T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

SKEW TÜREVLER VE b-GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Taylan PEHLİVAN

Danışman: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Doktora Programı

İzmir
2020

Taylan PEHLİVAN tarafından DOKTORA tezi olarak sunulan "Skew Türevler ve b-Genelleştirilmiş Türevler" başlıklı bu çalışma E. Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **06.01.2020** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri		**İmza**
Jüri Başkanı	: Prof. Dr. Hatice KANDAMAR	Hatice
Raportör Üye	: Doç. Dr. Çağrı DEMİR	
Üye	: Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ	
Üye	: Prof. Dr. Emine ALBAŞ	
Üye	: Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ	

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum "**Skew Türevler ve b-Genelleştirilmiş Türevler**" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

06/01/2020

Taylan PEHLİVAN

ÖZET

SKEW TÜREVLER VE b-GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

PEHLİVAN, Taylan

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

Ocak 2020, 101 sayfa

Bu çalışmada asal halkaların özel türden dönüşümlerini (skew türev (σ-türev), b-genelleştirilmiş türev) içeren birtakım özdeşlikler incelenerek özdeşliğin ihtiva ettiği dönüşümlerin formu veya halkanın yapısı belirlenmiştir. Bu tez esas olarak altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tez konusu tanıtılmış ve literatürde yer alan bu konu ile ilgili çalışmalar kısaca özetlenmiştir.

İkinci bölüm, tezin daha sonraki bölümlerinde incelenecek olan problemlerin daha iyi anlaşılması adına elzem olan temel tanım, özellik ve teoremlerden oluşmaktadır.

Üçüncü bölümde, öncelikle bu bölümü oluşturan ve motivasyon olarak alınan çalışmaların bir kısmından söz edilip daha sonra genelleştirilmiş polinom özdeşliği teorisinin araçları kullanılarak asal halkalarda Engel şartını sağlayan skew türevleri (σ-türevleri) içeren bir özdeşliğin sıfırlayan şartı incelenmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında daha önce asal halkalarda farklı toplamsal dönüşümleri içeren bazı özdeşlikler b-genelleştirilmiş türevlere genişletilmiştir. İkinci kısmında ise homomorfizma veya ters homomorfizma olarak hareket eden b-genelleştirilmiş türevler incelenmiştir.

Beşinci bölümde asal halkalarda b-genelleştirilmiş türevleri ihtiva eden özdeşliklerin sağ (sol) sıfırlayan şartları ve merkezi olma durumu incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde, iki farklı b-genelleştirilmiş türevi içeren bir özdeşlik ele alınarak, halkanın yapısı ve sözü edilen dönüşümlerin formu belirlenmiştir.

Anahtar sözcükler: asal halka, skew türev (σ-türev), b-genelleştirilmiş türev, (genelleştirilmiş) polinom özdeşliği

ABSTRACT

SKEW DERIVATIONS AND b-GENERALIZED DERIVATIONS

PEHLİVAN, Taylan

PhD. in Mathematics Department
Supervisor: Prof. Dr. Emine ALBAŞ
January, 2020, 101 pages

In this work some identities involving special types of mappings (skew derivation (σ-derivation), b-generalized derivation) of prime rings are studied and the form of maps involved identities or the structure of the ring with these identities are characterized. This thesis essentially consists of six chapters. In the first chapter the subject of the thesis is introduced and the studies related to this subject are briefly summarized.

The second chapter consists of basic definitions, properties and theorems which are essential for a better understanding of the problems to be studied in the following chapters of the thesis.

In the third chapter, first of all, some of the studies that constitute this part and taken as motivation are mentioned and then by using tools of generalized polynomial identities theory, the annihilating condition of an identity involving skew derivation (σ-derivation) with Engel condition is studied.

In the first part of fourth chapter, some identities involving different additive maps previously studied are extended to b-generalized derivation. In the second part, b-generalized derivations acting as a homomorphism or anti-homomorphism are examined.

In the fifth chapter, the right (left) annihilating conditions and the central case of the identity that contains b-generalized derivation in prime rings are studied. Moreover, in the same chapter, the structure of the ring and the form of the mentioned maps are determined by considering an identity containing two different b-generalized derivations.

Key Words: prime ring, skew derivation (σ-derivation), b-generalized derivation, (generalized) polynomial identity

ÖNSÖZ

Lisans eğitimimin son yıllarında almış olduğum teorik ağırlıklı derslerde dersin öğretim üyelerinin konu ile ilgili yaptığı açıklamalar ve vermiş olduğu bilgilerle başlayan ve yüksek lisans eğitimim boyunca daha ileri bir seviyeye ulaşan tez konuma olan merakım bu tezin oluşmasının en büyük motivasyonudur. Yüksek lisans eğitimimin başından itibaren benzer konuları çalışan öğretim üyeleri ve lisansüstü öğrencileri ile gerçekleştirilen seminerlerde ekip üyelerinin ele alıp incelediği çalışmalarla yaklaşık 65 yıllık bir maziye sahip olan bu konuya olan ilgim daha da artmış, yapılan bu seminerler sayesinde konu hakkındaki bilgi ve birikimlerim derinleşmiştir. Bu süreç sonunda elde ettiğim bilgi, birikim ve tecrübeler ışığında doktora tez çalışmamın bu konu hakkında olması kararlaştırılmıştır. Tez konumun belirlenmesinden sonra, ilk olarak bahsi geçen bu konu ile ilgili diğer araştırmacıların literatüre kazandırdığı ulaşılabilen tüm çalışmalar dikkatle incelenmeye başlanıp, tezin ilgili bölümlerinde bu çalışmaların bir özeti verilmiştir. Ayrıca yapılan literatür taramalarında teorinin daha da gelişmesi için yararlı olduğuna inandığımız problemler belirlenmiş, sözü edilen bu problemler danışmanım ile birlikte çözülerek tezin ana bölümlerini oluşturmuştur. Bu konu hakkında çalışan araştırmacılara ve akademik hayatında bu konuyla ilgilenmek isteyen lisansüstü öğrencilerine teori hakkında iyi bir kaynak oluşturmasını umarak hazırladığım bu tez, yaklaşık dört yıllık titiz bir çalışmanın bir ürünüdür. 65 yıldır bu konu hakkında diğer araştırmacıların elde ettiği sonuçlar ile danışmanımla birlikte ürettiğimiz çalışmaların bir sentezidir.

İZMİR
06/01/2020

Taylan Pehlivan

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathrm{Char}(R)$	R halkasının karakteristiği
$Z(R)$	R halkasının merkezi
$\mathrm{Ann}_l(S)$	S kümesinin sol sıfırlayanı
$\mathrm{End}_R(M)$	R-modül M nin R-modül homomorfizmalarının kümesi
$\mathrm{End}(V_F)$	F üzerindeki bir V vektör uzayının lineer dönüşümlerinin oluşturduğu halka
$M_n(D)$	D bölümlü halkası üzerindeki $n \times n$ matrisler halkası
$[x, y]$	x ve y elemanlarının komütatör çarpımı
$\mathrm{Soc}_l(R)$	R halkasının sol "socle" ı
$\mathrm{Soc}_r(R)$	R halkasının sağ "socle" ı
$\mathrm{Soc}(R)$	R halkasının "socle" ı
$\mathrm{dim}V_F$	V vektör uzayının F cismi üzerindeki boyutu
T	yarı-lineer dönüşüm

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

Simgeler	Açıklama
$D(R)$	R halkasının yoğun sağ ideallerinin kümesi
$Q_{mr}(R)$	R halkasının maksimal sağ kesirler halkası
Q	R halkasının Martindale kesirler halkası
$Q_s(R)$	R halkasının simetrik Martindale kesirler halkası
C	R halkasının genişletilmiş merkezi
RC	R halkasının merkezi kapanışı
$K\{X\}$	X kümesi üzerindeki serbest K-cebir
S_n	n değişkenli standart özdeşlik
$\otimes$	Tensör çarpım
I_{id}	Birim dönüşüm
$\mathrm{Aut}(R)$	R halkasının otomorfizmalar grubu

1 GİRİŞ

Değişmeli olmayan asal halkaların türevleri üzerine bilinen ilk çalışmayı Posner 1957 yılında yapmıştır. Bu çalışmasında Posner kendi ismiyle özdeşleşmiş olan iki teoremi ele almıştır. Posner birinci teoreminde karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halkanın bileşkeleri de türev olan d_1 ve d_2 gibi iki türeve sahip olduğu durumda bu türevlerden en az birinin sıfır türevi olması gerektiğini göstermiştir. Yine aynı çalışmada bir asal halkanın sıfırdan farklı merkezleyen bir d türevine sahip olması durumunda halkanın değişmeli olduğu sonucuna varılmıştır.

Posner ın 1957 yılındaki çalışmasından hareketle günümüze kadar yapılan araştırmalar, asal (yarı asal) halkaların üzerinde tanımlı oldukları dönüşümlerle birlikte sağladığı bazı özdeşlikleri inceleyerek, halkanın yapısı hakkında bilgi edinebileceğini ve dönüşümlerin karakterizasyonu hakkında bazı sonuçlara varılacağını göstermektedir. Ayrıca, yapılan bu araştırmalar değişmeli olmayan türevli asal halkalar teorisinin gelişimine katkı sağlayarak literatüre türev kavramının genellemesi olan farklı türev tanımlarını kazandırmıştır. Bu tanımlardan bazıları; genelleştirilmiş türevler, skew türevler (σ-türevler), genelleştirilmiş skew türevler (genelleştirilmiş σ-türevler) ve b-genelleştirilmiş türevlerdir.

Değişmeli olmayan asal halkalar teorisinde yer alan faklı tip türev dönüşümlerini ihtiva eden özdeşlikleri içeren birçok problem genelleştirilmiş polinom özdeşliği (GPI) teorisi kullanılarak daha kolay çözülebilmektedir. GPI teori 1965 yılında (Amitsur, 1965)' un primitif GPI-halkaları incelediği çalışmasıyla başlamış olup, 1969 yılında Martindale' nin bir GPI sağlayan asal halkaların bir karakterizasyonunu verdiği çalışmasıyla ilerlemiştir. Bu teorideki önemli çalışmalardan bir diğeri, 1975 yılında Kharchenko tarafından yapılan asal halkaların otomorfizmalarını içeren genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini ele aldığı çalışmadır.

