI**	**.................................**
Üye	**: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER**	**.................................**
Üye	**: Prof. Dr. Gonca ONARGAN**	**.................................**
Üye	**:Yrd. Doç. Dr. Serap G. TOPAL**	**.................................**

ÖZET

BAZI FONKSİYON UZAYLARININ VE DUALLERİNİN ZAMAN SKALASINDA İNCELENMESİ

BATIT, Özlem

Doktora Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Harun TUNCAY

06.11.2007, 62 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez konusu ve yapılan çalışmalar hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, zaman skalası teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, zaman skalası üzerinde bazı fonksiyon uzayları tanımlanmış ve bu fonksiyon uzaylarının özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde, α, β, γ dual uzaylar tanımlanmış ve fonksiyon uzaylarının α dualleri arasındaki ilişki verilmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde elde edilen sonuçların bir uygulaması olarak özel zaman skalaları üzerinde sonsuz matris dönüşümleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, zaman skalasında Fredholm integral denklemi üzerinde çalışılmıştır.

Anahtar sözcükler: Zaman skalası, fonksiyon uzayları, dual, matris dönüşümler, Fredholm integral denklem.

ABSTRACT

SOME FUNCTION SPACES AND THEIR DUALS ON TIME SCALES

BATIT, Özlem
Ph. D in Mathematics Department
Supervisor : Prof. Dr. Harun TUNCAY
06.11.2007, 62 pages

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, information concerning the subject of the thesis and works which are related with this subject are shortly given.

In the second chapter, basic definitions and theorems related with time scales theory are involved.

In the third chapter, some function spaces are introduced on time scales and properties of these function spaces are studied. Furthermore in this chapter, α, β, γ dual spaces are defined and relation between α duals of some function spaces are given.

In the fourth chapter, infinite matrix transformations which are an application of results obtained in the chapter three are investigated on special time scales.

In the fifth chapter, Fredholm integral equation on time scales is studied.

Key Words: Time scales, function spaces, duals, matrix transformations, Fredholm integral equation

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam süresince bilimsel anlamda ve diğer problemlerimde desteğini hiç esirgemeyen değerli hocam Prof .Dr. Harun TUNCAY' a teşekkür ederim.

Bu çalışmam süresince değerli zamanını bana ayıran, bana herzaman inanan ve üzerimdeki emeğini asla ödeyemiyeceğim hocam Doç. Dr. Ferhan MERDİVENCİ ATICI' ya çok teşekkür ederim.

Doktora çalışmam süresinde bana burs veren TUBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu'na teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm zorluklara rağmen beni okutmak için elinden geleni yapan babam İsmail BATIT' a, doktora aşamasında her zaman yanımda olan anneme ve kardeşime sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (Devamı)

GİRİŞ

Son yıllarda pek çok matematikçinin ilgi odağı olan zaman skalası teorisi, 1988 yılında Stefan Hilger'in doktora tezinde [16] tanıtılmıştır. Bu teorinin amacı, diferansiyel ve fark denklemlerini aynı perspektiften incelemektir. Zaman skalası teorisi yalnız Analiz'de değil Geometri, Cebir ve Topoloji gibi matematiğin diğer dallarında da ‘‘ Birleştirme ve Genişletme ’’ özelliğine sahiptir. Bu teorinin tanıtımı için ilk kitap [19] B. Kaymakçalan, V. Lakshmikantham ve S. Sivasundaram tarafından yazılmıştır, daha sonra da M. Bohner ve A. Peterson yazarlı, zaman skalasındaki birçok temel tanım ve teoremin bulunduğu iki kitap [4,6] yayınlanmıştır.

$\mathbb{T}$ zaman skalası, reel sayıların boş olmayan kapalı bir alt kümesidir. Bu teori diskret ve sürekli analizi birleştiren bir teoridir. Zaman skalası olarak reel sayılar kümesi seçilirse, elde edilen genel sonuç, adi diferansiyel denklem ile ilgili bir sonucu; tam sayılar kümesi seçilirse, genel sonuç fark denklemi için de bir sonucu ortaya çıkarır. Aynı zamanda zaman skalası olarak reel sayılar ve tam sayılardan başka bir çok küme seçilebileceğinden, zaman skalası üzerinde çalışıldığında elde edilen sonuç genel bir sonuçtur.

H. Kızmaz tarafından , $\Delta x = \left(x_{k+1} - x_k \right)$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $l_\infty\left(\Delta\right)$, $c\left(\Delta\right)$, $c_0\left(\Delta\right)$ dizi uzayları tanımlanmış [21] ve bu uzayların bazı özellikleri incelenerek bu dizi uzaylarının Köthe-Toeplitz dual uzay tanımlarına uyarlanması verilmiştir. Ayrıca, bu dizi uzayları arasında tanımlanabilecek matris dönüşümler üzerinde çalışılmıştır. Daha sonra, H. Kızmaz'ın çalışmaları M. Et [9] , M Et ve R. Çolak [10] tarafından, Δ operatörün n. kuvveti gözönüne alınarak genelleştirilmiştir.

Ö. Batıt yüksek lisans tezinde [2], [21] deki yöntemlerin dual uzaylar üzerindeki sonuçlarını $L_{\infty}(D)$ fonksiyon uzayına uyarlamıştır.

Beş bölümden oluşan tezin ikinci bölümünde, zaman skalası teorisi genel olarak tanıtılmış ve tezin diğer bölümlerinde yararlanılan bazı teoremler ispatlanmıştır.

Üçüncü bölümde, tanımladığımız $L_{\infty}(\Delta)$, $C(\Delta)$ ve $C_0(\Delta)$ fonksiyon uzayları ile ilgili özelliklere yer verilmiştir. Ayrıca bu bölümde α, β, γ dual uzay tanımları verilerek bu fonksiyon uzaylarının dualleri arasındaki ilişki incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, sonsuz matris dönüşümü, özel zaman skalası üzerinde tanımlanmış ve üçüncü bölümde tanımlanan fonksiyon uzayları üzerindeki matris dönüşümleri incelenmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde amacımız, zaman skalası üzerinde tanımlanan fonksiyon uzayları ve bunların dual uzaylarını yukarıdaki sonuçlara birleştirmek ve genişletmektir.

E. I. Fredholm ün 1903 yılında Acta Mathematica dergisinde [11] yayınlanan makalesinin, operatör teorisinin temel kaynağı olduğu kabul edilir. İntegral denklemler matematiğin bir çok alanında ve matematiksel fizik alanlarında da kullanılmaktadır. İntegral denklemler, diferansiyel denklemlerin çözümleri için formül gösterilimi olarak ortaya çıkar. Bir diferansiyel denklem sınır koşullarıyla birlikte integral denklem ile yer değiştirebilir. Bu çerçevede beşinci bölümde,

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_{a}^{\sigma(b)} k(t,s)\, y(s)\, \Delta s$$

Fredholm integral denklemi zaman skalası üzerinde incelenmiştir.

2. ZAMAN SKALASINDA ANALİZ

Bu bölümde Stefan Hilger' in doktora tezinde yeralan zaman skalası teorisinin temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir. Bunlar Δ türev, Δ integral kavramları ve özellikleridir. Ayrıca Δ türev, Δ integral ile ilgili örnekler verilmiştir.

2.1 Zaman Skalası Üzerine Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Reel sayıların boş olmayan kapalı bir alt kümesine zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. Reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar kümeleri, Cantor kümesi, $[0,1]\cup[2,3]$ birer zaman skalasıdır. $\mathbb{T}$ zaman skalası $d(x,y)=|x-y|$ metriği ile bir tam metrik uzaydır.

Tanım 2.1.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t\in\mathbb{T}$ için $\sigma(t):=\inf\{s\in\mathbb{T}: s>t\}$ ile tanımlanan $\sigma:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ operatörüne ileriye atlama (forward jump) operatörü adı verilir.

$t\in\mathbb{T}$ için $\rho(t):=\sup\{s\in\mathbb{T}: s<t\}$ ile tanımlanan $\rho:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ operatörüne geriye atlama (backward jump) operatörü adı verilir.

$\sigma(t)>t$ ise t noktasına sağ yayılmış (right-scattered) nokta ve $\sigma(t)=t$ ise t noktasına sağ yoğun (right-dense) nokta denir.

$\rho(t)<t$ ise t noktasına sol yayılmış (left-scattered) nokta ve $\rho(t)=t$ ise t noktasına sol yoğun (left-dense) nokta denir.

$\rho(t)=t=\sigma(t)$ ise t noktasına yoğun (dense) nokta, $\rho(t)<t<\sigma(t)$ ise t noktasına ayrık (isolated) nokta denir.

$\mu(t):=\sigma(t)-t$ ile tanımlanan $\mu:\mathbb{T}\to[0,\infty)$ fonksiyonuna ‘‘ taneli ’’ (graininess) fonksiyonu adı verilir.

Tanım 2.1.3. Eğer $\max\mathbb{T}<\infty$ ve $\max\mathbb{T}$ sol yayılmış ise $\mathbb{T}^k=\mathbb{T}\big/\{\max\mathbb{T}\}$ ile tanımlanır ve bunun dışında $\mathbb{T}^k=\mathbb{T}$ olur.

Eğer $\min\mathbb{T}>-\infty$ ve $\min\mathbb{T}$ sağ yayılmış ise $\mathbb{T}_k=\mathbb{T}\big/\{\min\mathbb{T}\}$ ile tanımlanır ve bunun dışında $\mathbb{T}_k=\mathbb{T}$ olur.

Eğer $\mathbb{T}$ nin maksimum elemanı varsa $\inf\varnothing=\max\mathbb{T}$ ve minimum elemanı varsa $\sup\varnothing=\min\mathbb{T}$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.1.1. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise $\sigma(t)=\rho(t)=t$ elde edilir. Ohalde her $t\in\mathbb{R}$ noktası yoğundur.

$\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise $\sigma(t)=t+1$, $\rho(t)=t-1$ elde edilir. Her $t\in\mathbb{Z}$ noktası ayrık noktadır.

$\mathbb{T}=q^{\mathbb{Z}}\cup\{0\}$, $0<q<1$ için $\sigma(t)=\dfrac{t}{q}$, $\rho(t)=qt$ elde edilir. Her $t\in\mathbb{T}/\{0\}$ noktası ayrık nokta, $t=0$ yoğun noktadır.

Örnek 2.1.2. Zaman skalası olarak $\mathbb{T}=\{-4,-3,-2\}\cup[-1,0]\cup\left\{\sqrt[3]{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ alalım. $\mathbb{T}$ nin elemanları için:

- Her $t \in (-1, 0)$ sağ ve sol yoğun noktadır.
- $t = -1$ sağ yoğun, sol yayılmış noktadır.
- $t = 0$ sağ yayılmış, sol yoğun noktadır.
- $t = -3$ ve $t = -2$ sağ ve sol yayılmış noktalardır.
- $t = -4$ sol yoğun, sağ yayılmış noktadır.
- $t = \sqrt[3]{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ sağ ve sol yayılmış noktalardır.

Tanım 2.1.4. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a \leq b$ olsun. $\mathbb{T}$ içindeki $[a, b]$ kapalı aralığı

$$[a, b] := \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.5. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $\delta > 0$ için $U_\delta(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s - t| < \delta\}$ kümesine t nin δ komşuluğu denir.

Tanım 2.1.6. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \in U(t_0)$$

sağlanacak şekilde en az bir $U(t_0)$ komşuluğu bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna $t = t_0$ noktasında süreklidir denir.

2.2 Zaman Skalasında Δ Türev

Tanım 2.2.1. f **,** $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde t noktasının

$$\left|\left[f\left(\sigma(t)\right) - f(s) \right] - f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t) - s \right]\right| \leq \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|, \quad \forall s \in U_{\delta}$$

olacak şekilde bir U_{δ} $\left(U_{\delta} = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T},\ \exists \delta > 0\right)$ komşuluğu varsa, $f^{\Delta}(t)$, f fonksiyonunun t noktasındaki Δ- türevi olarak tanımlanır. Ayrıca, her $t \in \mathbb{T}^k$ için $f^{\Delta}(t)$ var ise, f fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ- türevlenebilir denir.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için $f^{\Delta}(t) = \lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$,

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $f^{\Delta}(t) = \dfrac{f\left(\sigma(t)\right) - f(t)}{\sigma(t) - t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$

olduğu görülür.

Önerme 2.2.1. Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında türevlenebilir ise $a = f^{\Delta}(t)$ değeri tektir.