Bu çalışmada üçüncü bölümde asal halkaların Engel şartını sağlayan skew türevlerini (σ-türevlerini) ihtiva eden bir özdeşliğin sıfırlayan şartı ele alınmıştır. Böylece daha önce asal halkaların yukarıda bahsedilen özdeşliğini içeren (genelleştirilmiş) türevleri ile ilgili elde edilen birtakım sonuçlar asal halkaların skew türevlerine (σ-türevlerine) genişletilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar Czechoslovak Mathematical Journal dergisinde yayımlanacaktır (bkz. (Pehlivan and Albaş, 2020)).

Tezin dördüncü ve beşinci bölümülerinde asal halkaların türevleri ve genelleştirilmiş türevleri üzerine elde edilen bazı sonuçlar b-genelleştirilmiş türevlere genişletilerek halka ve b-genelleştirilmiş türevlerin yapısı hakkında birtakım sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca asal halkalar üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket eden b-genelleştirilmiş türevlerin yapıları karakterize edilmiştir. Tezin her bölümünde o bölümde ele alınacak problemlerle ilgili literatür özeti verilerek problemler sunulacaktır.

2 ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1. *(Hungerford, 1974) R ve S herhangi iki halka, $f : R \to S$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ ise f dönüşümüne bir halka* ***homomorfizması****, eğer $f(xy) = f(y)f(x)$ ise f dönüşümüne bir halka* ***ters-homomorfizması****, özel olarak $R = S$ alınırsa o zaman f dönüşümüne sırasıyla R halkasının bir* ***endomorfizması*** *ve* ***ters-endomorfizması*** *denir. Ayrıca $f : R \to S$ toplamsal dönüşümü aynı zamanda bire-bir ve örten bir dönüşüm ise f dönüşümüne bir halka* ***izomorfizması****, özel olarak $R = S$ alınırsa o zaman f dönüşümüne R halkasının bir* ***otomorfizması*** *denir.*

Tanım 2.2. *(Hungerford, 1974) R bir halka, M ve M' iki sağ (sol) R-modül olsun. $f : M \to M'$ toplamsal dönüşümü her $m \in M$ ve $r \in R$ için $f(mr) = f(m)r$ $(f(rm) = rf(m))$ oluyorsa o zaman f dönüşümüne bir* ***sağ (sol)*** *R-* ***modül homomorfizması*** *denir.*

Tanım 2.3. *(Hungerford, 1974) R bir halka, ${}_RM$ bir sol R-modül olsun. $RM \neq (0)$ ve M modülünün hiçbir öz alt modülü yoksa M ye* ***basit (indirgenemez) modül*** *denir. Özel olarak, R bir halka, $R^2 \neq (0)$ ve R halkasının iki yanlı hiçbir öz ideali yoksa o zaman R halkasına* ***basit halka*** *denir.*

Tanım 2.4. *R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $ma = 0$ olacak şekilde bir m pozitif tamsayısı varsa bu tür m sayılarının en küçüğüne* ***halkanın karakteristiği*** *denir ve $char(R) = m$ ile gösterilir. Eğer böyle bir en küçük pozitif m tamsayısı yoksa o zaman R halkasına sıfır karakteristikli halka denir.*

Tanım 2.5. *R bir halka olsun.*

$$Z(R) = \{x | \ x \in R \ ve \ \ her \ r \in R \ için \ rx = xr\}$$

kümesine R halkasının ***merkezi*** *denir. $Z(R)$, R halkasının bir alt halkasıdır.*

Tanım 2.6. *(Hungerford, 1974) R bir halka, M, bir sol R-modül ve S, M nin boştan farklı bir altkümesi olmak üzere*

$$Ann_l(S) = \{r | \ r \in R \ ve \ \ her \ s \in S \ için \ rs = 0\}$$

kümesine S altkümesinin ***sol sıfırlayanı*** *denir. Ayrıca B, ${}_RM$ modülünün bir alt modülü ise o zaman $Ann_l(B)$, R halkasının bir idealidir. Sağ sıfırlayan da benzer şekilde tanımlanır.*

Tanım 2.7. *R bir halka ve $e \in R$ olsun. Eğer $e^2 = e$ ise o zaman e ye* ***idempotent eleman*** *denir.*

Tanım 2.8. *(Rowen, 1988) R bir yarı asal halka ve $e \in R$ bir idempotent eleman olsun. $rank(e) = 1$ ise e ye* ***minimal idempotent*** *denir.*

Tanım 2.9. *(Hungerford, 1974) R bir halka ve M, bir sol R-modül olsun. $Ann_l(M) = (0)$ ise M ye* ***sol "faithful" modül*** *denir. Eğer R halkasının basit bir sol "faithful" R-modülü varsa o zaman R halkasına* ***primitif halka*** *denir. Birimli her basit halka primitiftir.*

Tanım 2.10. *(Hungerford, 1974) D bir bölümlü halka, V, bir D bölümlü halkası üzerinde sonlu boyutlu bir (sol) vektör uzayı ve R halkası $End({}_DV)$ endomorfizmalar halkasının bir alt halkası olsun. Bir n pozitif tamsayısı için V vektör uzayının herhangi bir altkümesi $\{v_1, ..., v_n\}$ olsun. Her n pozitif tamsayısı, V nin lineer bağımsız her $\{u_1, ..., u_n\}$ altkümesi için $\theta(u_i) = v_i$, $i = 1, ..., n$ olacak şekilde bir $\theta \in R$ varsa R halkasına V vektör uzayının* ***endomorfizmalarının bir yoğun alt halkası*** *denir.*

Teorem 2.1. *(Hungerford, 1974, Theorem 9.1.12) R bir primitif halka, M basit "faithful" bir R-modül olsun. Eğer M modülü $D = End_R(M)$ bölümlü halkası üzerinde bir vektör uzayı olarak düşünülürse o zaman R halkası D-vektör uzayı M nin endomorfizmalarının yoğun bir alt halkasına izomorftur.*

Teorem 2.2. *(Hungerford, 1974, Theorem 9.1.9) Bir D bölümlü halkası üzerindeki bir V sol (sağ) vektör uzayının endomorfizmalarının bir yoğun alt halkası R olsun. Bu durumda R bir sol (sağ) Artin halkasıdır ancak ve ancak dim_DV sonludur. Böylece $R = End({}_DV)$ olur.*

Teorem 2.3. *(Hungerford, 1974, Theorem 9.1.14) R bir Artin halka olsun. O zaman aşağıdaki şartlar denktir:*

(*i*) *R basit bir halkadır.*

(*ii*) *R bir primitif halkadır.*

(*iii*) *V, D bölümlü halkası üzerinde sonlu boyutlu sıfırdan farklı bir vektör uzayı olmak üzere $R \cong End({}_D V)$ dir.*

(*iv*) *D bölümlü bir halka ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere $R \cong M_n(D)$ dir.*

Tanım 2.11. *U bir R halkasının toplamsal bir alt grubu olsun. $[U, R] \subseteq U$ ise U ya R nin bir* ***Lie ideali*** *denir. $[U, U] \neq (0)$ ise U ya değişmeli olmayan Lie ideal denir.*

Uyarı 2.1. *$Z(R)$, bir R halkasının merkezi ve U, R nin bir Lie ideali olsun. Eğer $U \subset Z(R)$ ise U ya* ***merkezil Lie ideali*** *denir. U, $Z(R)$ de kapsanmıyorsa o zaman U ya* ***merkezil olmayan Lie ideal*** *denir.*

Yardımcı Özellik 2.1. *(Beidar et al., 1996) R bir asal halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $a \in Z(R)$ ve $ab \in Z(R)$ ise o zaman $a = 0$ veya $b \in Z(R)$ dir.*

Tanım 2.12. *R bir halka, P, R nin bir ideali olsun. $P \neq R$ olmak üzere R halkasının herhangi I ve J idealleri için $IJ \subseteq P$ iken $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ oluyorsa P idealine R halkasının bir* ***asal ideali*** *denir.*

Tanım 2.13. *R bir halka olmak üzere eğer $a, b \in R$ için $aRb = (0)$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R halkasına bir* ***asal halka*** *denir. Her primitif halka bir asal halkadır.*

Tanım 2.14. *R bir halka olsun. $a \in R$ elemanı için $aRa = (0)$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyorsa o zaman R halkasına bir* ***yarı asal halka*** *denir.*

Tanım 2.15. *(Rowen, 1980) R bir yarı asal halka, M bir basit "faithful" R-modül olsun. $x \in R$ için $rank(x) = 1$ ise Rx, R halkasının bir minimal sol idealidir.*

Tanım 2.16. *(Beidar et al., 1996) R bir halka olmak üzere, R halkasının tüm minimal sol ideallerinin toplamına R nin* ***sol "socle"*** *ı denir ve $Soc_l(R)$ ile gösterilir. Benzer şekilde sağ "socle" kavramı da tanımlanır. R halkasının sıfırdan farklı herhangi bir minimal sol ideali olmadığı zaman R halkasının "socle" ı sıfır olarak tanımlanır. Genel halde bir R halkasının sağ ve sol "socle" larının eşit olması gerekmez. Ancak R bir yarı asal halka ise $Soc_r(R) = Soc_l(R)$ olur ve kısaca $Soc(R)$ ile gösterilir. Ayrıca $Soc(R)$, R nin bir idealidir.*

Tanım 2.17. *(Beidar et al., 1996) R bir halka, M bir basit "faithful" R-modül olsun. $D = End_R(M)$ bölümlü halkası olmak üzere her $x \in R$ için xM, M nin bir D-alt vektör uzayıdır. $dim_D(xM)$ boyutuna x elemanının M-**rankı** denir ve $rank(x)$ ile gösterilir. Ayrıca her $x, y \in R$ için $rank(x+y) \leq rank(x)+rank(y)$, $rank(xy) \leq rank(x)$ ve $rank(xy) \leq rank(y)$ dir. Böylece R halkasının sonlu ranklı elemanlarının kümesi R halkasının bir idealidir. Eğer R yarı asal halka ise*

$$Soc(R) = \{r : r \in R \quad ve \; rank(r) < \infty\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.18. *(Beidar et al., 1996) R bir halka ve I R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. R halkasının sıfırdan farklı her J sağ ideali için $I \cap J \neq (0)$ ise I idealine R halkasının bir **''essential" sağ ideali** denir.*

Teorem 2.4. *(Beidar et al., 1996) R sıfırdan farklı "socle" a sahip bir primitif halka, V bir indirgenemez "faithful" R-modül ve $e \in R$, R halkasının minimal bir idempotent elemanı olsun. Eğer $\Delta = eRe$ ve $D = End_R(V_R)$ (ilişkili bölümlü halka) olarak alınırsa bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır:*

(i) Halka olarak Δ ile D izomorftur.

(ii) R nin sıfırdan farklı her sağ (sol) ideali bir minimal idempotent eleman içerir.

(iii) $Soc(R)$, $End(_DV)$ nin bir sağ idealidir.

(iv) $Soc(R)$, R halkasının tek minimal idealidir.

(v) $Soc(R)$, R halkasının her sağ (sol) "essential" idealinde kapsanır.

(v) $Soc(R)$ halkası basit bir halkadır.

Teorem 2.5. *(Jacobson, 1964, p.75) R bir halka olsun. R sıfırdan farklı "socle" a sahip primitif bir halkadır ancak ve ancak R, sıfırdan farklı sonlu ranklı lineer dönüşümleri içeren D bölümlü halkası üzerinde tanımlı bir V vektör uzayının lineer dönüşümlerinin oluşturduğu $End(_DV)$ halkasının yoğun bir alt halkasına izomorftur (Jacobson Teoremi).*

Tanım 2.19. *(Jacobson, 1964) V, D bölümlü halkası üzerinde tanımlı bir sağ vektör uzayı olsun. Her $v \in V$ ve $\lambda \in D$ için $T(v\lambda) = T(v)\tau(\lambda)$ olacak şekilde bir $\tau \in \mathrm{Aut(D)}$ otomorfizması varsa o zaman $T \in End(V)$ toplamsal dönüşümüne* ***yarı-lineer dönüşüm*** *denir.*

Teorem 2.6. *(Jacobson, 1964) R sıfırdan farklı "socle" a sahip bir primitif halka olsun. ${}_RV$ "faithful" indirgenemez bir sol R-modül olmak üzere, $D = End({}_RV)$ ve α, R nin bir otomorfizması olsun. O zaman her $r \in R$ için $\alpha(r) = TrT^{-1}$ olacak şekilde bir $T \in End({}_RV)$ yarı-lineer dönüşümü vardır.*

Önerme 2.1. *(Lam, 1991, Proposition 21.20) R herhangi bir halka, e ve f R halkasının idempotent elemanları olsun. O zaman aşağıdaki şartlar denktir:*

(*i*) *Sağ R-modül olarak eR ile fR izomorftur.*

(*ii*) *Sol R-modül olarak Re ile Rf izomorftur.*

(*iii*) *$e = ab$ ve $f = ba$ olacak şekilde $a \in eRf$ ve $b \in fRe$ elemanları vardır.*

(*iv*) *$e = ab$ ve $f = ba$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır.*

Eğer e ve f idempotentleri yukarıdaki koşullardan herhangi birini sağlarsa o zaman e ile f idempotentleri izomorftur.

Teorem 2.7. *(Lam, 1991, Theorem 4.23) R herhangi bir halka olmak üzere aşağıdaki şartlar denktir:*

(*i*) *Herhangi bir $a \in R$ elemanı için $a = axa$ olacak şekilde bir $x \in R$ elemanı vardır.*

(*ii*) *R nin her sol esas ideali bir idempotent eleman tarafından üretilir.*

(*iii*) *R nin her sol esas ideali ${}_RR$ nin bir direkt toplamıdır.*

(*iv*) *R nin her sonlu üretilmiş sol ideali bir idempotent eleman tarafından üretilir.*

(*v*) *R nin her sonlu üretilmiş sol ideali ${}_RR$ nin bir direkt toplamıdır.*

Tanım 2.20. *R bir halka ve K, R halkasının bir sağ ideali olsun. $0 \neq r' \in R$ olacak şekildeki her $r', r'' \in R$, $r'r \neq 0$ ve $r''r \in K$ olacak şekilde bir $r \in R$ varsa K idealine bir* ***yoğun sağ ideal*** *denir. R halkasının yoğun sağ ideallerinin kümesi $\mathcal{D}(R)$ ile gösterilir.*

Tanım 2.21. *(Beidar et al., 1996, p.51) R bir yarı asal halka ve $\mathcal{D}(R)$, R halkasının yoğun ideallerinin kümesi olsun.*
$\mathcal{H} = \{(f;K) | \; K \in \mathcal{D}(R) \text{ ve } f : K_R \to R_R \text{ bir sağ } R\text{-modül homomorfizması}\}$ *kümesi üzerinde bir $\sim$ bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlayalım:*

$(f;K),(g;J) \in \mathcal{H}$ *için,*

$$(f;K) \sim (g;J) \;\; :\Leftrightarrow \;\; L \subseteq K \cap J \text{ olacak şekilde bir } L \in \mathcal{D}(R) \text{ vardır ve } L \text{ üzerinde } f = g \text{ dir.}$$

Bu şekilde tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $[f;K]$ ile $(f;K) \in \mathcal{H}$ elemanının denklik sınıfını gösterelim. Denklik sınıflarının kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$[f;K] + [g;J] = [f+g; K \cap J]$$

$$[f;K][g;J] = [fg; g^{-1}(K)]$$

Bu şekilde tanımlanan işlemlerle $\mathcal{H}$ kümesinin elemanlarının denklik sınıflarının kümesi bir halka teşkil eder. Bu halkaya R nin ***maksimal sağ kesirler halkası (sağ Utumi kesirler halkası)*** *denir ve $Q_{mr} = Q_{mr}(R)$ ile gösterilir.*

Yardımcı Özellik 2.2. *(Beidar et al., 1996, Proposition 2.1.7) R bir yarı asal halka olsun. Q_{mr} halkası için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(i) R, Q_{mr} halkasının bir alt halkasıdır.

(ii) Her $q \in Q_{mr}$ için $qK \subseteq R$ olacak şekilde bir $K \in \mathcal{D}(R)$ vardır.

(iii) Her $q \in Q_{mr}$ ve $K \in \mathcal{D}(R)$ için $qK = (0)$ ise $q = 0$ dır.

(iv) Her $K \in \mathcal{D}(R)$, $f : K_R \to R_R$ sağ R-modül dönüşümü ve her $x \in K$ için $f(x) = qx$ olacak şekilde bir $q \in Q_{mr}(R)$ vardır.

Üstelik, $(i)-(iv)$ özellikleri izomorfizmaya bağlı olarak herhangi bir R yarı asal halkanın maksimal sağ kesirler halkasını karakterize eder.

Tanım 2.22. *R bir yarı asal halka olsun.*

$$\mathcal{I} = \{I | I, \; R \text{ nin bir ideali ve } Ann_l(I) = (0)\}$$

kümesi çarpım ve sonlu arakesit altında kapalıdır.

$$\mathcal{T} = \{(f;I) | I \in \mathcal{I},\ f : I_R \to R_R \text{ sağ } R\text{-modül homomorfizması}\}$$

kümesini ele alalım. $\mathcal{T}$ *kümesi üzerinde bir* $\simeq$ *bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlayalım:*

$$\begin{aligned}(f;I) \simeq (g;K) \quad :\Leftrightarrow \quad & L \subseteq I \cap K \text{ olacak şekilde bir } L \in \mathcal{I} \text{ vardır} \\ & \text{ve } L \text{ üzerinde } f = g \text{ dir.}\end{aligned}$$

Bu şekilde tanımlanan $\simeq$ *bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.* $\{f;J\}$ *ile* $(f;J) \in \mathcal{T}$ *elemanının denklik sınıfını gösterelim ve denklik sınıfları üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:*

$$\begin{aligned}\{f;I\} + \{g;K\} &= \{f+g;KI\} \\ \{f;I\}\{g;K\} &= \{fg;KI\}\end{aligned}$$

Bu işlemlerle birlikte $\mathcal{T}$ *nin elemanlarının denklik sınıflarının kümesi bir halka teşkil eder. Bu halkaya* R *nin* ***iki yanlı sağ (Martindale) kesirler halkası*** *denir ve* $Q = Q(R)$ *ile gösterilir.*

Yardımcı Özellik 2.3. *(Beidar et al., 1996, Proposition 2.2.1) İzomorfizmaya bağlı olarak herhangi bir* R *yarı asal halkanın maksimal sağ kesirler halkasının karakterizasyonu aşağıdaki özelliklerle verilir:*

(*i*) R, Q *halkasının bir alt halkasıdır.*

(*ii*) *Her* $q \in Q$ *için* $qI \subseteq R$ *olacak şekilde bir* $I \in \mathcal{I}$ *vardır.*

(*iii*) *Her* $q \in Q$ *ve* $I \in \mathcal{I}$ *için* $qI = (0)$ *ise* $q = 0$ *dır.*

(*iv*) *Her* $I \in \mathcal{I}$, $f : I_R \to R_R$ *sağ* R*-modül dönüşümü ve her* $x \in I$ *için* $f(x) = qx$ *olacak şekilde bir* $q \in Q(R)$ *vardır.*

Tanım 2.23. *(Beidar et al., 1996)* R *bir yarı asal halka ve* Q, R *halkasının iki yanlı sağ Martindale kesirler halkası olsun.* Q *nun*

$$Q_s = Q_s(R) = \{q \in Q_{mr}(R) : \text{bazı } J \in \mathcal{I} \text{ için } qJ \cup Jq \subseteq R\}$$

şeklinde tanımlanan alt halkasına R *halkasının bir* ***simetrik (Martindale) kesirler halkası*** *denir.*

Tanım 2.24. *(Beidar et al., 1996) R bir yarı asal halka olsun. Q halkasının merkezine R halkasının **genişletilmiş merkezi** denir ve C ile gösterilir. R halkası yarı asal ise*

$$C = Z(Q) = \{q \in Q_{mr} : her\ r \in R \quad için\ qr = rq\}$$

dir. R bir asal halka ise C bir cisim teşkil eder.