İspat. f fonksiyonunun t de iki tane a_1 ve a_2 türev değeri var olsun. O halde $\varepsilon > 0$ için

$$\left| f\left(\sigma(t)\right) - f(s) - a_1\left(\sigma(t) - s\right) \right| \leq \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|, \qquad \forall s \in U_{\delta_1}(t)$$

ve

$$\left| f\left(\sigma(t)\right) - f(s) - a_2\left(\sigma(t) - s\right) \right| \leq \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|, \qquad \forall s \in U_{\delta_2}(t)$$

sağlanır. $U_\delta(t) = U_{\delta_1}(t) \cap U_{\delta_2}(t)$ alındığında her $s \in U_\delta(t)$ için her iki eşitsizlik birden sağlanacaktır. Buradan $\sigma(t) \neq s$ için

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_1 \right| \leq \varepsilon, \qquad \forall s \in U_{\delta_1}(t)$$

ve

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_1 \right| \leq \varepsilon, \qquad \forall s \in U_{\delta_1}(t)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| &= \left| a_1 - \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} + \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_2 \right| \\ &\leq \left| a_1 - \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \right| + \left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_2 \right| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan $a_1 = a_2$ bulunur.

Örnek 2.2.1. $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun.

$f(t) = t$ için

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{\sigma(t) - s}{\sigma(t) - s} = 1,$$

$f(t) = t^2$ için

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{\sigma^2(t) - s^2}{\sigma(t) - s} = \sigma(t) + t$$

elde edilir.

Örnek 2.2.2. $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$, $q > 1$ olsun.

$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = qt$ olduğundan her $t \in \mathbb{T}/\{0\}$ sağ yayılmış nokta, $t = 0$ sağ yoğun noktadır. $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ fonksiyonu ve $t \neq 0$ için,

$$\sigma^{\Delta}(t) = \frac{\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{\sigma(qt) - qt}{qt - t} = \frac{q^2 t - qt}{qt - t} = q,$$

$t = 0$ için,

$$\sigma^{\Delta}(0) = \lim_{s \to 0} \frac{\sigma(0) - \sigma(s)}{-s} = \lim_{s \to 0} \frac{0 - qs}{-s} = q$$

bulunur.

Teorem 2.2.1. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}^k$ için:

(i) f fonksiyonu t de Δ-türevlenebilir ise, f fonksiyonu t de süreklidir.

(ii) f fonksiyonu t de sürekli ve t sağ yayılmış nokta ise, f fonksiyonu t de Δ türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

olur.

(iii) Eğer t sağ yoğun nokta ise, f fonksiyonunun t de Δ-türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

değerinin sonlu olmasıdır. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olur.

(iv) f fonksiyonu t de Δ-türevlenebilir ise,

$$f(\sigma(t)) = f(t) + f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - t)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.2. $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında Δ türevlenebilir ise,

(i) $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da t de Δ-türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) Her α sabiti için $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da t de Δ-türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da t de Δ-türevlenebilirdir ve

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)).$$

(iv) Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonu da t de Δ-türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Teorem 2.2.3. Eğer her $t \in [a,b)$ için $f^{\Delta}(t) = 0$ ise, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sabittir.

İspat. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve diferansiyellenebilir olduğundan ortalama değer teoremi [6,syf 5] uygulanabilir. Ortalama değer teoremine göre $\varsigma,\tau \in [a,b)$ için ve her $a \le s \le t \le b$ için

$$f^{\Delta}(\varsigma) \le \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \le f^{\Delta}(\tau)$$

sağlanır. $f^{\Delta}(t)=0$ olduğundan her $t,s \in [a,b]$ için $f(t)=f(s)$ bulunur. Böylece f fonksiyonunun sabit olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 2.2.4.

(i) Eğer $t \in [a,b)$ için $f^{\Delta}(t) \ge 0$ ise, f $[a,b]$ üzerinde azalmayan fonksiyondur.

(ii) Eğer $t \in [a,b)$ için $f^{\Delta}(t) \le 0$ ise, f $[a,b]$ üzerinde artmayan fonksiyondur.

İspat. (ii) $a \le s \le t \le b$ olacak şekilde $s,t \in \mathbb{T}$ olsun. Teorem 2.2.1 (i) den f fonksiyonu süreklidir. Ortalama değer teoremine [6,syf 5] göre $\varsigma,\tau \in [a,b)$ için

$$f^{\Delta}(\varsigma) \le \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \le f^{\Delta}(\tau)$$

sağlanır. $f^{\Delta}(\tau) \le 0$ olduğundan $f(t)-f(s) \le 0$ bulunur. Böylece f artmayan fonksiyondur.

Tanım 2.2.2. $f:\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer

(i) $\mathbb{T}^k - D$ sayılabilir kümedir, ayrıca $\mathbb{T}$ nin sağ-yayılmış elemanını içermez,

(ii) f , $\mathbb{T}$ üzerinde süreklidir,

(iii) Her bir $t \in D$ için f fonksiyonu türevlenebilirdir,

koşulları sağlanıyor ise, f fonksiyonuna $D \subset \mathbb{T}^k$ ile ön-türevlenebilir denir.

Teorem 2.2.5. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde $D \subset \mathbb{T}^k$ türevlenebilirlik bölgesi ile ön-türevlenebilir bir fonksiyon ve $U \subset \mathbb{T}$ kompakt aralık ise, her $r, s \in \mathbb{T}$, $r \leq s$ için

$$\left| f(s) - f(r) \right| \leq \left(\sup_{t \in U^k \cap D} \left| f^{\Delta}(t) \right| \right) \left| s - r \right|$$

sağlanır.

Teorem 2.2.6. $f_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için D türevlenebilirlik bölgesi ile ön-türevlenebilir olsun. Her bir $t \in \mathbb{T}^k$ için $U(t)$ kompakt komşuluğu vardır öyleki, $\left\{ f_n^{\Delta} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, $U(t) \cap D$ üzerinde düzgün yakınsak ise,

(i) Eğer $\left\{ f_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $t_0 \in U(t)$ $\left(t \in \mathbb{T}^k \right)$ için yakınsak ise $U(t)$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

(ii) Eğer $\left\{ f_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ $t_0 \in \mathbb{T}$ için yakınsak ise her $t \in \mathbb{T}^k$ için $U(t)$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

(iii) $f = \lim_{n \to \infty} f_n$, D ile ön-türevlenebilir ise her $t \in D$ için $f^{\Delta}(t) = \lim_{n \to \infty} f_n^{\Delta}(t)$ sağlanır.

İspat. (i) $\left\{ f_n^{\Delta} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $U(t)\cap D$ üzerinde düzgün yakınsak olduğu için en az bir $N\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki, her $m,n\geq N$ için $\sup\limits_{s\in U(t)\cap D}\left|\left(f_n-f_m\right)^{\Delta}(s)\right|$ sonludur. $\left\{ f_n(t_0)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $t_0\in U(t)$ için yakınsaktır.

$m,n\geq N$ ve $r\in U(t)$ olsun. Bu durumda Teorem 2.2.5 kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\left| f_n(r)-f_m(r)\right| &= \left| f_n(r)-f_m(r)-\left[f_n(t_0)-f_m(t_0)\right]+f_n(t_0)-f_m(t_0)\right| \\
&\leq \left| f_n(t_0)-f_m(t_0)\right| + \left| \left(f_n-f_m\right)(r)-\left(f_n-f_m\right)(t_0)\right| \\
&\leq \left| f_n(t_0)-f_m(t_0)\right| + \left\{ \sup_{s\in U(t)\cap D}\left|\left(f_n-f_m\right)^{\Delta}(s)\right|\right\}\left| t_0-r\right|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $\left\{ f_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin $U(t)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğu görülür.

(ii) Tümevarım yöntemini [4,syf. 4] kullanarak her $t\in\left[t_0,\infty\right)$ için $\left\{ f_n(t)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin yakınsaklığını ispatlayalım.

I. $\left\{ f_n(t_0)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsaklığı verilmiştir.

II. Kabul edelim ki t sağ-yayılmış ve $\left\{ f_n(t)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ yakınsak olsun. Ohalde

$$f_n\left(\sigma(t)\right)=f_n(t)+\mu(t)\,f_n^{\Delta}(t)$$

eşitliğinden $\left\{ f_n\left(\sigma(t)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsaklığı görülür.

III. Kabul edelim ki t sağ-yoğun ve $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ yakınsak olsun. (i) şıkkından $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $U(t)$ üzerinde yakınsaktır böylece $\{f_n(r)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $r\in U(t)\cap(t,\infty)$ için yakınsaklığı elde edilir.

IV. Son olarak, kabul edelim ki t sol-yoğun ve $\{f_n(r)\}_{n\in\mathbb{N}}$ her r $(t_0\le r<t)$ için yakınsak olsun. $U(t)\cap[t_0,t)\neq\varnothing$ olduğundan, (i) şıkkından $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $U(t)$ üzerinde yakınsaktır.
Böylece her $t\in[t_0,\infty)$ için $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsaklığı ispatlanmış olur. Benzer şekilde $t\in(-\infty,t_0]$ için de yakınsaklık gösterilir.

(iii) $t\in D$ olsun. Genelliği bozmadan $\sigma(t)\in U(t)$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon>0$ verildiğinde (i) şıkkının ispatından en az bir $N\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki her $r\in U(t)$ ve $m,n\ge N$ için,

$$\left|(f_n-f_m)(r)-(f_n-f_m)(\sigma(t))\right|\le\left\{\sup_{s\in U(t)\cap D}\left|(f_n-f_m)^{\Delta}(s)\right|\right\}\left|\sigma(t)-r\right|$$

sağlanır. $\{f_n^{\Delta}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $U(t)\cap D$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan, en az bir $\tilde{N}\ge\mathbb{N}$ vardır öyleki, her $m,n\ge N$ için

$$\sup_{s\in U(t)\cap D}\left|(f_n-f_m)^{\Delta}(s)\right|\le\frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. Ohalde

$$\left|(f_n-f_m)(r)-(f_n-f_m)(\sigma(t))\right|\le\frac{\varepsilon}{3}\left|\sigma(t)-r\right|$$

eşitsizliğinde $m\to\infty$ için limite geçilirse,

$$\left|(f_n-f)(r)-(f_n-f)(\sigma(t))\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}\left|\sigma(t)-r\right|$$

elde edilir. $g=\lim_{n\to\infty} f_n^{\Delta}$ olarak tanımlansın. En az bir $M\geq N$ vardır öyle ki,

$$\left|f_m^{\Delta}(\sigma(t))-g(\sigma(t))\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}$$

ve f_M, t noktasında türevlenebilir olduğundan t nin bir W komşuluğu vardır ve her $r\in W$ için

$$\left|f_M(\sigma(t))-f_M(r)-f_M^{\Delta}(t)(\sigma(t)-r)\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}\left|\sigma(t)-r\right|$$

sağlanır. Her $r\in U(t)\cap W$ için

$$\left|f(\sigma(t))-f(r)-g(t)(\sigma(t)-r)\right|\leq\left|(f_M-f)(\sigma(t))-(f_M-f)(r)\right|$$

$$+\left|\left[f_M^{\Delta}(t)-g(t)\right](\sigma(t)-r)\right|+\left|f_M(\sigma(t))-f_M(r)-f_M^{\Delta}(t)(\sigma(t)-r)\right|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{3}\left|\sigma(t)-r\right|+\frac{\varepsilon}{3}\left|\sigma(t)-r\right|+\frac{\varepsilon}{3}\left|\sigma(t)-r\right|$$

$$=\varepsilon\left|\sigma(t)-r\right|$$

elde edilir. Sonuç olarak f, t de türevlenebilirdir ve $f^{\Delta}(t)=g(t)$ olur.

2.3 Zaman Skalasında Δ İntegral

Tanım 2.3.1. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $t\in\mathbb{T}^k$ için $F^{\Delta}(t)=f(t)$ sağlanıyor ise, $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna f nin Δ-anti türevi (ilkeli) denir.

Tanım 2.3.2. F, $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ anti türevi ise $a,b\in\mathbb{T}$ için f nin a dan b ye Δ integrali,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a)$$

olarak tanımlanır ve f fonksiyonu Δ-integrallenebilir denir. Eğer

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt$,

(ii) $[a,b]$ aralığı sadece ayrık noktalar içeriyor ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{pmatrix} \sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(t) f(t), & a<b \\ 0, & a=b \\ -\sum\limits_{t\in[b,a)} \mu(t) f(t), & a>b \end{pmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 2.3.1. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları Δ-integrallenebilir olsunlar. Bu durumda her $a,b,c\in\mathbb{T}$ ve α sabiti için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

(i) $\int_a^b [\, f(t) + g(t)\,]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$

(ii) $\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$

(iii) $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$

(iv) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$

(v) $\int\limits_a^a f(t)\Delta t = 0$

(vi) $\int\limits_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int\limits_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$

(vii) $\int\limits_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int\limits_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$

İspat. **(vi)** Teorem 2.2.2. (iii) den $[f\,g]^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)$ ve Teorem 2.3.1 (i) den,

$$\int\limits_a^b [f\,g]^{\Delta}(t)\Delta t = \int\limits_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t + \int\limits_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t$$

$$\int\limits_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (f\,g)(b) - (f\,g)(a) - \int\limits_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$$

bulunur.