Tanım 2.25. *(Beidar et al., 1996) R bir yarı asal halka olsun. Q_{mr} nin R ve C ile üretilen bir C-alt cebrine R halkasının **merkezi kapanışı** denir ve RC ile gösterilir. $RC = R$ ise R halkasına **merkezi kapalıdır,** denir.*

R bir asal (yarı asal) halka ise RC, Q_{mr}, Q ve Q_s halkalarının da asal (yarı asal) halkalar olduğunu kaydedelim.

Yardımcı Özellik 2.4. *(Hvala, 1998, Lemma 2) R bir asal halka ve RC, R nin merkezi kapanışı olsun. Eğer $f : R \to RC$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ olmak üzere $f(xy) = f(x)y$ koşulunu sağlarsa o zaman her $x \in R$ için $f(x) = qx$ olacak şekilde bir $q \in Q(RC)$ elemanı vardır.*

Yardımcı Özellik 2.5. *(Beidar et al., 1996, Remark 2.3.1) Eğer $q \in Q(R)$ ve $q \in Z(R)$ ise $q \in C$ dir.*

Tanım 2.26. *(Martindale, 1969, Theorem 1) R bir asal halka olsun. $a, b \in RC$ ve her $x \in R$ için $axb = bxa$ oluyorsa a ve b, C-bağımlıdır.*

Yardımcı Özellik 2.6. *(Brešar, 1995, Lemma 1) $Q(R)$ halkasının hepsi birden sıfır olmayan $a_1, ..., a_n$ veya $b_1, ..., b_n$ elemanları için $\sum_{i=1}^{n} a_i x b_i = 0$ oluyorsa $a_1, ..., a_n$ ve $b_1, ..., b_n$ elemanları kendi aralarında C-bağımlıdır.*

Önerme 2.2. *(Brešar, 1995, Proposition 8) R, sağ Martindale kesirler halkası Q ve merkezi kapanışı RC olan bir asal halka olsun. $a_j, c_i \in R$ ve $f_j : R \to RC$, $h_i : R \to RC$ ile tanımlı herhangi iki dönüşüm olmak üzere her $x, z \in R$ için*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z) x a_j + \sum_{i=1}^{k} c_i z h_i(x) = 0$$

olsun. Eğer $\{a_1, ..., a_n\}$ ve $\{c_1, ..., c_k\}$ kümeleri C-bağımsız ise o zaman $i = 1, ..., k$, $j = 1, ..., n$ ve her $x, z \in R$ için

$$f_j(z) = -\sum_{i=1}^{k} c_i z q_{ij}, \quad h_i(x) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x a_j,$$

olacak şekilde $q_{ij} \in Q(RC)$ elemanları vardır.

Tanım 2.27. *(Jacobson, 1964) X herhangi bir sayılabilir bir küme ve $S\langle X\rangle$, X ile üretilen birimli serbest yarı grup olsun. K birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere $K\{X\}$, $S\langle X\rangle$ i baz kabul eden serbest bir K-modül olsun. $K\{X\}$ üzerindeki çarpma işlemini "yan yana koyma" olarak tanımlayalım. Bu durumda $K\{X\}$ bir K-cebir olur. Bu cebire X üzerindeki* ***serbest K-cebir*** *denir. $K\{X\}$ serbest cebirinin elemanları* ***polinom*** *olarak adlandırılır ve $f(x_1,...,x_n)$ şeklinde gösterilir. $K\{X\}$ in baz elemanlarına da* ***monomial*** *denir.*

Tanım 2.28. *(Rowen, 1980) K birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere $f \in K\{X\}$ olsun. $K\{x_1,...,x_n\}$ ise $f = f(x_1,...,x_n)$ şeklinde yazılır. A bir K-cebir olmak üzere her $a_1,...,a_n \in A$ için $f(a_1,...,a_n) = 0$ ise f ye A için bir* ***polinom özdeşliğidir (PI),*** *denir. Bu durumda A halkasına da* ***polinom özdeşliği halkası (PI-halka)*** *denir.*

Tanım 2.29. *(Rowen, 1980) S_n simetrik permütasyonlar grubu ve $sgn : S_n \to \{-1,1\}$ işaret fonksiyonu olmak üzere*

$$S_n(x_1,...,x_n) = \sum_{\pi\in S_n} sgn(\pi)X_{\pi_1}\cdots X_{\pi_n}$$

polinomuna n değişkenli ***standart polinom*** *denir.*

Tanım 2.30. *(Beidar et al., 1996) R bir yarı asal halka ve X değişmeli olmayan bilinmeyenlerin sayılabilir bir kümesi olsun. Burada X üzerindeki serbest C-cebir $C\{X\}$ olmak üzere $T = Q *_C C\{X\}$, C üzerinde bir serbest çarpım olsun. T kümesinin elemanlarına* ***genelleştirilmiş polinom*** *denir. Genelleştirilmiş polinomdaki $q_i \in Q$ ve $x_i \in X$ olmak üzere, $m = q_0x_1q_1x_2q_2...x_nq_n$ tipindeki elemanlara* ***monomial****, q_i elemanlarına da m monomialinin* ***katsayıları*** *denir. T kümesindeki her f elemanı, monomiallerin sonlu toplamı şeklindedir ve bu yazılış tek türlüdür. $f = f(x_1,...,x_n) \in T$ olmak üzere her $r_1,...,r_n \in R$ için $f(r_1,...,r_n) = 0$ ise f ye R için bir* ***genelleştirilmiş polinom özdeşliği*** *ve bu durumda R halkasına da bir* ***genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası (GPI-halka)*** *denir.*

Eğer $f \in T = Q *_C C\{X\}$ elemanı T nin sıfırı ise o zaman f aşikar genelleştirilmiş polinom özdeşlik, aksi halde aşikar olmayan genelleştirilmiş polinom özdeşlik olarak adlandırılır.

Teorem 2.8. *(Martindale, 1969, Theorem 3) R, genişletilmiş merkezi C ve merkezi kapanışı $S = RC$ olan bir asal halka olsun. O zaman S, C üzerinde bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği sağlar ancak ve ancak e, S nin bir idempotenti olmak üzere, S minimal bir eS sağ idealini içerir (dolayısıyla S primitiftir ve $Soc(S) \neq 0$ dır) ve eSe, C üzerinde sonlu boyutlu bir bölümlü cebirdir (Martindale Teoremi).*

Teorem 2.9. *(Chuang, 1988, Lemma 2) Q_{mr}, bir R asal halkasının Utumi kesirler halkası, C, R nin genişletilmiş merkezi ve B, Q_{mr} halkasının C üzerindeki bir bazı olsun. O zaman $\alpha_i \in C$, $q_i \in B$ ve $y \in \{x_1, ..., x_n\}$ için $m_i = q_0x_1q_1x_2q_2...q_n$ ler monomieller olmak üzere $T = U *_C C\{X\}$ serbest çarpımının herhangi bir elemanı $g = \sum_i \alpha_i m_i$ formundadır. Böylece $g = \sum_i \alpha_i m_i$ genelleştirilmiş polinomunun T serbest çarpımında sıfır olması için gerek ve yeter bir koşul her i için $\alpha_i = 0$ olmasıdır. Sonuç olarak $a_1, a_2 \in Q_{mr}$ elemanları C üzerinde lineer bağımsız ve $g_1, g_2 \in T$ için*

$$a_1g_1(x_1, ..., x_n) + a_2g_2(x_1, ..., x_n) = 0_T$$

ise o zaman $g_1(x_1, ..., x_n)$ ve $g_2(x_1, ..., x_n)$ genelleştirilmiş polinomları, T serbest çarpımında sıfırıdır.

Tanım 2.31. *R bir halka ve $d : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ise d ye R halkasının bir **türevi** denir. Ayrıca $a \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $d(x) = [a, x]$ ile tanımlı dönüşüm bir türev dönüşümüdür ve bu tip türevlere a ile belirli **iç türev** denir.*

Yardımcı Özellik 2.7. *(Posner, 1957, Lemma 1) R bir asal halka, d, R nin bir türevi ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ ise o zaman ya $a = 0$ dır ya da $d = 0$ dır.*

Tanım 2.32. *(Hvala, 1998) R bir halka ve $g : R \to R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ elemanları için $g(xy) = g(x)y + xd(y)$ olacak şekilde bir d türevi varsa g dönüşümüne d türeviyle belirlenen bir **genelleştirilmiş türev** denir. Eğer $a, c \in R$ için $g(x) = ax + xc$ formunda ise g ye **genelleştirilmiş iç türev** denir.*

Teorem 2.10. *(Albaş and Argaç, 2004, Theorem 3.1) R değişmeli olmayan bir asal halka, d R nin bir α türevi ile belirli R nin bir genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $d([x, y]) = 0$ ise o zaman $d = 0$ dır.*

Teorem 2.11. *(Albaş and Argaç, 2004, Theorem 3.2) R değişmeli olmayan bir asal halka, d R nin bir α türevi ile belirli R nin bir genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $d([x, y]) = [x, y]$ veya her $x, y \in R$ için $d([x, y]) = -[x, y]$ ise o zaman sırasıyla $d = I_{id}$ dır veya $d = -I_{id}$ dır.*

Teorem 2.12. *(Albaş and Argaç, 2004, Corollary 3.3) R değişmeli olmayan bir asal halka, d R nin bir α türevi ile belirli R nin bir genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $d(xy) = xy$ veya her $x, y \in R$ için $d(xy) = -xy$ ise o zaman sırasıyla $d = I_{id}$ dır veya $d = -I_{id}$ dır.*

Teorem 2.13. *(Lee, 1999, Theorem 4) R sol "faithful" bir halka ve $Q_{mr}(R)$, R nin Utumi kesirler halkası olsun. Bu durumda R nin herhangi bir J yoğun idealinden $Q_{mr}(R)$ içine her g genelleştirilmiş türevi $Q_{mr}(R)$ de bir genelleştirilmiş türeve tek türlü genişletilebilir. Ayrıca uygun bir $a \in Q_{mr}(R)$ ve $Q_{mr}(R)$ nin bir d türevi için $g(x) = ax + d(x)$ formundadır. Üstelik a elemanı ve d türevi g genelleştirilmiş türevi ile tek türlü belirlidir.*

Teorem 2.14. *(Chuang, 1993) R bir asal halka, I, R nin bir ideali ve Q, R halkasının sağ Martindale kesirler halkası olsun. O zaman I, R ve Q otomorfizmaları içeren aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.*

Teorem 2.15. *(Chuang, 1988, Theorem 1) R bir asal halka, Q, R halkasının sağ Martindale kesirler halkası ve I, R nin bir ideali olsun. Bu durumda I, R ve Q katsayıları Q da olan aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.*

Tanım 2.33. *(Chang, 2009) α ve β, R asal halkasının otomorfizmaları olsun. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)\alpha(y) + \beta(x)f(y)$ olacak şekildeki bir $f : R \to R$ toplamsal dönüşümüne R nin bir* ***(α, β)-türevi*** *denir. R halkası üzerindeki birim dönüşümünü I_R ile gösterelim. Eğer $\alpha = I_R$ ise o zaman her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + \beta(x)f(y)$ olacak şekilde bir $f : R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasının bir* ***β-türevi*** *denir. Genel olarak bu tip türevler* ***skew türev*** *olarak da adlandırılır.*

Tanım 2.34. *(Chang, 2009) β, R halkasının bir otomorfizması olsun. f, R nin bir β-türevi olmak üzere sabit bir $c \in R$ ve her $x \in R$ için $f(x) = cx - \beta(x)c$ ile tanımlı f ye c ile belirlenen bir* ***iç β- türev*** *denir. Ayrıca, $g : R \to R$ dönüşümü R halkasının f ile belirlenen bir genelleştirilmiş β-türevi olmak üzere* *eğer uygun $b, c \in R$ elemanları için $g(x) = bx - \beta(x)c$ formunda ise o zaman g ye bir **genelleştirilmiş iç β-türev** denir.*

Teorem 2.16. *(Chuang and Lee, 2005) R bir asal halka ve I, R nin bir ideali olsun. O zaman I, R ve Q, Q üzerinde α-türevli aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağlar.*

Tanım 2.35. *(Chang, 2009) R bir asal halka ve Q, R halkasının simetrik kesirler halkası olsun. β, R halkasının bir otomorfizması olmak üzere, δ, Q halkasının bir β-türevi olsun. Her $x \in Q$ için*

$$\delta(x) = cx - \beta(x)c$$

*olacak şekilde uygun bir $c \in Q$ varsa o zaman δ ya **X-iç β-türev** aksi halde **X-dış β-türev** denir.*

Yardımcı Özellik 2.8. *(Kharchenko and Popov, 1992, Lemma 1) R bir asal halka, β, R nin bir otomorfizması olmak üzere g, R halkasının bir β-türevi olsun. O zaman β otomorfizması ve g, β-türevi, Q ve $Q_{mr}(R)$ halkalarına tek türlü genişletilebilir.*

Tanım 2.36. *(Chang, 2009) α ve β, R asal halkasının otomorfizmaları ve $f : R \to R$ bir (α, β)-türev olsun. $g : R \to R$ dönüşümü her $x, y \in R$ için*

$$g(xy) = g(x)\alpha(y) + \beta(x)f(y)$$

*ise g dönüşümüne, f ile belirli bir **genelleştirilmiş (α, β)-türev** denir. Eğer $\alpha = I_R$ birim otomorfizması olursa, o zaman g ye f ile belirli bir **genelleştirilmiş β- türev** denir. Genel olarak bu tip türevler **genelleştirilmiş skew türev** olarak da adlandırılır.*

Tanım 2.37. *(Kharchenko and Popov, 1992) R bir asal halka ve Q, R halkasının simetrik kesirler halkası olsun. α, R nin bir otomorfizması olmak üzere her $x \in Q$ için $\alpha(x) = gxg^{-1}$ olacak şekilde tersinir bir $g \in Q$ var ise o zaman α ya **X-iç otomorfizma**, aksi halde ise bir **X-dış otomorfizma** denir.*

Tanım 2.38. *(Koşan and Lee, 2014) R bir halka ve $Q_{mr}(R)$, R halkasının maksimal sağ kesirler halkası olsun. $d : R \to Q_{mr}$ bir toplamsal dönüşüm ve*

$b \in Q_{mr}(R)$ olmak üzere, her $x, y \in R$ için $\delta(xy) = \delta(x)y + bxd(y)$ olacak şekilde bir $\delta : R \to Q_{mr}(R)$ toplamsal dönüşümü varsa, δ'ya d ile belirli bir ***sol** b**-genelleştirilmiş türev*** *denir.*

$\delta(xy) = x\delta(y) + d(x)yb$ olacak şekilde bir $\delta : R \to Q_{mr}(R)$ toplamsal dönüşümü varsa, δ ya d ile belirli bir ***sağ** b**-genelleştirilmiş türev*** *denir.*

Her genelleştirilmiş türev 1-genelleştirilmiş türevdir. Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi bu durumun tersi her zaman geçerli değildir.

Örnek 2.1. *R bir halka ve Q, R nin sol Martindale kesirler halkası olsun. F, R nin bir d türevi ile belirli bir genelleştirilmiş türevi ve $b \in Q$ olmak üzere her $x \in R$ için $g(x) = bF(x)$ olarak tanımlanan $g : R \to Q$ dönüşümü bir b-genelleştirilmiş türevdir, fakat bir genelleştirilmiş türev değildir.*

Teorem 2.17. *(Koşan and Lee, 2014) R bir asal halka, $Q_{mr}(R)$, R halkasının maksimal sağ kesirler halkası, $d : R \to Q_{mr}$ bir toplamsal dönüşüm ve $b \in Q_{mr}(R)$ olsun. $\delta : R \to Q_{mr}(R)$, R halkasının d ile belirli bir sol b-genelleştirilmiş türevi olmak üzere eğer $b \neq 0$ ise o zaman $d : R \to Q_{mr}(R)$ toplamsal dönüşümü bir türev dönüşümüdür.*

Tanım 2.39. *(Chuang, 1993) R bir asal halka ve C, R halkasının genişletilmiş merkezi ve α, R nin bir otomorfizması olsun. n sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere, her $\lambda \in C$ için*

$$char(R) = 0 \quad ise \quad \alpha(\lambda) = \lambda$$
$$char(R) = p \geq 2 \quad ise \quad \alpha(\lambda) = \lambda^{p^n}$$

olarak tanımlanan α dönüşümüne bir ***Frobenius otomorfizma*** *denir.*

Teorem 2.18. *(Kharčenko, 1975, p.140) R bir asal genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası, C, R nin genişletilmiş merkezi ve α, R nin bir otomorfizması olsun. Her $\lambda \in C$ için $\alpha(\lambda) = \lambda$ ise o zaman α bir X-iç otomorfizmadır.*

Teorem 2.19. *(Chuang, 1993, Theorem 2) R bir asal halka ve α, R nin bir otomorfizması olsun. Eğer α, R nin bir Frobenius otomorfizması değil ise o zaman x_i, y_i ler farklı değişkenler olmak üzere*

$$\theta(x_1, ..., x_n, \alpha(x_1), ..., \alpha(x_n)) = 0$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliği R nin

$$\theta(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = 0$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini verir.

Teorem 2.20. *(Chuang, 1992, Theorem 3) R bir asal halka, α, R nin bir X-dış otomorfizması olsun. Eğer, x_i, y_i ler farklı değişkenler olmak üzere R halkası*

$$\theta(x_1, ..., x_n, \alpha(x_1), ..., \alpha(x_n))$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlıyor ise o zaman

$$\theta(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$$

özdeşliği de R halkası için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Bu durumda R bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkasıdır.

Teorem 2.21. *(Chuang and Lee, 2005, Theorem 1) R bir asal halka ve α, R nin bir X-dış otomorfizması olsun. g, R halkasının bir X-dış α-türevi ve $\theta(x_i, y_i, z_i)$, farklı x_i, y_i, z_i değişkenleri üzerinde bir genelleştirilmiş polinom olmak üzere her $x_i \in R$ için $\theta(x_i, g(x_i), \alpha(x_i)) = 0$ ise o zaman her $x_i, y_i, z_i \in R$ için $\theta(x_i, y_i, z_i) = 0$ dır.*

Teorem 2.22. *(Chuang and Lee, 2005, Theorem 1) R bir asal halka, σ, R nin bir otomorfizması ve g, R halkasının bir X-dış α- türevi olsun. x_i, y_i ler farklı değişkenler ve R halkası $\theta(x_i, g(x_i))$ genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlıyorsa o zaman R halkası $\theta(x_i, y_i) = 0$ genelleştirilmiş polinom özdeşliğini de sağlar.*

Teorem 2.23. *(Shiue, 2003, Theorem 1) R değişmeli olmayan bir asal halka, λ, R nin sıfırdan farklı bir sol ideal, k ve n sabit pozitif tamsayılar, D, R nin sıfırdan farklı bir türevi ve $0 \neq a \in R$ olsun. Her $u \in \lambda$ için $a[D(u^k), u^k]_n = 0$ ise o zaman $\lambda b = 0$ ve $ab = 0$ olacak şekildeki uygun bir $b \in Q$ için $D = ad(b)$ dir.*

Teorem 2.24. *(Lanski, 2014, Theorem 1) R değişmeli olmayan bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali, δ, R nin bir skew türevi ve*

$n, m = k_0, k_1, ..., k_n$ pozitif tamsayılar olsun. Herhangi $x, y_j \in R$ elemanları için $E_1(x, y_1) = [x, y_1] = xy_1 - y_1x$ ve $n \geq 1$ için

$$E_{n+1}(x, y_1, ..., y_{n+1}) = E_1(E_n(x, y_1, ..., y_n, y_{n+1})) = E_n(E_1(x, y_1), y_2, ..., y_{n+1})$$

şeklinde tanımlayalım. $E_n(\delta(x^m), x^{k_1}, ..., x^{k_n})$, I için bir özdeşlik ise o zaman $\delta = 0$ dır.