Teorem 2.3.2. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Δ integrallenebilir olsun. Bu durumda $t\in\mathbb{T}^k$ için

$$\int\limits_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = \mu(t)\,f(t)$$

eşitliği elde edilir.

İspat. f fonksiyonu Δ integrallenebilir ise, $F^{\Delta}(t) = f(t)$ sağlanacak şekilde F anti türevi vardır. Ohalde

$$\int\limits_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = F(\sigma(t)) - F(t)$$

$$= \left[\sigma(t) - t\right] F^{\Delta}(t)$$

$$= \mu(t)\, f(t)$$

bulunur.

Teorem 2.3.3. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a,b] \subseteq \mathbb{T}$ kümesi üzerinde Δ integrallenebilir ve $a,b \in \mathbb{T}$ ise,

(i) Eğer her $t \in [a,b)$ için $f(t) \geq 0$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$,

(ii) $f(t) \leq g(t)$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t \leq \int_a^b g(t)\Delta t$,

(iii) Eğer $[a,b)$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise, $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$,

(iv) $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\Delta t \leq \left(\sup_{a \leq t < b} |f(t)|\right)(b-a)$,

sağlanır.

İspat. **(iv)** Her $t \in [a,b]$ için $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ sağlanır. Teorem 2.3.3 (ii) den

$$-\int_a^b |f(t)|\Delta t \leq \int_a^b f(t)\Delta t \leq \int_a^b |f(t)|\Delta t,$$

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\Delta t$$

bulunur. Ayrıca her $t \in [a,b]$ için $|f(t)| \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$ olduğundan

$$\int_a^b \left| f(t) \right| \Delta t \le \left(\sup_{a \le t < b} \left| f(t) \right| \right) (b-a)$$

elde edilir.

Örnek 2.3.1.

- $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası ise, $\int_a^t 1 \Delta s = t - a$ ve $F(t) = t$ anti türev dir.

- $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için $\int_a^t s \, \Delta s = \int_a^t s \, ds = \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2}$,

- $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $\int_a^t s \, \Delta s = \sum_{s \in [a,t)} s = \sum_{s=a}^{t-1} s$,

- $\mathbb{T} = [0,3] \cup \{4,5,6,7,8\}$ için $\int_0^t s \, \Delta s$ integralinin değerini t nin durumlarına göre

inceleyelim:

$t \le 3$ ise $\int_0^t s \, \Delta s = \frac{t^2}{2}$,

$t = 4$ ise $\int_0^4 s \, \Delta s = \int_0^3 s \, \Delta s + \int_3^4 s \, \Delta s = \frac{15}{2}$

$t > 4$ ise $\int_0^t s \, \Delta s = \int_0^3 s \, \Delta s + \int_3^4 s \, \Delta s + \int_4^8 s \, \Delta s = \frac{15}{2} + \sum_{k=4}^{7} k = \frac{59}{2}$

Örnek 2.3.2. $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\,2} = \{ n^2 : n \in \mathbb{N}_0 \}$ zaman skalası için

$$\int_1^t (s+1)^2 \, \Delta s = \sum_{n=1}^{\sqrt{t}-1} \int_{n^2}^{\sigma(n^2)} (s+1)^2 \, \Delta s$$

$$= \int_{1}^{\sigma(1)} (s+1)^2 \Delta s + \int_{2^2}^{\sigma(2^2)} (s+1)^2 \Delta s + \ldots + \int_{(\sqrt{t}-1)^2}^{t} (s+1)^2 \Delta s$$

$$= (\sigma(1)-1)2^2 + \left(\sigma\left(2^2\right)-2^2\right)5^2 + \ldots + \left(\sigma\left(\left(\sqrt{t}-1\right)^2\right)-\left(\sqrt{t}-1\right)^2\right)$$

elde edilir.

Tanım 2.3.3. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a \in \mathbb{T}$ ve $\{t_k : k \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{T}$ alt kümesi olsun, öyleki $a = t_0 < t_1 < t_2 \ldots$ ve $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$. Diğer bir ifadeyle $\mathbb{T}$ üstten sınırsız olsun. Reel değerli f fonksiyonu $[a,\infty) = \{t \in \mathbb{T} : t \geq a\}$ üzerinde tanımlı ve a dan herhangi bir $A \in \mathbb{T}$ $(A \geq a)$ elemanına integrallenebilir olsun.

$$F(A) = \int_{a}^{A} f(t)\Delta t$$

alalım.Eğer $\lim_{A\to\infty} F(A)$ sonlu ise, f nin birinci tür improper integrali yakınsaktır, limiti yok ise ıraksaktır denir. Bu limit değeri

$$\int_{a}^{\infty} f(t)\Delta t = \lim_{A\to\infty} \left\{ \int_{a}^{A} f(t)\Delta t \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.3.3. $\mathbb{T}$ üstten sınırsız herhangi bir zaman skalası için, $(a \neq 0)$

$$\int_{a}^{\infty} \frac{\Delta t}{t\sigma(t)} = \lim_{A\to\infty} \int_{a}^{A} \left(-\frac{1}{t}\right)^{\Delta} \Delta t = \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{A}+\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a},$$

$$\int_{a}^{\infty} \frac{t+\sigma(t)}{(t\sigma(t))^2} \Delta t = \lim_{A\to\infty} \int_{a}^{A} \left(-\frac{1}{t^2}\right)^{\Delta} \Delta t = \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{A^2}+\frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{a^2},$$

integralleri yakınsaktır.

Teorem 2.3.4. (Dirichlet-Abel Test)

(i) f fonksiyonu a dan herhangi bir $A \in \mathbb{T}$ $(A \geq a)$ noktasına integrallenebilir

ve $F(A) = \int_a^A f(t)\Delta t$ integrali her $A \geq a$ için sınırlı,

(ii) g fonksiyonu $[a, \infty)$ üzerinde monoton ve $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$,

koşulları sağlanıyor ise, $\int_a^\infty f(t)g(t)\Delta t$ birinci tür improper integrali yakınsaktır.

3.BAZI FONKSİYON UZAYLARININ VE DUALLERİNİN ZAMAN SKALASINDA İNCELENMESİ

Bu bölümde, zaman skalası üzerinde bazı fonksiyon uzayları tanımlanmış ve bu fonksiyon uzaylarının özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde, α, β, γ dual uzaylar tanımlanmıştır ve fonksiyon uzaylarıyla α dualleri arasındaki ilişkiler verilmiştir.

3.1. $L_\infty(\Delta)$, $C(\Delta)$, $C_0(\Delta)$ Fonksiyon Uzayları

Tanım 3.1.1. $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan, kapalı ve

(i) $\mathbb{T} \subseteq [0,\infty)$,

(ii) $0 \in \mathbb{T}$,

(iii) $\exists \{ t_k : k \in N_0 \} \subset \mathbb{T}, \ 0 = t_0 < t_1 < t_2 ..., \ \lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$,

koşullarını sağlayan bir zaman skalası olarak alınıyor.

Tanım 3.1.2. $M = \{ f \mid f : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \text{ sürekli} \}$ olmak üzere tanımlanan L_∞, C ve C_0 fonksiyon uzayları

$$L_\infty = \left\{ f \;\middle|\; f \in M, \ \sup_{t\in\mathbb{T}} |f(t)| < \infty \right\},$$

$$C = \left\{ f \;\middle|\; f \in M, \ \lim_{t\to\infty} f(t) < \infty \right\},$$

$$C_0 = \left\{ f \;\middle|\; f \in M, \ \lim_{t\to\infty} f(t) = 0 \right\},$$

$\| f \|_{\infty} = \sup\limits_{t \in \mathbb{T}} \left| f(t) \right|$ normu ile birer normlanmış lineer uzaylardır.

Tanım 3.1.3. $K = \left\{ f \;\middle|\; f : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \text{ sürekli } \Delta \text{ türevlenebilir} \right\}$ olmak üzere,

$$L_{\infty}(\Delta) = \left\{ f \;\middle|\; f \in K, \quad f^{\Delta} \in L_{\infty} \right\},$$

$$C(\Delta) = \left\{ f \;\middle|\; f \in K, \quad f^{\Delta} \in C \right\},$$

$$C_0(\Delta) = \left\{ f \;\middle|\; f \in K, \quad f^{\Delta} \in C_0 \right\},$$

lineer fonksiyon uzayları tanımlıdır.

Teorem 3.1.1. $L_{\infty}(\Delta), C(\Delta)$ ve $C_0(\Delta)$ fonksiyon uzayları

$$\| f \|_{\Delta} = \left| f(0) \right| + \left\| f^{\Delta} \right\|_{\infty} \tag{3.1}$$

normu ile birer normlanmış lineer uzaylardır.

İspat. $L_{\infty}(\Delta)$ fonksiyon uzayının (3.1) normu ile bir lineer normlanmış uzay olduğunu görelim. Her $t \in \mathbb{T}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ sabit sayısı için,

(n_1) $\| f \|_{\Delta} = \left| f(0) \right| + \left\| f^{\Delta} \right\|_{\infty} \geq 0$

(n_2) $\| f \|_{\Delta} = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0, \quad \sup\limits_{t \in T} \left| f^{\Delta}(t) \right| = 0$

$$\Leftrightarrow f(0) = 0, \quad f^{\Delta}(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

Teorem 2.2.3 den f fonksiyonu sabittir ve $f(t) = 0$ elde edilir.

(n_3) $\| \lambda f \|_{\Delta} = \left| \lambda f(0) \right| + \left\| (\lambda f)^{\Delta} \right\|_{\infty}$

$$= \left| \lambda \right| \left| f(0) \right| + \left| \lambda \right| \left\| f^{\Delta} \right\|_{\infty}$$

$$= |\lambda| \left(|f(0)| + \| f^{\Delta} \|_{\infty} \right)$$

$$= |\lambda| \| f \|_{\Delta}$$

$$(n_4) \quad \| f+g \|_{\Delta} = |(f+g)(0)| + \| (f+g)^{\Delta} \|_{\infty}$$

$$= | f(0) + g(0) | + \| f^{\Delta} + g^{\Delta} \|_{\infty}$$

$$\leq | f(0) | + | g(0) | + \| f^{\Delta} \|_{\infty} + \| g^{\Delta} \|_{\infty}$$

$$= \| f \|_{\Delta} + \| g \|_{\Delta}$$

Benzer şekilde $C(\Delta)$ ve $C_0(\Delta)$ fonksiyon uzaylarının da (3.1) normu ile birer normlanmış uzay olduğu gösterilir.

Teorem 3.1.2.

(i) $C(\Delta) \subset L_{\infty}(\Delta)$ ve $C(\Delta) \neq L_{\infty}(\Delta)$

(ii) $C_0(\Delta) \subset C(\Delta)$ ve $C_0(\Delta) \neq C(\Delta)$

sağlanır.

İspat. (i) $f \in C(\Delta)$ ise $f^{\Delta} \in C$ ve f^{Δ} süreklidir. $f^{\Delta} \in C$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N(\varepsilon) > 0$ vardır öyleki, $t > N(\varepsilon)$ için

$$\| f^{\Delta}(t) - l \|_{\infty} < \varepsilon$$

sağlanır. $\varepsilon = 1$ için

$$| f^{\Delta}(t) | < 1 + l, \qquad \forall t > N$$

elde edilir. Buradan $f^{\Delta}(t)$ fonksiyonunun $t > N$ için sınırlı olduğu görülür.

$f^{\Delta}(t)$ sürekli fonksiyonu $[0, N]$ üzerinde sınırlıdır. Böylece $f^{\Delta} \in L_{\infty}$ ve $f \in L_{\infty}(\Delta)$ elde edilir.

$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \cos_p(t, t_0)$, $(p\ sabit)$ [4, syf 92] fonksiyonunu tanımlayalım. $f^{\Delta}(t) = -p \sin_p(t, t_0)$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} f^{\Delta}(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(-p \sin_p(t, t_0)\right)$ limit değeri olmadığından $f \notin C(\Delta)$ olur. Buradan da $\sup\limits_{t\in\mathbb{T}}\left|-p \sin_p(t, t_0)\right| < \infty$ elde edildiğinden $f \in L_{\infty}(\Delta)$ bulunur.

(ii) $f \in C_0(\Delta)$ ise $f^{\Delta} \in C_0$ ve f^{Δ} süreklidir. $C_0 \subset C$ olduğundan $f \in C(\Delta)$ bulunur.

$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = at\ (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s\to t} \frac{a\sigma(t) - as}{\sigma(t) - s} = a \text{ ve}$$

$\lim\limits_{t\to\infty} f^{\Delta}(t) = a$ olduğu için $f \in C(\Delta)$ elde edilir. Ama $a \neq 0$ olduğundan $f \notin C_0(\Delta)$ olur.

Teorem 3.1.3. $L_{\infty}(\Delta)$ fonksiyon uzayı (3.1) normu ile bir Banach uzaydır.

İspat. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **,** $L_{\infty}(\Delta)$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. O halde ε >0 verildiğinde $\exists N(\varepsilon)$ vardır öyleki,

$$\| f_n - f_m \|_{\Delta} < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon). \tag{3.2}$$

(3.2) eşitsizliğinden

$$\left| f_n(0) - f_m(0) \right| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \tag{3.3}$$

$$\sup_{t\in T} \left| f_n^{\Delta}(t) - f_m^{\Delta}(t) \right| < \varepsilon, \qquad \forall n,m \geq N(\varepsilon) \tag{3.4}$$

$$\left| f_n^{\Delta}(t) - f_m^{\Delta}(t) \right| < \varepsilon, \qquad \forall n,m \geq N(\varepsilon), \ \forall t \in \mathbb{T} \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.3) den $\left(f_n(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam uzay olduğu için $\left(f_n(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ yakınsaktır. (3.5) den $\left(f_n^{\Delta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir $\varphi(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Teorem 2.2.6. den $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{T}$ üzerinde düzgün yakınsaktır, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ve $f^{\Delta}(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}$ sağlanır. $\left(f_n^{\Delta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $\varphi(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığından,

$\forall \varepsilon > 0, \ \ \forall n \geq N(\varepsilon)$ ve $\forall t \in \mathbb{T}$,

$$\left|\varphi(t)\right| - \left| f_n^{\Delta}(t) \right| \leq \left| f_n^{\Delta}(t) - \varphi(t) \right| < \varepsilon \tag{3.6}$$

sağlanır. $m > N$ sayısını sabitleyelim. $f_m^{\Delta}(t)$ $\mathbb{T}$ üzerinde sınırlı olduğundan $\exists M \in \mathbb{R}^{+}$ vardır ki, her $t \in \mathbb{T}$ için $\left| f_m^{\Delta}(t) \right| \leq M$ sağlanır. Her $t \in \mathbb{T}$, her $n > N$ ve (3.5) den $\varepsilon = 1$ için,

$$\left| f_n^{\Delta}(t) \right| \leq \left| f_n^{\Delta}(t) - f_m^{\Delta}(t) \right| + \left| f_m^{\Delta}(t) \right| < 1 + M$$

ile $\left(f^{\Delta}_{N+1}, \ f^{\Delta}_{N+1}, \ldots\right)$ dizisi $1+M$ ile düzgün sınırlıdır.

$$M^{*} := Max\left\{ M_1, M_2, \ldots, M_N, 1+M \right\}, \qquad \left| f_k^{\Delta}(t) \right| \leq M_k, \quad k = 1,2,\ldots,N$$

alındığında her $n \in \mathbb{N}$ için $\left| f_n^{\Delta}(t) \right| \leq M^{*}$ olduğu görülür. $\left(f_n^{\Delta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nin düzgün sınırlı olması ve (3.6) eşitsizliğinden $\varphi(t)$ fonksiyonunun sınırlı olduğu görülür. Böylece $\varphi \in L_{\infty}$ ve $f \in L_{\infty}(\Delta)$ bulunur. O halde $\left(L_{\infty}(\Delta), \|.\|_{\Delta} \right)$ lineer normlu uzayı bir Banach uzaydır.

Lemma 3.1.1. $C_0(\Delta)$**,** $L_\infty(\Delta)$ nın kapalı alt uzayıdır.

İspat. Her $f, g \in C_0(\Delta)$ için $f^\Delta, g^\Delta \in C_0$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(\lambda f + g)^\Delta = \lambda f^\Delta + g^\Delta$$

eşitliğinden ve C_0 nin lineer uzay oluşundan $\lambda f + g \in C_0(\Delta)$ elde edilir. Altküme olduğuna örnek olarak $f(t) = b$ $(b \in \mathbb{T} \text{ sabit sayı})$ fonksiyonu verilebilir.

$C_0(\Delta)$ nın kapalı olduğunu ispatlamak için $f \in \overline{C_0(\Delta)}$ alalım. Kapanış tanımından $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ sağlanacak şekilde en az bir $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0(\Delta)$ vardır. Limit tanımından $\varepsilon > 0$ verildiğinde en az bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır, öyleki her $n \geq N(\varepsilon)$ için

$$\| f_n - f \|_\Delta < \varepsilon .$$

Bu eşitsizlikten de

$$| f_n(0) - f(0) | + \| f_n^\Delta - f^\Delta \|_\infty < \varepsilon ,$$

$$| f_n^\Delta(t) - f^\Delta(t) | < \varepsilon, \quad \forall\, t \in \mathbb{T}, \quad \forall\, n \geq N \tag{3.7}$$

bulunur. (3.7) eşitsizliğinden $\{f_n^\Delta(t)\}$ dizisi $f^\Delta(t)$ fonksiyonuna $\mathbb{T}$ üzerinde düzgün yakınsar. $\{f_n^\Delta(t)\}$ sürekli fonksiyonların dizisi düzgün yakınsak olduğundan $f^\Delta(t)$ süreklidir. $m > N$ için $| f_m^\Delta(t) | < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N_1 > 0$ vardır öyleki, her $t > N_1$ için

$$| f^\Delta(t) | = | f_m^\Delta(t) - f^\Delta(t) | + | f_m^\Delta(t) | < \varepsilon + M .$$

Buradan $f^\Delta \in C_0$ ve $f \in C_0(\Delta)$ bulunur. O halde $C_0(\Delta)$ kapalı alt uzaydır.

Teorem 3.1.4. $\left(C_0\left(\Delta\right), \| \ . \ \|_\Delta \right)$ bir Banach uzay'dır.

İspat. Teorem 3.1.2., Teorem 3.1.3. ve Lemma 3.1.1. den $C_0\left(\Delta\right)$ nın $L_\infty\left(\Delta\right)$ Banach uzayının kapalı alt uzayı olduğu görülür. Buradan da $C_0\left(\Delta\right)$ nın Banach uzay olduğu ispatlanmış olur.

Tanım 3.1.4. Tanımlanan ϕ operatörü

$$\phi : L_\infty\left(\Delta\right) \to L_\infty\left(\Delta\right), \quad \phi\left(f\left(t\right)\right) = f\left(t\right) - f\left(0\right)$$

sınırlı lineer bir operatördür. Aynı zamanda $\phi\left[L_\infty\left(\Delta\right)\right] = \left\{ g \in L_\infty\left(\Delta\right) : g\left(0\right) = 0 \right\}$, $L_\infty\left(\Delta\right)$ nın alt uzayıdır ve $\| f \|_\Delta = \| f^\Delta \|_\infty$ normu tanımlıdır.

(i) $\forall\ f, g \in L_\infty\left(\Delta\right)$ ve $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\phi\left(\alpha f + \beta g \right)\left(t\right) &= \left(\alpha f + \beta g \right)\left(t\right) - \left(\alpha f + \beta g \right)\left(0\right) \\
&= \left(\alpha f \right)\left(t\right) + \left(\beta g \right)\left(t\right) - \left(\alpha f \right)\left(0\right) - \left(\beta g \right)\left(0\right) \\
&= \alpha\, f\left(t\right) + \beta\, g\left(t\right) - \alpha\, f\left(0\right) - \beta\, g\left(0\right) \\
&= \alpha\left(f\left(t\right) - f\left(0\right)\right) + \beta\left(g\left(t\right) - g\left(0\right)\right) \\
&= \alpha\left(\phi f \right)\left(t\right) + \beta\left(\phi g \right)\left(t\right)
\end{aligned}$$

(ii) Her $f \in L_\infty\left(\Delta\right)$ için bir $g \in L_\infty\left(\Delta\right)$ vardır öyleki, $\phi\left(f \right) = g$ sağlanır.

$$\| \phi f \|_\Delta = \| g \|_\Delta$$

$$=\left|g(0)\right|+\left\|g^{\Delta}\right\|_{\infty}$$

$$=\left\|g^{\Delta}\right\|_{\infty}$$

$$=\left\|f^{\Delta}\right\|_{\infty}$$

$$\leq\left\|f^{\Delta}\right\|_{\infty}+\left|f(0)\right|$$

$$=\left\|f\right\|_{\Delta}.$$

(i) ve (ii) den ϕ operatörünün sınırlı bir lineer operatör olduğu ispatlanmış olur.

Tanım 3.1.5. D operatörü

$$D:\ \phi L_{\infty}(\Delta)\to L_{\infty}, \qquad D(f)=f^{\Delta}$$

bir lineer homeomorfizmadır. Ayrıca D izometrik dönüşüm olduğu için $\phi L_{\infty}(\Delta)$ ve L_{∞} denk normlanmış uzaylardır.

(i) $\forall\ f,g\in\phi L_{\infty}(\Delta)$ ve $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$D(\alpha f+\beta g)=(\alpha f+\beta g)^{\Delta}$$

$$=(\alpha f)^{\Delta}+(\beta g)^{\Delta}$$

$$=\alpha f^{\Delta}+\beta g^{\Delta}$$

$$=\alpha D(f)+\beta D(g)$$

sağlandığından D lineer bir operatördür.

(ii) $\forall\ f,g\in\phi L_{\infty}(\Delta)$**,** $f\neq g$ için $D f\neq D g$ olduğunu ispatlayalım.

$D f = D g$ olduğunu varsayalım. O halde,

$\Rightarrow \; f^{\Delta} = g^{\Delta}$

$\Rightarrow \; f^{\Delta} - g^{\Delta} = 0$

$\Rightarrow \; (f - g)^{\Delta} = 0$

$\Rightarrow \; (f - g)(t) = c$, $\exists\, c \in \mathbb{R}$ vardır.

$\Rightarrow \; t = 0$ için $(f - g)(0) = c = 0$

elde edilir ve her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = g(t)$ olur. Bu ise varsayımımız nedeniyle bir çelişkidir. O halde $D f \neq D g$ olmalıdır. Buradan D operatörünün birebir olduğu görülür.

(iii) Her $g \in L_{\infty}$ için $D f = g$ sağlanacak şekilde en az bir $f \in \phi L_{\infty}(\Delta)$ olduğunu görelim. Bunun için

$$f(t) = \int_{0}^{t} g(s)\Delta s$$

tanımlayalım. $f(0) = 0$ ve

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{m \to t} \frac{\int_{0}^{\sigma(t)} g(s)\Delta s - \int_{0}^{m} g(s)\Delta s}{\sigma(t) - m} = \lim_{m \to t} \frac{\int_{m}^{\sigma(t)} g(s)\Delta s}{\sigma(t) - m} = \frac{\int_{t}^{\sigma(t)} g(s)\Delta s}{\sigma(t) - t}$$

$$= \frac{(\sigma(t) - t)\, g(t)}{\sigma(t) - t} = g(t)$$

sağlandığından D operatörü örtendir.

(iv) $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $f \in U_\delta\left(f_0\right)$ için $\left\| D\,f - D\,f_0 \right\|_\infty < \varepsilon$ sağlanacak şekilde $U_\delta\left(f_0\right)$ komşuluğunun var olduğunu gösterelim:

$$U_\delta\left(f_0\right) = \left\{ f \in \phi L_\infty\left(\Delta\right) : \left\| f - f_0 \right\|_\Delta < \delta \right\}$$

$$\left\| f - f_0 \right\|_\Delta = \left\| f^\Delta - f_0^\Delta \right\|_\infty < \delta$$

esitsizliğinde $\delta = \varepsilon$ ise

$$\left\| D\,f - D\,f_0 \right\|_\infty = \left\| f^\Delta - f_0^\Delta \right\|_\infty < \varepsilon$$

elde edilir. Buradan da D operatörünün sürekli olduğu görülür.

(v) $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $g \in U_\delta\left(g_0\right)$ için $\left\| D^{-1}\,g - D^{-1}\,g_0 \right\|_\Delta < \varepsilon$ sağlanacak şekilde $U_\delta\left(g_0\right)$ komşuluğunun var olduğunu gösterelim.

$$D^{-1} :\; L_\infty \to \phi L_\infty\left(\Delta\right)$$

$$g \to f \quad \left(f^\Delta = g\right)$$

$$f^\Delta\left(t\right) = g\left(t\right) \Rightarrow \int_0^s f^\Delta\left(t\right)\Delta t = \int_0^s g\left(t\right)\Delta t\,,\; s \in T$$

$$\Rightarrow f\left(s\right) - f\left(0\right) = \int_0^s g\left(t\right)\Delta t$$

$$\Rightarrow f\left(s\right) = \int_0^s g\left(t\right)\Delta t$$

$$\Rightarrow D^{-1}\,g\left(t\right) = \int_0^t g\left(s\right)\Delta s\,.$$

$$U_{\delta}\left(g_{0}\right)=\left\{\ g\in L_{\infty}\ :\ \|\ g-g_{0}\ \|_{\infty}<\delta\ \right\}$$

$\|\ g-g_{0}\ \|_{\infty}<\delta$ için $\delta=\varepsilon$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
\|\ D^{-1}g-D^{-1}g_{0}\ \|_{\Delta} &= \left\|\ \int_{0}^{t}g\left(s\right)\Delta s-\int_{0}^{t}g_{0}\left(s\right)\Delta s\ \right\|_{\Delta} \\
&= \left\|\left(\int_{0}^{t}g\left(s\right)\Delta s-\int_{0}^{t}g_{0}\left(s\right)\Delta s\right)^{\Delta}\ \right\|_{\infty} \\
&= \left\|\left(\int_{0}^{t}g\left(s\right)\Delta s\right)^{\Delta}-\left(\int_{0}^{t}g_{0}\left(s\right)\Delta s\right)^{\Delta}\ \right\|_{\infty} \\
&= \|\ g\left(t\right)-g_{0}\left(t\right)\ \|_{\infty}<\varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Ohalde D^{-1} operatörü süreklidir.