Yardımcı Özellik 2.9. *(Hungerford, 1974, p.415) D bir bölümlü halka olmak üzere, D üzerindeki n boyutlu bir V vektör uzayının lineer dönüşümlerinin oluşturduğu $End(_DV)$ halkası, bir bölümlü halka üzerindeki $n \times n$ tipindeki matrisler halkasına izomorftur.*

Teorem 2.25. *(Erickson et al., 1975, Theorem 3.5) A, Φ üzerinde merkezi kapalı bir asal cebir ve F, Φ nin bir cisim genişlemesi olsun. Bu durumda $A \otimes_\Phi F$, F üzerinde merkezi kapalı asal bir cebirdir.*

Tanım 2.40. *R bir halka olsun. Herhangi $x, y \in R$ için $[x, y]_0 = x$, $[x, y]_1 = [x, y] = xy - yx$ ve her $k > 1$ için x ve y elemanlarının k-ıncı komütatörü $[x, y]_k = [[x, y]_{k-1}, y]$ dir. Her $x, y \in R$ değişmeli olmayan belirsizleri için $[x, y]_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}y^ixy^{k-i}$ polinomuna* ***Engel Koşulu*** *denir. Eğer her $x, y \in R$ için $[x, y]_k = 0$ olacak şekilde bir pozitif k elemanı varsa, R halkasına Engel koşulunu sağlar denir.*

Teorem 2.26. *(Chuang and Liu, 2007, Theorem 2.8) A sıfırdan farklı "socle" a sahip bir primitif halka ve M bir "faithful" basit sağ A-modül olsun. O zaman her $\delta : A \to End(_DM)$ tanımlı δ σ-türevi M-iç türevdir.*

Yardımcı Özellik 2.10. *(Albaş and Argaç, 2004, Lemma 2.1) R bir asal halka, d R halkasının bir türevi olsun. Eğer $d(R) \subseteq Z(R)$ ise o zaman ya R halkası değişmelidir ya da $d = 0$ dır.*

Tanım 2.41. *(Beidar et al., 1996) R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve d, R nin sıfırdan farklı bir türevi olsun. $f \in Q *_C C\{X\}$ olmak üzere her $r_1, r_2, ..., r_n \in I$ için $f(r_1, ..., r_n, d(r_1), ..., d(r_n)) = 0$ ise $f(x_1, ..., x_n, d(x_1), ..., d(x_n))$ ifadesine I da bir* ***diferansiyel özdeşlik*** *denir.*

Teorem 2.27. *(Lee, 1992, Theorem 2) U, R asal halkasının Utumi kesirler halkası ve I_R, U_R nin yoğun bir R-altmodülü olsun. O zaman I ve U aynı diferansiyel özdeşliği sağlar.*

Teorem 2.28. *(Chuang, 1992, Main Theorem) R bir asal halka olmak üzere R nin otomorfizma ve ters-otomorfizma içeren aşikar olmayan bir diferansiyel özdeşliği sağladığını kabul edelim. O zaman R halkası, otomorfizma ve ters-otomorfizma içermeyen aşikar olmayan genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.*

3 ASAL HALKALAR ÜZERİNDE ENGEL KOŞULUNU SAĞLAYAN SKEW TÜREVLERİN SIFIRLAYANLARI

Bu bölümde asal halkalar üzerinde Engel koşulunu sağlayan skew türevlerin sıfırlayanlarını ihtiva eden belirli bir özdeşlik incelenecektir.

İkinci bölümde verdiğimiz aşağıdaki tanımı bütünlük olması adına tekrar verelim. Herhangi $x, y \in R$ için $[x, y]_0 = x$, $[x, y]_1 = [x, y] = xy - yx$ ve her $k > 1$ için x ve y elemanlarının k ıncı komütatörü $[x, y]_k = [[x, y]_{k-1}, y]$ olarak tanımlanır. Her $x, y \in R$ değişmeli olmayan belirsizleri için $[x, y]_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}y^ixy^{k-i}$ polinomuna "Engel Koşulu" denir. Eğer her $x, y \in R$ için $[x, y]_k = 0$ olacak şekilde bir pozitif k tamsayısı varsa, R halkasına Engel koşulunu sağlar denir.

Bu bölümde incelenilecek olan problem için motivasyon teşkil eden bazı çalışmalardan söz edelim:

(Posner, 1957), sıfırdan farklı bir d türevine sahip bir asal R halkasının her $x \in R$ için $[d(x), x] \in Z(R)$ özdeşliğini sağlaması durumunda R halkasının değişmeli olması gerektiğini göstermiştir. Daha sonra, (Lanski, 1997) bu sonucu bir asal halkanın sıfırdan farklı bir sol idealine genişletmiştir. (De Filippis, 2000), benzer bir problemi karakteristiği ikiden farklı olan bir R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi d olmak üzere, R nin merkezil olmayan bir Lie ideali üzerinde sıfırlayan koşulunu ekleyerek ele almıştır. Daha açık bir ifadeyle De Filippis çalışmasında $a \in R$ olmak üzere R halkası, her $u \in L$ için $a[d(u), u] = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $d : R \to R$ türevine sahip bir asal halka ise $a = 0$ olması gerektiğini göstermiştir. Daha sonra (Chou and Liu, 2016), (De Filippis, 2000) in sonucunu bir R asal halkasının sıfırdan farklı bir skew türevine genişletmişlerdir. Aslında bu çalışmalarında (Chou and Liu, 2016), R asal halkasının bir Lie ideali L, k sabit pozitif bir tamsayı ve $a \in R$ olmak üzere her $x \in L$ için $a[\delta(x), x]_k = 0$ olacak şekilde R nin sıfırdan farklı bir $\delta : R \to R$ skew türevi varsa o zaman char$R = 2$ ve $R \subseteq M_2(F)$ olmadıkça $a = 0$ olduğunu göstermişlerdir.

Bu bölümde (Chou and Liu, 2016) nun yukarıda bahsedilen skew türevler ile ilgili sonucuna kuvvet değişmelilik (power commuting) koşulu eklenerek bir

R asal halkasının bir skew türevine genişletilmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda asıl amacımız aşağıdaki teoremi ispatlamaktır.

Teorem 3.1. *R değişmeli olmayan ve karakteristiği 2 den farklı bir asal halka, $a \in R$, k ve n sabit pozitif tamsayılar olsun. Her $x \in R$ için $a[\delta(x^n), x^n]_k = 0$ olacak şekilde R nin sıfırdan farklı bir δ skew türevi (σ-türevi) varsa o zaman $a = 0$ dır.*

Teorem 3.1 in ispatına başlamadan önce bu teoremin ispatında çoğunlukla ihtiyaç duyulacak olan bazı yardımcı özellikleri ispatlayalım. Aşağıdaki Yardımcı Özelliğin ispatı (Chou and Liu, 2016, Lemma 2.1) in ispatına çok benzerdir. Bütünlük açısından ispat aşağıda verilmiştir.

Yardımcı Özellik 3.1. *F bir cisim, V_F, F üzerindeki bir vektör uzayı ve $End(V_F)$, V_F üzerindeki F-lineer dönüşümlerin halkası olsun. $dimV_F \geq 3$ olmak üzere R, $End(V_F)$ nin sıfırdan farklı sonlu ranklı lineer dönüşümleri içeren yoğun bir alt halkası ve σ R nin bir otomorfizması olsun. Eğer $a \in R$ ve n, k sabit pozitif tamsayılar olmak üzere R halkası, her $x \in R$ için*

$$a[\delta(x^n), x^n]_k = 0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\delta : R \to R$ skew türevine ($\sigma-$türevine) sahip ise o zaman $a = 0$ dır.

İspat. R, $\mathrm{End}(V_F)$ nin sıfırdan farklı sonlu ranklı lineer dönüşümlerini içeren yoğun bir alt halkası olduğundan Teorem 2.6 gereğince her $x \in R$ için $\sigma(x) = TxT^{-1}$ olacak şekilde bir $T \in \mathrm{End}(V)$ tersinir yarı-lineer dönüşümü vardır. Bu durumda Tanım 2.19 uyarınca her $v \in V$, $\alpha \in F$ ve τ, F nin bir otomorfizması olmak üzere $T(v\alpha) = (Tv)\tau(\alpha)$ dir. Ayrıca Teorem 2.26 dan her $x \in R$ için $\delta(x) = \sigma(x)S - Sx$ olacak şekilde bir $S \in \mathrm{End}(V)$ vardır. Böylece her $x \in R$ için $\delta(x) = \sigma(x)S - Sx = TxT^{-1}S - Sx$ olduğu kolayca görülür. Son elde edilen bağıntıyı hipotezde yerine yazarak, her $x \in R$ için $0 = a[\delta(x^n), x^n]_k = a[Tx^nT^{-1}S - Sx^n, x^n]_k$ olduğu görülür. Ayrıca, bu bağıntıda Engel koşulun tanımını kullanarak

$$0 = a\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(x^n)^i(Tx^nT^{-1}S - Sx^n)(x^n)^{k-i} \tag{3.1}$$

bulunur. Burada v_0 ve $T^{-1}Sv_0$ elemanları F-bağımsız olacak şekilde bir $v_0 \in V$ elemanının var olduğunu iddia ediyoruz. Aksi halde her $v \in V$ için v ve $T^{-1}Sv$ elemanları F-bağımlı olur. Şimdi her $v \in V$ için $T^{-1}Sv = v\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda \in F$ elemanının var olduğunu gösterelim. Bunun için sıfırdan farklı $u, v \in V$ vektörlerini alalım. O zaman $T^{-1}Sv = v\lambda_v$, $T^{-1}Su = u\lambda_u$ ve $T^{-1}S(u+v) = (u+v)\lambda_{(u+v)}$ olacak şekilde $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_{(u+v)} \in F$ elemanları vardır. Bu bağıntılardan hareketle

$$0 = u(\lambda_{(u+v)} - \lambda_u) + v(\lambda_{(u+v)} - \lambda_v)$$

olur. Eğer u ile v lineer bağımsız ise $\lambda_u = \lambda_v = \lambda_{(u+v)}$ elde edilir. Aksi durumda, $\dim V_F \geq 3$ olduğundan $\{u, w\}$ ve $\{v, w\}$ kümelerinin her ikisi de lineer bağımsız olacak şekilde bir $w \in V$ vardır. Bu durumda da yukarıdaki muhakemenin çok benzeri ile $\lambda_u = \lambda_v = \lambda_w$ elde edilir. Böylece $\lambda_v = \lambda \in F$ elemanı $v \in V$ vektörünün seçilişinden bağımsızdır. Kısacası her $v \in V$ için $T^{-1}Sv = v\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda \in F$ vardır. Bu durumda her $x \in R$ ve her $v \in V$ olmak üzere $\delta(x)v = (TxT^{-1}S - Sx)v$ olur. Bu bağıntının sağ tarafı dönüşümlerin toplam tanımına ve bileşke tanımına uygun olarak açıldığında $\delta(x)v = (TxT^{-1}S - Sx)v = T(xT^{-1}Sv) - Sxv$ bulunur. Diğer taraftan, $x \in R$ elemanı da aynı zamanda bir sol vektör uzayı endomorfizması olduğundan $xv \in V$ dir. O zaman her $v \in V$ için $T^{-1}Sv = v\lambda$ sağlandığından $xv \in V$ için de $T^{-1}S(xv) = (xv)\lambda$ olur. Ayrıca $x \in R$ elemanı da aynı zamanda bir sol vektör uzayı endomorfizması olduğundan $x(T^{-1}Sv) = (xv)\lambda$ bağıntısı kolayca elde edilir. O zaman, her $x \in R$ için

$$\begin{aligned}
\delta(x)v &= (TxT^{-1}S - Sx)v \\
&= T(xT^{-1}Sv) - (Sx)v \\
&= T((xv)\lambda) - Sxv \\
&= T(T^{-1}S(xv)) - Sxv \\
&= Sxv - Sxv \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece her $x \in R$ için $\delta(x)V = 0$ dır ve V "faithful" olduğundan $\delta = 0$ çelişkisi elde edilir. Böylece iddiamızın aksi durumu bir çelişki verdiğinden, v_0 ve $T^{-1}Sv_0$ elemanları F-bağımsız olacak şekilde en az bir $v_0 \in V$ elemanı vardır. Şimdi (3.1) bağıntısından hareketle her $x \in R$ için,

$$0 = a\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(x^n)^i(Tx^nT^{-1}S - Sx^n)(x^n)^{k-i}v_0 \qquad (3.2)$$

özdeşliğini ele alalım ve ispatı Sv_0 elemanın seçilişine bağlı olarak bazı alt durumlara ayıralım:

Durum 1 İlk olarak, Sv_0 elemanının v_0 ve $T^{-1}Sv_0$ vektörleri ile gerilen bir uzaya ait olmadığı durumu ele alalım. Böylece $Sv_0 \notin v_0F + (T^{-1}Sv_0)F$ olur. Şimdi $v_0, T^{-1}Sv_0$ ve w elemanları F-bağımsız olacak şekilde bir $w \in V$ vektörü seçelim. Bu durumda $\gamma, \alpha, \beta \in F$ olmak üzere

$$Sv_0 = v_0\alpha + (T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma \qquad (3.3)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\gamma \neq 0$ dır. Çünkü $\gamma = 0$ olursa bu $Sv_0 \in v_0F + (T^{-1}Sv_0)F$ olmasını verir ancak bu durum kabulümüzle çelişir. İspatın geri kalan kısmı için V vektör uzayının F cismi üzerindeki boyutuna bağlı olarak

$$\dim V_F = 3 \quad \text{ise} \quad u = 0,$$

ve

$$\dim V_F \geq 4 \quad \text{ise} \quad u \notin v_0F + (T^{-1}Sv_0)F + wF,$$

olacak şekilde bir $u \in V$ elemanı seçelim. R nin yoğunluğundan

$$xv_0 = 0, \quad xT^{-1}Sv_0 = T^{-1}Sv_0, \quad xw = w, \quad xu = 0 \qquad (3.4)$$

olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. Bu seçilişler (3.2) bağıntısında kullanıldığında, $xv_0 = 0$ olduğundan $i = k$ iken toplam aşikar olarak sıfır olacaktır. Bu sebeple sadece $i \neq k$ olduğu duruma bakılır. Böylece

$$\begin{aligned}
0 &= a\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(x^n)^i(Tx^nT^{-1}S - Sx^n)(x^n)^{k-i}v_0 \\
&= a(-1)^k(x^n)^k(Tx^nT^{-1}S - Sx^n)v_0 \\
&= a(-1)^k(x^n)^kTx^nT^{-1}Sv_0
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, yukarıdaki seçilişlerden hareketle ve birleşme özelliğinden

$$\begin{aligned}
x^nT^{-1}Sv_0 &= x^{n-1}(xT^{-1}Sv_0) \\
&= x^{n-1}(T^{-1}Sv_0) \\
&= x(T^{-1}Sv_0) \\
&= T^{-1}Sv_0
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece $x^nT^{-1}Sv_0 = T^{-1}Sv_0$ bulunur. Bu sonucu yukarıdaki son bağıntıda kullanarak ve $xv_0 = 0$ gerçeğini göz önüne alarak

$$\begin{aligned}
0 &= a\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(x^n)^i(Tx^nT^{-1}S - Sx^n)(x^n)^{k-i}v_0\\
&= a(-1)^k(x^n)^k(Tx^nT^{-1}S - Sx^n)v_0\\
&= a(-1)^k(x^n)^kTx^nT^{-1}Sv_0\\
&= a(-1)^k(x^n)^kSv_0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bağıntıda $Sv_0 = v_0\alpha + (T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma$ olduğunu ve yukarıdaki seçilişleri tekrar özdeşlikte yerine yazarak

$$\begin{aligned}
0 &= (-1)^k(x^n)^k(v_0\alpha + (T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma)\\
&= (-1)^ka((T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$0 = (-1)^ka((T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma) \tag{3.5}$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca (3.3) den $Sv_0 = v_0\alpha + (T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma = v_0\alpha + (T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma + v_0\gamma - v_0\gamma = v_0(\alpha - \gamma) + (T^{-1}Sv_0)\beta + (w + v_0)\gamma$ olduğu kolaylıkla görülür. Diğer taraftan, $w + v_0$ vektörü de $v_0, T^{-1}Sv_0$ ve u vektörleriyle F-bağımsız olduğundan (3.2), (3.4) ve (3.5) özdeşliklerinde w yerine $w + v_0$ alarak ve benzer işlemler yapılırsa

$$0 = (-1)^ka((T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma + v_0\gamma) \tag{3.6}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.5) ve (3.6) birlikte düşünüldüğünde $(-1)^kav_0\gamma = 0$ sonucuna varılır. Son bağıntıda $\gamma \neq 0$ olduğu kullanılarak

$$av_0 = 0 \tag{3.7}$$

olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan, (3.3) den $Sv_0 = v_0\alpha + (T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma + u\gamma - u\gamma = v_0\alpha + (T^{-1}Sv_0)\beta + (w + u)\gamma - u\gamma$ elde edilir. Burada $w + u$ vektörü de $v_0, T^{-1}Sv_0$ ve u vektörleriyle F-bağımsız olduğundan (3.2), (3.4) ve (3.5) bağıntılarında w yerine $w + u$ alarak ve benzer işlemleri yaparak

$$0 = (-1)^ka(T^{-1}Sv_0\beta + w\gamma + u\gamma) \tag{3.8}$$

elde edilir. Ayrıca (3.5) ve (3.8) karşılaştırıldığında $(-1)^k au\gamma = 0$ bulunur. Buradan $\gamma \neq 0$ olduğu göz önüne alındığında

$$\text{her} \quad u \notin v_0F + (T^{-1}Sv_0)F + wF \qquad \text{elemanı için} \quad au = 0 \tag{3.9}$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi $\dim V_F \geq 4$ olmak üzere $v_0, T^{-1}Sv_0$ ve w vektörleri ile gerilen bir uzaya ait olmayan bir $u_0 \in V$ elemanı seçelim. Daha açık bir ifadeyle; $u_0 \notin v_0F+(T^{-1}Sv_0)F+wF$ olacak şekilde bir $u_0 \in V$ elemanı seçelim. Bu durumda, $u_0 \notin v_0F+(T^{-1}Sv_0)F+wF$ olduğundan $u_0+T^{-1}Sv_0 \notin v_0F+(T^{-1}Sv_0)F+wF$ ve $u_0 + w \notin v_0F + (T^{-1}Sv_0)F + wF$ bağıntıları da kolayca görülür. Ek olarak (3.9) bağıntısından $v_0F + (T^{-1}Sv_0)F + wF$ uzayına ait olmayan her $u \in V$ vektörü için $au = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu sebeple $\dim V_F \geq 4$ durumunda elde edilen bağıntılarla (3.9) u birlikte kullanarak $au_0 = 0$, $a(u_0 + T^{-1}Sv_0) = 0$ ve $a(u_0 + w) = 0$ eşitlikleri elde edilir. Böylece son elde edilen bağıntılar birlikte düşünüldüğünde $au_0 + aT^{-1}Sv_0 = 0$ ve $au_0 + aw = 0$ elde edilir. Son elde edilen bağıntılarda $au_0 = 0$ olduğunu kullanarak $aT^{-1}Sv_0 = 0$ ve $aw = 0$ kolayca bulunur. Ayrıca (3.7) bağıntısında $av_0 = 0$ olduğu gösterildiğinden, sonuç olarak, $\dim V_F \geq 4$ olduğu durumda $v_0, T^{-1}Sv_0, w \in V$ vektörleri ve herhangi bir $u \notin (v_0)F + (T^{-1}Sv_0)F + wF$ olacak şekildeki bir $u \in V$ vektörü için $av_0 = 0$, $aT^{-1}Sv_0 = 0$, $aw = 0$ ve $au = 0$ bağıntıları elde edilir.