(vi) $\forall\ f,g\in\phi L_{\infty}\left(\Delta\right)$**,**

$$\begin{aligned}
\|\ Df-Dg\ \|_{\infty} &= \|\ f^{\Delta}-g^{\Delta}\ \|_{\infty} \\
&= \left|\left(f-g\right)(0)\right|+\left\|\left(f-g\right)^{\Delta}\right\|_{\infty} \\
&= \|\ f-g\ \|_{\Delta}
\end{aligned}$$

sağlandığından D izometriktir.

3.2 Dual Uzaylar

Tanım 3.2.1. X bir fonksiyon uzayı, $a\in\mathbb{T}$ ve $F\subseteq X$ olsun.

$$F^{\alpha}=\left\{ f\ :\ \int_0^a \left| f(t) \right| \Delta t<\infty,\quad \int_{\mathbb{T}} \left| f(t)g(t) \right| \Delta t<\infty,\quad \forall\, g\in F \right\},$$

$$F^{\beta}=\left\{ f\ :\ \int_0^a \left| f(t) \right| \Delta t<\infty,\quad \int_{\mathbb{T}} f(t)g(t)\Delta t \quad \text{yakınsaktır,} \quad \forall\, g\in F \right\},$$

$$F^{\gamma}=\left\{ f\ :\ \int_0^a \left| f(t) \right| \Delta t,\quad \sup_{s\in\mathbb{T}} \left| \int_0^s f(t)g(t)\Delta t \right| <\infty,\quad \forall\, g\in F \right\},$$

ile tanımlanan F^{α}, F^{β} ve F^{γ} uzaylarına sırasıyla F uzayının $\alpha,\ \beta$ ve γ dual uzayları denir.

Teorem 3.2.1. F ve G fonksiyon uzayları ise

(i) $F^{\alpha} \subseteq F^{\beta} \subseteq F^{\gamma}$

(ii) $F \subseteq G$ ise $G^{*} \subseteq F^{*},\ * = \alpha, \beta, \gamma.$

sağlanır.

İspat. (i) $f \in F^{\alpha}$ olsun. O halde her $g \in F$ için

$\left| \int_{\mathbb{T}} f(t)g(t)\ \Delta t \right| \leq \int_{\mathbb{T}} \left| f(t)g(t) \right| \Delta t<\infty$. Böylece $f \in F^{\beta}$ ve $F^{\alpha} \subseteq F^{\beta}$ olduğu ispatlanır. $f \in F^{\beta}$ olsun. O halde her $g \in F$ için $\left| \int_{\mathbb{T}} f(t)g(t)\Delta t \right| <\infty$ yazılabilir. Bu durumda her $s \in \mathbb{T}$ için $\exists M>0$ öyleki,

$\left| \int_0^s f(t)g(t)\ \Delta t \right| <M$. Yani her $g \in F$ için,

$\sup_{s\in\mathbb{T}} \left| \int_0^s f(t)g(t)\Delta t \right| <\infty$ doğrudur.Böylece $f \in F^{\gamma}$ ve $F^{\beta} \subseteq F^{\gamma}$ elde edilir.

(ii) $F \subseteq G$ olsun. F ve G fonksiyon uzaylarının α -dual tanımından,

$$F^{\alpha} = \left\{ f \ : \ \int_0^a \left| f(t) \right| \Delta t < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}} \left| f(t) h(t) \right| \Delta t < \infty, \quad \forall\, h \in F \right\},$$

$$G^{\alpha} = \left\{ g \ : \ \int_0^a \left| g(t) \right| \Delta t < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}} \left| g(t) r(t) \right| \Delta t < \infty, \quad \forall\, r \in G \right\}.$$

Her $g \in G^{\alpha}$ için $F \subseteq G$ olduğundan, her $r \in F$ için $\int_{\mathbb{T}} \left| g(t) r(t) \right| \Delta t < \infty$

doğrudur. O halde $g \in F^{\alpha}$ ve $G^{\alpha} \subseteq F^{\alpha}$ doğruluğu ispatlanmış olur.

F ve G fonksiyon uzaylarının β -dual tanımından,

$$F^{\beta} = \left\{ f \ : \ \int_0^a \left| f(t) \right| \Delta t < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}} f(t) h(t) \Delta t \text{ yakınsak}, \quad \forall\, h \in F \right\},$$

$$G^{\beta} = \left\{ g \ : \ \int_0^a \left| g(t) \right| \Delta t < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}} g(t) r(t) \Delta t \text{ yakınsak}, \quad \forall\, r \in G \right\}.$$

Her $g \in G^{\beta}$ için $F \subseteq G$ olduğundan, her $r \in F$ için $\int_{\mathbb{T}} g(t) r(t) \Delta t$ yakınsaktır.

O halde $g \in F^{\beta}$ ve $G^{\beta} \subseteq F^{\beta}$ ispatlanmış olur.

F ve G fonksiyon uzaylarının γ -dual tanımından,

$$F^{\gamma} = \left\{ f \ : \ \int_0^a \left| f(t) \right| \Delta t < \infty, \quad \sup_{s \in \mathbb{T}} \left| \int_0^s f(t) h(t) \Delta t \right| < \infty, \quad \forall\, h \in F \right\},$$

$$G^{\gamma} = \left\{ g \ : \ \int_0^a \left| g(t) \right| \Delta t < \infty, \quad \sup_{s \in \mathbb{T}} \left| \int_0^s g(t) r(t) \Delta t \right| < \infty, \quad \forall\, r \in G \right\}.$$

Her $g \in G^{\gamma}$ için $F \subseteq G$ olduğundan, her $r \in F$ için $\sup_{s \in \mathbb{T}} \left| \int_0^s g(t) r(t) \Delta t \right| < \infty$

sağlanır. F^{γ} nın tanımından da $g \in F^{\gamma}$ ve $G^{\gamma} \subseteq F^{\gamma}$ olduğu ispatlanır.

Lemma 3.2.1. $f \in \phi L_\infty(\Delta)$ ise $\sup\limits_{t\in\mathbb{T}/\{0\}} \dfrac{|f(t)|}{t} < \infty$.

İspat. $f \in \phi L_\infty(\Delta)$ ise, $\exists K > 0$, öyleki, $\left|f^\Delta(t)\right| \le K$, $\forall\, t \in \mathbb{T}/\{0\}$ olur. Zaman skalasında Δ - integralin özellikleri kullanılarak,

$$|f(t)| = |f(t) - f(0)| = \left|\int_0^t f^\Delta(s)\Delta s\right| \le \int_0^t \left|f^\Delta(s)\right|\Delta s \le \int_0^t K\,\Delta s = K\,t$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten de $\sup\limits_{t\in\mathbb{T}/\{0\}} \dfrac{|f(t)|}{t} < \infty$ elde edilir.

Teorem 3.2.2. $\left[\phi L_\infty(\Delta)\right]^\alpha = \left\{ f: \quad \int_0^a |f(t)|\Delta t < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}} t|f(t)|\Delta t < \infty \right\}$.

İspat. $D_1 = \left\{ f: \quad \int_0^a |f(t)|\Delta t < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}} t|f(t)|\Delta t < \infty \right\}$ olsun. $f \in \left[\phi L_\infty(\Delta)\right]^\alpha$ aldığımızda her $g \in \phi L_\infty(\Delta)$ için $\int_{\mathbb{T}} |f(t)g(t)|\Delta t < \infty$ olduğundan özel olarak $g(t) = t$ alınabilir. $g^\Delta(t) = 1$ ve $g(0) = 0$ olduğu için $g \in \phi L_\infty(\Delta)$ olduğu açıktır. Bu durumda,

$\int_{\mathbb{T}} |t\,f(t)|\Delta t = \int_{\mathbb{T}} t|f(t)|\Delta t < \infty$ elde edilir. Böylece $f \in D_1$ ve $\left[\phi L_\infty(\Delta)\right]^\alpha \subset D_1$ olur.

$f \in D_1$ olsun. O halde $t_0 \in \mathbb{T}/\{0\}$ ve her $g \in \phi L_\infty(\Delta)$ için Lemma 3.2.1. den,

$$\int_{\mathbb{T}} |f(t)g(t)|\Delta t = \int_0^{t_0} |f(t)g(t)|\Delta t + \int_{t_0}^{\infty} t|f(t)|\frac{|g(t)|}{t}\Delta t$$

$$\leq \int_{0}^{t_0} \left| f(t)\, g(t) \right| \Delta t + \sup_{t\in[t_0,\infty)} \frac{\left| g(t) \right|}{t} \int_{t_0}^{\infty} t \left| f(t) \right| \Delta t$$

$$< \infty .$$

Bu ise $f \in \left[\phi L_\infty (\Delta) \right]^\alpha$ ve $D_1 \subset \left[\phi L_\infty (\Delta) \right]^\alpha$ olduğunu ispatlar.

Örnek 3.2.1. D_1 kümesinin boş olmadığını göstermek için $f(t) = 0$ almak yeterli olacaktır. Bu kümenin boş olmadığı, aşağıda tanımlı fonksiyon ile gösterilebilir. $t \in \mathbb{T}$ ve

$$f(t) = \frac{t + \sigma(t) + 2}{(t+1)^2 (\sigma(t)+1)^2 (t^2 + 1)}$$

fonksiyonu için,

$\int_0^a \left| \frac{t + \sigma(t) + 2}{(t+1)^2 (\sigma(t)+1)^2 (t^2 + 1)} \right| \Delta t$ integralinin yakınsaklığını göstermek için Teorem 2.3.4. Dirichlet-Abel Testini uygulayalım.

$$g_1(t) = \frac{t + \sigma(t) + 2}{(t+1)^2 (\sigma(t)+1)^2}, \quad h_1(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

alındığında

(i) $$\int_0^A \left| g_1(t) \right| \Delta t = \int_0^A \frac{t + \sigma(t) + 2}{(t+1)^2 (\sigma(t)+1)^2} \Delta t$$

$$= \int_0^A \left(-\frac{1}{(t+1)^2} \right)^\Delta = -\frac{1}{(A+1)^2} + 1, \quad \forall\, A \in \mathbb{T} (A \geq 0)$$

(ii) $h_1^{\Delta}(t)=\left(\dfrac{1}{t^2+1}\right)^{\Delta}=-\dfrac{\sigma(t)+t}{\left(t^2+1\right)\left(\sigma^2(t)+1\right)}\leq 0\,,$

Teorem 2.2.4. (ii) den h_1 fonksiyonu T üzerinde monoton azalandır

ve $\lim\limits_{t\to\infty} h_1(t)=0$ olur.

O halde Teorem 2.3.4. den,

$$\int_0^a g_1(t)h_1(t)\Delta t=\int_0^a \left|f(t)\right|\Delta t<\infty, \quad \forall a\in\mathbb{T}$$

elde edilir. İkinci koşulu ispatlamak için

$$\int_0^{\infty} t\left|\frac{t+\sigma(t)+2}{(t+1)^2\left(\sigma(t)+1\right)^2\left(t^2+1\right)}\right|\Delta t=\int_0^{s_0} t\left|f(t)\right|\Delta t+\int_{s_0}^{\infty} t\left|f(t)\right|\Delta t$$

$s_0\in\mathbb{T},\ s_0>1$ alınabilir. $g_2(t)=\dfrac{t+\sigma(t)+2}{(t+1)^2\left(\sigma(t)+1\right)^2},\ h_2(t)=\dfrac{t}{t^2+1}, \quad t\in[s_0,\infty)$

alındığında

(i) $\displaystyle\int_{s_0}^{A}\left|g_2(t)\right|\Delta t=\int_{s_0}^{A}\frac{t+\sigma(t)+2}{(t+1)^2\left(\sigma(t)+1\right)^2}\Delta t=-\frac{1}{(A+1)^2}+\frac{1}{(s_0+1)^2},\forall A\in\mathbb{T}\left(A\geq s_0\right)$

(ii) $h_2^{\Delta}(t)=\left(\dfrac{t}{t^2+1}\right)^{\Delta}=\dfrac{1-t\sigma(t)}{\left(t^2+1\right)\left(\sigma^2(t)+1\right)}<0\,,\ \forall\, t\in[s_0,\infty)$

ve Teorem2.2.4. (ii) den h_2 fonksiyonu $[s_0,\infty)$ üzerinde azalan ve $\lim\limits_{t\to\infty} h_2(t)=0$ bulunur. O halde Teorem 2.3.4. den $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} t\left|f(t)\right|\Delta t<\infty$ olduğu ispatlanır. Sonuç olarak $f\in D_1$ bulunur.

Lemma 3.2.2. $f \in L_\infty(\Delta)$ ise, $\sup_{t\in\mathbb{T}} \frac{|f(t)|}{t+1} < \infty$.

İspat. $f \in L_\infty(\Delta)$ olsun. Tanım 3.1.3. den her $t\in\mathbb{T}$ için $\left|f^\Delta(t)\right| \le N$ sağlanacak şekilde enaz bir N pozitif sabiti vardır. Δ integralinin özellikleri kullanılarak,

$$|f(t)| - |f(0)| \le |f(t) - f(0)| = \left|\int_0^t f^\Delta(s)\Delta s\right| \le \int_0^t \left|f^\Delta(s)\right|\Delta s \le \int_0^t N\,\Delta s = Nt,$$

elde edilir.

$$|f(t)| \le N\,t + |f(0)| < A(t+1), \qquad A = \max\{N, |f(0)|\}$$

alınırsa $\sup_{t\in\mathbb{T}} \frac{|f(t)|}{t+1} < \infty$ ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.3. $\left[\phi C(\Delta)\right]^\alpha = \left[\phi L_\infty(\Delta)\right]^\alpha$.

İspat. $f \in \left[\phi C(\Delta)\right]^\alpha$ olsun. Her $g \in \phi C(\Delta)$ için $\int_{\mathbb{T}} |f(t)g(t)|\Delta t$ yakınsaktır. $g(t) = t$ fonksiyonu $g^\Delta(t) = 1$, $g(0) = 0$ koşullarını sağladığı için $g \in \phi C(\Delta)$ seçilebilir. $\int_{\mathbb{T}} t|f(t)| < \infty$ ve Teorem 3.2.2 den $f \in \left[\phi L_\infty(\Delta)\right]^\alpha$ olur. Ayrıca $\phi C(\Delta) \subseteq \phi L_\infty(\Delta)$ ve Teorem3.2.1 (ii) den de $\left[\phi L_\infty(\Delta)\right]^\alpha \subseteq \left[\phi C(\Delta)\right]^\alpha$ olduğu ispatlanır.

Teorem 3.2.4. $\left[C(\Delta)\right]^\alpha = \left[L_\infty(\Delta)\right]^\alpha$.

İspat. $f \in \left[C(\Delta) \right]^{\alpha}$ olsun. $\phi C(\Delta) \subseteq C(\Delta)$, Teorem 3.2.1. (ii) ve Teorem 3.2.3 den $f \in \left[\phi L_{\infty}(\Delta) \right]^{\alpha}$ elde edilir. Lemma 3.2.2. den her $g \in L_{\infty}(\Delta)$ için,

$$\int_{\mathbb{T}} \left| f(t) g(t) \right| \Delta t = \int_{\mathbb{T}} (t+1) \left| f(t) \right| \frac{\left| g(t) \right|}{t+1} \Delta t$$

$$\leq \sup_{t \in \mathbb{T}} \frac{\left| g(t) \right|}{t+1} \left(\int_{\mathbb{T}} t \left| f(t) \right| \Delta t + \int_{\mathbb{T}} \left| f(t) \right| \Delta t \right)$$

$$< \infty .$$

Böylece $f \in \left[L_{\infty}(\Delta) \right]^{\alpha}$ olur. Kapsamanın diğer tarafını ispatlamak için de, $C(\Delta) \subseteq L_{\infty}(\Delta)$ ve Teorem 3.2.1. (ii) yi kullanmak yeterli olacaktır.

Sonuç 3.2.1. F **,** L_{∞} ya da C ise,

$$\left[F(\Delta) \right]^{\alpha} = \left\{ f : \int_{0}^{a} \left| f(t) \right| \Delta t < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}} t \left| f(t) \right| \Delta t < \infty \right\}.$$

İspat. $D_2 = \left\{ f : \int_{0}^{a} \left| f(t) \right| \Delta t < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}} t \left| f(t) \right| \Delta t < \infty \right\}$ olsun.

Her $f \in \left[L_{\infty}(\Delta) \right]^{\alpha}$ için $\left[L_{\infty}(\Delta) \right]^{\alpha} \subseteq \left[\phi L_{\infty}(\Delta) \right]^{\alpha}$ ve Teorem 3.2.2 den $f \in D_2$ elde edilir. Öte yandan $f \in D_2$ için Lemma 3.2.2. den her $g \in L_{\infty}(\Delta)$ için,

$$\int_{\mathbb{T}} \left| f(t) g(t) \right| \Delta t = \int_{\mathbb{T}} (t+1) \left| f(t) \right| \frac{\left| g(t) \right|}{t+1} \Delta t$$

$$\leq \sup_{t \in \mathbb{T}} \frac{\left| g(t) \right|}{t+1} \left(\int_{\mathbb{T}} t \left| f(t) \right| \Delta t + \int_{\mathbb{T}} \left| f(t) \right| \Delta t \right) < \infty$$

sağlanır. Böylece $f \in \left[L_{\infty}(\Delta) \right]^{\alpha}$ elde edilir.

Teorem 3.2.5. F **,** L_∞ ya da C ise,

$$\left[F\left(\Delta\right)\right]^{\alpha\alpha}=\left\{ f:\ \int_0^a\left|f\left(t\right)\right|\Delta t<\infty,\ \ \sup_{t\in\mathbb{T}}\frac{\left|f\left(t\right)\right|}{t+1}<\infty\right\}.$$

İspat. Tanım 3.2.1 den,

$$\left[L_\infty\left(\Delta\right)\right]^{\alpha\alpha}=\left\{ f:\ \int_0^a\left|f\left(t\right)\right|\Delta t<\infty,\ \ \int_{\mathbb{T}}\left|f\left(t\right)g\left(t\right)\right|\Delta t<\infty,\ \ \forall\, g\in\left[L_\infty\left(\Delta\right)\right]^{\alpha}\right\}$$

olarak tanımlanır.

$D_3=\left\{ f:\ \int_0^a\left|f\left(t\right)\right|\Delta t<\infty,\ \ \sup_{t\in\mathbb{T}}\frac{\left|f\left(t\right)\right|}{t+1}<\infty\right\}$ olsun. Eğer $f\in D_3$ ise her $g\in\left[L_\infty\left(\Delta\right)\right]^{\alpha}$ için,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}}\left|f\left(t\right)g\left(t\right)\right|\Delta t&=\int_{\mathbb{T}}\left(t+1\right)\frac{\left|f\left(t\right)\right|}{t+1}\left|g\left(t\right)\right|\Delta t\\&\le\sup_{t\in\mathbb{T}}\frac{\left|f\left(t\right)\right|}{t+1}\left(\int_{\mathbb{T}}\left(t+1\right)\left|g\left(t\right)\right|\Delta t\right)\\&<\infty .\end{aligned}$$

Bu da $f\in\left[L_\infty\left(\Delta\right)\right]^{\alpha\alpha}$ olduğunu ispatlar.

Varsayalım ki $f\in\left[L_\infty\left(\Delta\right)\right]^{\alpha\alpha}$ ve $f\notin D_3$ olsun. Ohalde $\sup_{t\in\mathbb{T}}\frac{\left|f\left(t\right)\right|}{t+1}=\infty$ koşulu gözönüne alındığında, $\mathbb{T}$ zaman skalası içinde kesin artan bir $\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır öyleki, $0\neq t_1<t_2<t_3<\ldots$ ve

$$\frac{t_k^{-1}\left|f\left(t_k\right)\right|}{t_{k+1}-t_k}>\frac{\left(t_k+1\right)^{-1}\left|f\left(t_k\right)\right|}{t_{k+1}-t_k}>k^2 .$$

Genelliği bozmadan, $t\in\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ için $f\left(t\right)\neq 0$ olmak üzere $g\left(t\right)$ fonksiyonu

$$g(t) := \begin{cases} |f(t_k)|^{-1}, & t = t_k \\ 0, & t \neq t_k \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} t\left|g(t)\right|\Delta t &= \int_{\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}}\{t_k\}} t_k\left|g(t_k)\right|\Delta t_k \\
&= \int_{\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}}\{t_k\}} t_k\left|f(t_k)\right|^{-1}\Delta t_k \\
&\leq \int_{\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}}\{t_k\}} \frac{1}{k^2\left(t_{k+1}-t_k\right)}\ \Delta t_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\left(t_{k+1}-t_k\right)}\ \mu(t_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_0^a \left|g(t)\right|\Delta t &= \int_{\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}}\{t_k\}\cap[0,a]} \left|f(t_k)\right|^{-1}\Delta t_k \\
&\leq \int_{\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}}\{t_k\}\cap[0,a]} \frac{1}{k^2\, t_k\left(t_{k+1}-t_k\right)}\ \Delta t_k \\
&< \int_{\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}}\{t_k\}\cap[0,a]} \frac{1}{k^2\, t_1\left(t_{k+1}-t_k\right)}\ \Delta t_k \\
&= \frac{1}{t_1}\sum \frac{1}{k^2\left(t_{k+1}-t_k\right)}\left(t_{k+1}-t_k\right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilen sonuçlardan $g(t) \in \left[L_\infty(\Delta) \right]^\alpha$ bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \left| f(t) g(t) \right| \Delta t &= \int_{\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}}\{t_k\}} \left| f(t_k) g(t_k) \right| \Delta t_k \\
&= \int_{\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}}\{t_k\}} \left| f(t_k) \right| \left| f(t_k) \right|^{-1} \Delta t_k \\
&= \int_{\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}}\{t_k\}} 1 \;\; \Delta t_k \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olduğundan bu durum $f \in \left[L_\infty(\Delta) \right]^{\alpha\alpha}$ ile çelişir. Ohalde $f \in D_3$ olmalıdır.

Örnek 3.2.2. $D_3 = \left\{ f \; : \; \int_0^a \left| f(t) \right| \; \Delta t < \infty, \;\; \sup_{t \in \mathbb{T}} \frac{\left| f(t) \right|}{t+1} < \infty \right\}$ kümesinin boş olmadığını gösterelim. Bunun için de

$$f(t) = \frac{1}{(t+1)\left(\sigma(t)+1\right)\left(t^3+1\right)}$$

fonksiyonuna Dircihlet –Abel Testini uygulayarak D_3 ün elemanı olduğunu görelim.

$g_1(t) = \dfrac{1}{(t+1)\left(\sigma(t)+1\right)}$ ve $h_1(t) = \dfrac{1}{t^3+1}$ $t \in \mathbb{T}$ fonksiyonları tanımlansın.

$\forall\, a \in \mathbb{T}$ için $\displaystyle\int_0^a \left| \frac{1}{(t+1)\left(\sigma(t)+1\right)\left(t^3+1\right)} \right| \Delta t$ integrali yakınsaktır. Çünkü,

i) $\displaystyle\int_0^A \left| g_1(t) \right| \Delta t = \int_0^A \frac{1}{(t+1)\left(\sigma(t)+1\right)} \; \Delta t$

$$= \int_0^A \left(-\frac{1}{t+1} \right)^{\Delta} \Delta t$$

$$= -\frac{1}{A+1} + 1 \ , \ \forall \ A \in \mathbb{T} \left(A \geq 0 \right)$$

ii) $h_1^{\Delta}\left(t\right) = \left(\dfrac{1}{t^3+1} \right)^{\Delta} = -\dfrac{\sigma^2\left(t\right) + t\sigma\left(t\right) + t^2}{\left(t^3+1\right)\left(\sigma^3\left(t\right)+1\right)} \leq 0 \ , \ \forall t \in \mathbb{T}$

sağlandığı için Teorem 2.2.4. (ii) den h_1 monoton azalandır.

$\lim\limits_{t\to\infty} h_1\left(t\right) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^3+1} = 0$ sağlanır. Teorem 2.3.4. den her $a \in \mathbb{T}$ için,

$$\int_0^a g_1\left(t\right) h_1\left(t\right) \Delta t = \int_0^a \left| \frac{1}{\left(t+1\right)\left(\sigma\left(t\right)+1\right)\left(t^3+1\right)} \right| \Delta t < \infty$$

olduğu görülür. O halde,

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \frac{\left| f\left(t\right) \right|}{t+1} = \sup_{t\in T} \left| \frac{1}{\left(t+1\right)^2 \left(\sigma\left(t\right)+1\right)\left(t^3+1\right)} \right| < \infty \, ,$$

koşulu sağlandığı için $f \in D_3$ elde edilir.

4. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde bir önceki bölüme uygulama teşkil edecek

$$\mathbb{T} = \{\, t_k : t_1 = 0,\ \ t_k < t_{k+1},\ \ k \in \mathbb{N} \,\}$$

zaman skalasını tanımlayalım. X ve Y, $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlanan fonksiyon uzayları olsun. X uzayından Y uzayına tüm sonsuz matrislerin kümesi (X,Y) olarak tanımlansın.

$g_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$,$(i \in \mathbb{N})$ sürekli fonksiyonlarının bir sonsuz matrisi $A = (g_n(t_k)\mu(t_k))$ ve $f \in X$ ise, A matrisi aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$A(f) = \begin{pmatrix} g_1(t_1)(t_2 - t_1) & g_1(t_2)(t_3 - t_2) & . & . & . \\ g_2(t_1)(t_2 - t_1) & g_2(t_2)(t_3 - t_2) & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_1(t_1) f(t_1)(t_2 - t_1) + g_1(t_2) f(t_2)(t_3 - t_2) + \ldots \\ g_2(t_1) f(t_1)(t_2 - t_1) + g_2(t_2) f(t_2)(t_3 - t_2) + \ldots \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} g_1(t_k) f(t_k)\mu(t_k) \\ \sum_{k=1}^{\infty} g_2(t_k) f(t_k)\mu(t_k) \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}.$$

$f \in X$ için $A_n(f) \in Y$ ve her n için serilerin yakınsaması koşulu altında,

$$A_n(f) = \sum_{k=1}^{\infty} g_n(t_k) f(t_k) \mu(t_k), \quad n \in \mathbb{N}$$

öyleki

$$\Delta A_n(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta g_n(t_k) f(t_k) \mu(t_k), \quad n \in \mathbb{N}$$

sağlanmış olsun.

Lemma 4.1.1. $L_\infty{}^\beta = L_1 = \left\{ f \;\middle|\; f : \mathbb{T} \to R, \quad \int_{\mathbb{T}} |f(t)| \Delta t < \infty \right\}$.

İspat. $f \in L_\infty{}^\beta = \left\{ f : \quad \int_0^a |f(t)| \Delta t < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}} f(t) g(t) \Delta t \text{ yakınsak}, \forall g \in L_\infty \right\}$

olsun. $g \in L_\infty$,

$$g(t) = \operatorname{sgn} f(t) = \begin{cases} 1, & f(t) > 0 \\ 0, & f(t) = 0 \\ -1, & f(t) < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için $\int_{\mathbb{T}} |f(t)| \Delta t < \infty$ ve $f \in L_1$ elde edilir. Eğer $f \in L_1$ ise, her

$g \in L_\infty$ için,

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f(t)\, g(t)\, \Delta t \right| \leq \int_{\mathbb{T}} \left| f(t)\, g(t) \right| \Delta t$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{T}} \left| g(t) \right| \int_{\mathbb{T}} \left| f(t) \right| \Delta t$$

$$< \infty .$$

O halde $f \in L_{\infty}^{\beta}$ olur.

Teorem 4.1.1. $A \in (L_{\infty}, C(\Delta))$ olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \left| g_n(t_k) \right| \mu(t_k) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) $B \in (L_{\infty}, C), \quad B = (h_n(t_k)\mu(t_k)) = ((g_{n+1}(t_k) - g_n(t_k))\mu(t_k))$.

İspat. $(\Rightarrow)$ $A \in (L_{\infty}, C(\Delta))$ ise her $f \in L_{\infty}$ için $A_n(f) \in C(\Delta)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} g_n(t_k)\, f(t_k)\, \mu(t_k)$ yakınsaktır.

(i) Her $f \in L_{\infty}$ için,

$$\int_{\mathbb{T}} g_n(t)\, f(t)\, \Delta t = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty}\{t_k\}} g_n(t_k)\, f(t_k)\, \Delta t_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} g_n(t_k)\, f(t_k)\, (t_{k+1} - t_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} g_n(t_k)\, f(t_k)\, \mu(t_k)$$

$$< \infty .$$

$g_n(t)$ fonksiyonlarının sürekliliğinden $\int_0^a \left| g_n(t_k) \right| \Delta t_k < \infty$ olduğu açıktır. Böylece $g_n(t) \in L_\infty^{\;\beta}$ ve Lemma 4.1.1. den $g_n(t) \in L_1$ olduğu ispatlanır. L_1 fonksiyon uzayının tanımından,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \left| g_n(t) \right| \Delta t &= \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty}\{t_k\}} \left| g_n(t_k) \right| \Delta t_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left| g_n(t_k) \right| (t_{k+1} - t_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left| g_n(t_k) \right| \mu(t_k) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Her $f \in L_\infty$ için,

$$\begin{aligned}
\Delta A_n(f) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Delta g_n(t_k) f(t_k) \mu(t_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(g_{n+1}(t_k) - g_n(t_k) \right) f(t_k) \mu(t_k) \\
&= B_n(f).
\end{aligned}$$

Ohalde $B_n(f) \in C$ ve sonuç olarak da $B \in (L_\infty, C)$ olduğu ispatlanmış olur.

$(\Leftarrow)$ (i) ve (ii) koşulları sağlansın. $f \in L_\infty$ için, $\sup_{t \in \mathbb{T}} \left| f(t) \right| = M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}^+$ vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left| g_n(t_k) f(t_k) \mu(t_k) \right| \le M \left| g_n(t_k) \right| \mu(t_k)$$

eşitsizliğinden $\sum_{k=1}^{\infty} g_n(t_k) f(t_k) \mu(t_k)$ serisi her $n \in \mathbb{N}$ için yakınsaktır.

$\Delta A_n(f) = B_n(f)$ ve $B_n(f) \in C$ olduğundan $A_n(f) \in C(\Delta)$ ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.2. $A \in (L_\infty, L_\infty(\Delta))$ olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \left| g_n(t_k) \right| \mu(t_k) < \infty, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) $B \in (L_\infty, L_\infty), \qquad B = \left(h_n(t_k)\mu(t_k)\right) = \left(\left(g_{n+1}(t_k) - g_n(t_k)\right)\mu(t_k)\right).$

İspat. $(\Rightarrow)$ $A \in (L_\infty, L_\infty(\Delta))$ olsun. O halde her $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in L_\infty$ için

$A_n(f) \in L_\infty(\Delta)$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} g_n(t_k) f(t_k) \mu(t_k)$ serisi yakınsaktır.

(i) Her $f \in L_\infty$ için,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} g_n(t) f(t) \Delta t &= \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty}\{t_k\}} g_n(t_k) f(t_k) \Delta t_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} g_n(t_k) f(t_k)(t_{k+1} - t_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} g_n(t_k) f(t_k) \mu(t_k) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

ve $g_n(t)$ sürekli fonksiyonları için $\int_0^a \left| g_n(t_k) \right| \Delta t_k < \infty$ olduğu açıktır. Böylece $g_n(t) \in L_\infty^{\beta}$ ve Lemma 4.1.1. den $g_n(t) \in L_1$ olduğu ispatlanır. L_1 fonksiyon uzayının tanımından da,

$$\int_{\mathbb{T}} \left| g_n(t) \right| \Delta t = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty}\{t_k\}} \left| g_n(t_k) \right| \Delta t_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| g_n(t_k) \right| \left(t_{k+1} - t_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| g_n(t_k) \right| \mu(t_k)$$

$$< \infty$$

elde edilir.

(ii) Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $f \in L_\infty$ için,

$$B_n(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(g_{n+1}(t_k) - g_n(t_k) \right) f(t_k)\, \mu(t_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} g_{n+1}(t_k) f(t_k)\, \mu(t_k) - \sum_{k=1}^{\infty} g_n(t_k) f(t_k)\, \mu(t_k)$$

$$< \infty$$

sağlanır.

Her $f \in L_\infty$ için,

$$\Delta A_n(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(g_{n+1}(t_k) - g_n(t_k) \right) f(t_k)\, \mu(t_k) = B_n(f)$$

olduğundan $B_n(f) \in L_\infty$ ve buradan da $B \in (L_\infty, L_\infty)$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ (i) ve (ii) koşulları sağlansın. $f \in L_\infty$ için, $\sup_{t \in \mathbb{T}} \left| f(t) \right| = M$ sağlanacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}^+$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\left| g_n(t_k)\, f(t_k)\, \mu(t_k) \right| \le M \left| g_n(t_k) \right| \mu(t_k)$$

eşitsizliğinden ve $\sum_{k=1}^{\infty} \left| g_n(t_k) \right| \mu(t_k)$ serisinin yakınsak oluşundan

$\sum_{k=1}^{\infty} g_n(t_k) f(t_k) \mu(t_k)$ de yakınsaktır.

$\Delta A_n(f) = B_n(f)$ ve $B_n(f) \in L_\infty$ olduğundan $A_n(f) \in L_\infty(\Delta)$ ispatlanmış olur ve böylece $A \in (L_\infty, L_\infty(\Delta))$ elde edilir.

5. ZAMAN SKALASINDA FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİ

İntegral denklemler matematiğin bir çok alanında ve matematiksel fizik alanlarında kullanılmaktadır. Bu denklemler, diferansiyel denklemlerin çözümleri için formül gösterilimi olarak ortaya çıkar. Bir diferansiyel denklem sınır koşullarıyla birlikte integral denklemle yer değiştirebilir. Bu bölümde Fredholm integral denklemlerini zaman skalası üzerinde inceliyoruz.

5.1 Fredholm İntegral Denklemi

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $a,b\in\mathbb{T}$ olsun. Zaman skalasında Fredholm integral denklemi

$$y(t)=f(t)+\lambda\int_{a}^{\sigma(b)}k(t,s)\,y(s)\,\Delta s \tag{5.1}$$

olarak tanımlanır. Burada $y(t)$ bilinmeyen fonksiyon, $f(t)$ sürekli fonksiyon, $k(t,s)$ denklemin çekirdeği ve λ sıfırdan farklı bir parametredir. Bu fonksiyonlar reel değerli fonksiyonlardır. Eğer $f(t)=0$ ise (5.1) denklemine homojen Fredholm integral denklemi denir. (5.1) denkleminde $k(t,s)$ çekirdeği ayrılabilir fonksiyon yani $\alpha_j(t)$, $\beta_j(t)$ lineer bağımsız sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$k(t,s)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)\,\beta_j(s) \tag{5.2}$$

şeklinde yazılsın. $k(t,s)$ çekirdeği (5.1) denkleminde yerine yazıldığında,

$$y(t)=f(t)+\lambda\int_{a}^{\sigma(b)}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)\,\beta_j(s)\right)y(s)\,\Delta s$$

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^{\sigma(b)} \left(\alpha_1(t)\beta_1(s) + \alpha_2(t)\beta_2(s) + ... + \alpha_n(t)\beta_n(s) \right) y(s)\Delta s$$

$$y(t) = f(t) + \lambda \left(\int_a^{\sigma(b)} \alpha_1(t)\beta_1(s)y(s)\Delta s + ... + \int_a^{\sigma(b)} \alpha_n(t)\beta_n(s)y(s)\Delta s \right)$$

$$y(t) = f(t) + \lambda \left(\alpha_1(t) \int_a^{\sigma(b)} \beta_1(s)y(s)\Delta s + ... + \alpha_n(t) \int_a^{\sigma(b)} \beta_n(s)y(s)\Delta s \right)$$

$$y(t) = f(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) \left(\int_a^{\sigma(b)} \beta_j(s)y(s)\Delta s \right). \qquad (5.3)$$

(5.3) denkleminde

$$c_j = \int_a^{\sigma(b)} \beta_j(s)y(s)\Delta s = \left\langle y, \beta_j \right\rangle, \qquad j = 1, 2, ..., n \qquad (5.4)$$

sabitleri tanımlansın. (5.3) ve (5.4) den,

$$y(t) = f(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) c_j \qquad (5.5)$$

elde edilir. (5.5) denklemi $\beta_i(t)$ fonksiyonuyla çarpılarak a dan $\sigma(b)$ ye Δ-integrali alınırsa

$$\int_a^{\sigma(b)} \beta_i(t)y(t)\Delta t = \int_a^{\sigma(b)} \beta_i(t) f(t)\Delta t + \lambda \int_a^{\sigma(b)} \beta_i(t) \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) c_j \right) \Delta t$$

$$c_i = (f, \beta_i) + \lambda \left[\int_a^{\sigma(b)} \beta_i(t)\alpha_1(t)c_1\Delta t + ... + \int_a^{\sigma(b)} \beta_i(t)\alpha_n(t)c_n\Delta t \right]$$

$$c_i = (f, \beta_i) + \lambda \left[\sum_{j=1}^{n} c_j \left(\int_a^{\sigma(b)} \beta_i(t)\alpha_j(t)\Delta t \right) \right]$$

$$c_i = (f, \beta_i) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \left\langle \beta_i, \alpha_j \right\rangle, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

bulunur. $I_{n\times n}$ birim matris, A matrisi

$$A=\left(a_{ij}\right)=\left(\left\langle \beta_i,\alpha_j\right\rangle\right)$$

olarak tanımlı $n\times n$ matris, c sütun vektörü

$$c=\left(c_1,c_2,...,c_n\right)^T$$

ve F sütun vektörü de

$$F=\left(\left\langle f,\beta_1\right\rangle,\left\langle f,\beta_2\right\rangle,...,\left\langle f,\beta_n\right\rangle\right)^T$$

olsun. Bu durumda

$$\left(I-\lambda A\right)c=F \tag{5.6}$$

yazılır.

Teorem 5.1.1.

(i) Eğer λ, A matrisinin bir özdeğeri değil ise, $\left(I-\lambda A\right)c=F$ nin çözümü vardır.

(ii) Eğer λ, A matrisinin bir özdeğeri ise $\left(I-\lambda A\right)c=F$ nin hiç bir çözümü yoktur ya da sonsuz çoklukta çözümü vardır.

İspat. **(i)** (5.6) denkleminin $D(\lambda)$ determinantı

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & . & . & . & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & . & . & . & -\lambda a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & . & . & . & 1-\lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

olmak üzere, λ nın her değeri için $D(\lambda) \neq 0$ olduğundan

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij} = F_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

lineer denklem sisteminin sadece bir çözümü vardır.

(ii) λ nın her değeri için $D(\lambda) = 0$ ise, (5.6) sisteminin hiç çözümü yoktur ya da sonsuz çözümü vardır.

Teorem 5.1.2. (5.1) denkleminde $A = \left(\left\langle \beta_i, \alpha_j \right\rangle\right)$ matris, $k(t,s)$ ayrılabilir çekirdek ve $\lambda \neq 0$ olsun. Eğer λ, A nın bir özdeğeri değil ise, (5.1) denkleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$y(t) = f(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) c_j$$

şeklindedir. Eğer λ, A nın bir özdeğeri ise (5.1) denkleminin hiç bir çözümü yoktur ya da sonsuz çözüm vardır.

Örnek 5.1.1. $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}} = \left\{2^k : k \in \mathbb{N}\right\}$ zaman skalası üzerinde

$$y(t) = t^2 + \lambda \int_{2}^{\sigma(2)} \left(3t - st^2\right) y(s) \Delta s$$

Fredholm integral denkleminin çözümünü bulalım. Burada $k(t,s) = 3t - st^2$ çekirdek fonksiyonu için $\alpha_1(t) = t,\ \beta_1(s) = 3,\ \alpha_2(t) = t^2,\ \beta_2(s) = -s$ alınabilir.

Bu durumda,

$$F=\begin{bmatrix}\langle f,\beta_1\rangle\\ \langle f,\beta_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\int_2^4 3t^2\Delta t\\ -\int_2^4 t^3\Delta t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\ -16\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}\langle \beta_1,\alpha_1\rangle & \langle \beta_1,\alpha_2\rangle\\ \langle \beta_2,\alpha_1\rangle & \langle \beta_2,\alpha_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\int_2^4 3t\Delta t & \int_2^4 3t^2\Delta t\\ -\int_2^4 t^2\Delta t & -\int_2^4 t^3\Delta t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 24\\ -8 & -16\end{bmatrix}$$

bulunur. A matrisinin özdegerleri için $\det\left(I-\lambda A\right)=0$ hesaplanırsa,

$$\det\left(I-\lambda A\right)=\begin{vmatrix}1-12\lambda & -24\lambda\\ 8\lambda & 1+16\lambda\end{vmatrix}=1+4\lambda$$

elde edilir. Denklemin çözümü için $\left(I-\lambda A\right)c=F$ eşitliğinden c vektörünü bulunabilir.

$$\begin{bmatrix}1-12\lambda & -24\lambda\\ 8\lambda & 1+16\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\ -16\end{bmatrix}$$

denklem sisteminden

$$c_1=\frac{24}{1+4\lambda}\ ,\ c_2=\frac{-16}{1+4\lambda}$$

bulunur. $\det\left(I-\lambda A\right)\neq 0$ ise Fredholm denklemin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm,

$$y(t)=t^2+\lambda\sum_{j=1}^{2}\alpha_j(t)c_j$$

$$y(t)=t^2+\lambda\left(\alpha_1(t)c_1+\alpha_2(t)c_2\right)=t^2+\lambda t\frac{24}{1+4\lambda}+\lambda t^2\frac{-16}{1+4\lambda}$$

olarak elde edilir.

Örnek 5.1.2. $\mathbb{T}=\frac{1}{3}\mathbb{Z}=\left\{\frac{1}{3}k : k\in\mathbb{Z}\right\}$ zaman skalası üzerinde

$$y(t)=\lambda\int_{-\frac{1}{3}}^{\sigma\left(\frac{1}{3}\right)}(1+2ts)\,y(s)\Delta s$$

Fredholm integral denklemini inceleyelim. $k(t,s)=1+2ts$ çekirdek fonksiyonu için $\alpha_1(t)=1,\ \beta_1(s)=1,\ \alpha_2(t)=2t,\ \beta_2(s)=s$ alınabilir. O halde,

$$F=\begin{bmatrix}\langle f,\beta_1\rangle\\ \langle f,\beta_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix}\langle\beta_1,\alpha_1\rangle & \langle\beta_1,\alpha_2\rangle\\ \langle\beta_2,\alpha_1\rangle & \langle\beta_2,\alpha_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}1\Delta t & \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}2t\Delta t\\ \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}t\Delta t & \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}2t^2\Delta t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{4}{27}\end{bmatrix}$$

bulunur. A matrisinin özdeğerlerinin bulmak için

$$\det(I-\lambda A)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\frac{4}{27}\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left(1-\frac{4}{27}\lambda\right)=0$$

eşitliğini göz önüne alalım.

Eğer $\lambda\neq 1$ ve $\lambda\neq\frac{27}{4}$ ise, integral denklemin tek bir çözümü vardır. Bu çözümü bulmak için $(I-\lambda A)c=F$ denklem sisteminden

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{4}{27}\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c_1 = c_2 = 0$ elde edilir ve böylece denklemin çözümü olarak

$$y(t)=\lambda\sum_{j=1}^{2}\alpha_j(t)c_j = 0$$

bulunur.

$\lambda = 1$ için çözüm arandığında

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{4}{27}\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c_2 = 0$, $c_1 = a\ (a\ sabit)$ bulunur ve buradan da

$$y(t)=\lambda\sum_{j=1}^{2}\alpha_j(t)c_j = 1\big(\alpha_1(t)c_1+\alpha_2(t)c_2\big)=a$$

sonsuz çoklukta çözüm elde edilir.

Örnek 5.1.3. $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde

$$y(t)=2+\lambda\int_{0}^{\sigma(1)} e_p(s,t_0)e_p(t_0,t)\, y(s)\Delta s$$

Fredholm integral denklemini inceleyelim. $e_p(t,t_0)$ üstel fonksiyonunun özelliklerini [4,syf 62] kullanarak bu denklemin $p(t)=1, t_0 = 0$ için çözümünü arayalım. $k(t,s)=e_p(s,0)e_p(0,t)$ çekirdek fonksiyonu için

$$\alpha_1(t)=e_p(0,t),\ \beta_1(s)=e_p(s,0)$$

olur. O halde

$$F=\left[\langle f,\beta_1\rangle\right]=\left[\int_0^{\sigma(1)}2e_p(t,0)\Delta t\right]=\left[2\left(e_p(\sigma(1),0)-1\right)\right],$$

$$A=\left[\langle\beta_1,\alpha_1\rangle\right]=\left[\int_0^{\sigma(1)}e_p(t,0)e_p(0,t)\Delta t\right]=\left[\int_0^{\sigma(1)}e_p(t,t)\Delta t\right]=\left[\int_0^{\sigma(1)}1\Delta t\right]=\left[\sigma(1)\right]$$

A matrisinin özdeğerlerini bulmak için $\det(I-\lambda A)$ hesaplanırsa,

$\det(I-\lambda A)=(1-\lambda\sigma(1))=0$ ve $\lambda=\dfrac{1}{\sigma(1)}$ bulunur.

Eğer $\det(I-\lambda A)\neq 0$ ise integral denklemin tek çözümü vardır ve bu çözümü elde etmek için önce c vektörünü bulalım.

$$(1-\lambda\sigma(1))c=e_p(\sigma(1),0)-1$$

$$c=\frac{e_p(\sigma(1),0)-1}{1-\lambda\sigma(1)}$$

bulunur. Böylece $\det(I-\lambda A)\neq 0$ için denklemin çözümü olarak

$$y(t)=2+\lambda\alpha_1(t)c$$

$$y(t)=2+\lambda e_p(0,t)\frac{e_p(\sigma(1),0)-1}{1-\lambda\sigma(1)}$$

elde edilir.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, fonksiyon uzayları tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Tanımladığımız dual uzayların bu fonksiyon uzayları üzerindeki sonuçları ve dualler arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca sonsuz matris dönüşümlerle özel zaman skalaları üzerinde çalışılmıştır. Son bölümde de Fredholm integral denklemi zaman skalası üzerinde incelenmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

1. **Aulbach, B. and Hilger, S.,** 1990, ‘‘Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale, In nonlinear dynamics and quantum dynamical systems (Gaussig, 1990)’’, Volume 59 of Math. Res., Akademie Verlag, Berlin, 9-20 p.

2. **Batıt, Ö.,** 2001, ‘‘Some function spaces and their dual spaces’’, Master Thesis, Ege Üniversitesi.

3. **Bartle, R.G., Sherbert, D.R.,** 1982, ‘‘Introduction to Real Analysis’’, Canada .

4. **Bohner, M. and Peterson, A.,** 2001, ‘‘Dynamic Equations on Time Scales’’ Birkhauser, Boston.

5. **Bohner, M. and Guseinov G. Sh.,** 2003, ‘‘Improper integrals on time scales’’, Dynam. Systems Appl., Vol. 12(1-2):45-66 p.

6. **Bohner, M. and Peterson, A.,** 2003, ‘‘Advances in Dynamic Equations on Time Scales’’ Birkhauser, Boston.

7. **Deimling, K.,** 1985, ‘‘Nonlinear Functional Analysis’’, New York.

8. **Dunford, N. and Schwartz, J.T.,** 1958, ‘‘Linear Operators I’’ Interscience Publishers, New York.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

9. **Et, M.,** 1993, ‘‘On some difference sequence spaces’’, Doğa-Tr. J. of Math., Vol.17:18-24 p.

10. **Et, M. and Çolak, R.,** 1995, ‘‘On some generalized difference sequence spaces’’, Soochow J. of Math., Vol.21(4):377-386 p.

11. **Fredholm, E.I.,** 1903, ‘‘ Sur une classe d’equations fonctionnelles’’, Acta Math., Vol.27,365-390 p.

12. **Fischer, E.,** 1980, ‘‘Intermediate Real Analysis’’, Springer-Verlag.

13. **Garling, D.J.H.,** 1967, ‘‘The β and γ Duality of sequence Spaces’’ , Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 63, 963-981.

14. **Guseinov, G. Sh.,** 2002, ‘‘Integration on time scales’’, J. Math. Anal. Appl., Vol. 285:107-127 p.

15. **Guseinov, G. Sh.,** 2000-2001, ‘‘Zaman Skalasında Dinamik Sistemler I-II’’, Ders Notları.

16. **Hilger, S.,** 1988, ‘‘Ein Masskettenkalkül mit Anwendung auf zentrumsmannigfaltigkeiten’’, PhD Thesis, Universitat Würzburg.

17. **Hilger, S.,** 1990, ‘‘Analysis on measure chains, a unified approach to continues and discrete calculus’’, Results Math., Vol. 18:18-56 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

18. **Kanwal, R.P.,** ‘‘Lineer Integral Equations Theory and Technique’’, Boston, 1996.

19. **Kaymakçalan, B., Lakshmikantham, V. and Sivasundaram S.,** 1996, ‘‘Dynamic Systems on Measure Chains’’, Kluwer Academic Publishers, Boston.

20. **Kelley, W.G., Peterson, A.C.,** 1991, ‘‘Difference Equations an Introduction with Applications’’, San Diego.

21. **Kızmaz, H.,** 1981, ‘‘On certain sequence spaces’’, Canad. Math. Bull., Vol. 24(2):169-176 p.

22. **Kreyszig, E.,** 1978, ‘‘Introductory Functional Analysis with Applications’, John Wiley and Sons, New York.

23. **Maddox I. J.,** 1970, ‘‘Elements of Functional Analysis’’, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

24. **Yosida, K.,** 1960, ‘‘Lectures on Differential and Integral Equations’’, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında İzmir’ de doğdu. İlk ve orta öğrenimini İzmir’de tamamladı. 1998 yılında Ege Üniversitesi Matematik Bölümü’nden ikincilik derecesiyle mezun oldu. 1999 yılında girdiği Ege Üniversitesi Matematik Bölümünde Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim dalında yüksek lisans yaptı. 2002 yılında Ege Üniversitesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak başladı. 2001 yılından itibaren Ege Üniversitesi’nde doktora yapmaktadır.