Eğer $\dim V_F = 4$ alınırsa o zaman $v_0, T^{-1}Sv_0, w, u \in V$ lineer bağımsız vektörler olduklarından her $v \in V$ için $v = v_0\lambda_1+(T^{-1}Sv_0)\lambda_2+w\lambda_3+u\lambda_4$ olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in F$ bulanabileceğinden $av = a(v_0\lambda_1+(T^{-1}Sv_0)\lambda_2+w\lambda_3+u\lambda_4) = 0$ bulunur. Bu ise $aV = 0$ olmasını gerektirir. Böylece V vektör uzayının R üzerindeki hareketi "faithful" olduğundan istenilen sonuç olan $a = 0$ elde edilir. Diğer taraftan, eğer $\dim V_F > 4$ olursa o zaman, $u' \notin v_0F+(T^{-1}Sv_0)F+wF+uF$ olacak şekilde herhangi bir $u' \in V$ vektörü seçilip, yukarıdaki benzer işlemler sonucunda $a = 0$ bulunur ve böylece ispat biter.

İspatın geri kalan kısmında $\dim V_F = 3$ olduğu durumu ele alalım. Böylece $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesi V vektör uzayının F cismi üzerindeki bir bazını teşkil eder. Ayrıca daha önce belirtildiği üzere $Sv_0 \notin v_0F + (T^{-1}Sv_0)F$ iken Sv_0 elemanının $Sv_0 = v_0\alpha + (T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in F$ ve $0 \neq \gamma \in F$ var olduğu gösterildi. Şimdi ispatı β elemanının durumuna göre $\beta = 0$ veya $\beta \neq 0$ olarak iki durumda incelemeye devam edelim.

İlk olarak $\beta = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $Sv_0 = v_0\alpha + w\gamma$ olur. Diğer taraftan, $\beta = 0$ kabulünden (3.5) bağıntısı kullanılarak $0 = (-1)^k a((T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma) = (-1)^k aw\gamma$ bağıntısına indirgenir ve $\gamma \neq 0$ olduğu gerçeği bizi $aw = 0$ sonucuna ulaştırır. $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesi V nin bir bazı ve $Tv_0 \in V$ olduğundan germe aksiyomu gereğince

$$Tv_0 = v_0\alpha^* + (T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^* \tag{3.10}$$

olacak şekilde $\alpha^*, \beta^*, \gamma^* \in F$ elemanları vardır. Bu ifadede bulunan $\beta^* \in F$ elemanının durumuna göre incelememize devam edelim.

Alt durum 1.1 (3.10) da $\beta^* \neq 0$ olsun. $S, T \in \mathrm{End}(V)$ olduğundan $S + T \in \mathrm{End}(V)$ olur ve bu elemana S' diyelim, yani $S+T = S'$ olsun. Bu durumda $Sv_0 = v_0\alpha + w\gamma$ ve $Tv_0 = v_0\alpha^* + (T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*$ olduğundan, $S'v_0$ elemanı $S'v_0 = (S+T)v_0 = Sv_0 + Tv_0 = v_0(\alpha + \alpha^*) + (T^{-1}Sv_0)\beta^* + w(\gamma + \gamma^*)$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca, $T^{-1}S'v_0\beta^* = T^{-1}(S+T)v_0\beta^* = T^{-1}Sv_0\beta^* + v_0\beta^*$ olduğundan $T^{-1}Sv_0\beta^* = T^{-1}S'v_0\beta^* - v_0\beta^*$ bulunur. Son iki bağıntı birlikte düşünüldüğünde $S'v_0 = v_0(\alpha + \alpha^* - \beta^*) + (T^{-1}S'v_0)\beta^* + w(\gamma + \gamma^*)$ elde edilir. Diğer taraftan, $T^{-1}S'v_0 = T^{-1}(S+T)v_0 = T^{-1}Sv_0 + v_0$ olduğu da görülür. Her $x \in R$ için $\delta(x) = \sigma(x)S - Sx = TxT^{-1}S - Sx$ olduğunu hatırlayarak ve bu bağıntıyı düzenleyerek her $x \in R$ için $\delta(x) = TxT^{-1}S - Sx = TxT^{-1}S - Sx + Tx - Tx = TxT^{-1}S' - S'x$ olduğunu elde ederiz ve bu her $x \in R$ için $\delta(x) = TxT^{-1}S' - S'x$ eşitliğini verir. Buradan S' elemanının S ile aynı özelliği sağladığı görülür. Böylece $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesi V vektör uzayının F cismi üzerindeki bir bazını teşkil ettiğinden, S' elemanının tanımdan hareketle $\{v_0, T^{-1}S'v_0, w\}$ kümesi de F cismi üzerinde tanımlı V vektör uzayının diğer bir bazını teşkil eder. Şimdi de bu seçilişler doğrultusunda Durum 1 deki sırayı takip ederek bazı özdeşlikler elde etmeye çalışalım. İlk olarak (3.2) ve (3.4) de sırasıyla S yerine S' düşünülüp (3.4) deki seçilişler (3.2) de kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &= a(-1)^k (x^n)^k Tx^n T^{-1}S'v_0 \\
&= a(-1)^k (x^n)^k S'v_0 \\
&= a(-1)^k (x^n)^k (Sv_0 + Tv_0) \\
&= a(-1)^k (x^n)^k (v_0\alpha + w\gamma + v_0\alpha^* + (T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $T^{-1}S'v_0 = T^{-1}Sv_0 + v_0$ olduğu son özdeşlikte kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= a(-1)^k(x^n)^k(v_0\alpha + w\gamma + v_0\alpha^* + (T^{-1}S'v_0)\beta^* - v_0\beta^* + w\gamma^*) \\ &= a(-1)^k(x^n)^k(v_0(\alpha + \alpha^* - \beta^*) + w(\gamma + \gamma^*) + (T^{-1}S'v_0)\beta^*) \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar (3.2) deki $xv_0 = 0$, $xT^{-1}S'v_0 = T^{-1}S'v_0$ ve $xw = w$ seçilişlerini yukarıdaki son denklemde yerine yazarak

$$0 = a(-1)^k(T^{-1}S'v_0\beta^* + w(\gamma + \gamma^*)) \tag{3.11}$$

bağıntısına ulaşılır. Buradan $aw = 0$ olduğunu hatırlayarak (3.11) den $0 = a(-1)^k(T^{-1}S'v_0\beta^*)$ bulunur ve $\beta^* \neq 0$ olduğundan $aT^{-1}S'v_0 = 0$ ifadesine ulaşılır. Burada $\{v_0, T^{-1}S'v_0, w\}$ kümesi F cismi üzerinde tanımlı V vektör uzayının bir bazını teşkil ettiğinden, her $v \in V$ için $v = v_0\gamma_1 + T^{-1}S'v_0\gamma_2 + w\gamma_3$ olacak şekilde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in F$ elemanları vardır. Bu durumda her $v \in V$ için $av = a(v_0\gamma_1 + T^{-1}S'v_0\gamma_2 + w\gamma_3) = 0$ olur. Böylece $aV = 0$ sonucuna ulaşılır. V vektör uzayının R üzerindeki hareketinin "faithful" olduğu göz önüne alınarak $a = 0$ elde edilir ve böylece bu durum için ispat tamamlanmış olur.

Alt durum 1.2 Bu kısımda (3.10) da $\beta^* = 0$ olsun. O zaman (3.10), $\alpha^*, \gamma^* \in F$ olmak üzere $Tv_0 = v_0\alpha^* + w\gamma^*$ bağıntısına indirgenir.

Burada $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesinin F cismi üzerinde tanımlı V vektör uzayının bir bazı olduğunu ve üstelik $0 \neq \gamma, \alpha \in F$ elemanları için $Sv_0 = v_0\alpha + w\gamma$ bağıntısının sağlandığını tekrar hatırlayalım. Diğer taraftan, R nin yoğunluğundan

$$xv_0 = 0, \quad xT^{-1}Sv_0 = T^{-1}Sv_0, \quad xw = T^{-1}Sv_0 \tag{3.12}$$

olacak şekilde bir $x \in R$ elemanı vardır. (3.12) deki $xv_0 = 0$ seçilişden hareketle (3.2) bağıntısı ancak $i = k$ durumunda sıfırdan farklı olur. Bu sebeple (3.2) bağıntısında (3.12) deki seçilişleri kullanarak $0 = a(-1)^k(x^n)^kTx^nT^{-1}Sv_0$ elde edilir. Ayrıca, bu seçilişlerden hareketle ve birleşme özelliğinden $x^nT^{-1}Sv_0 = x^{n-1}(xT^{-1}Sv_0) = x^{n-1}(T^{-1}Sv_0) = x(T^{-1}Sv_0) = T^{-1}Sv_0$ olduğu kolayca görülür. Son elde edilen iki bağıntıyı kıyaslayarak

$$\begin{aligned} 0 &= a(-1)^k(x^n)^kTx^nT^{-1}Sv_0 \\ &= a(-1)^k(x^n)^kTT^{-1}Sv_0 \\ &= a(-1)^k(x^n)^kSv_0 \\ &= a(-1)^k(x^n)^k(v_0\alpha + w\gamma) \end{aligned}$$

sonucu bulunur. (3.12) deki seçilişler son bağıntıda kullanılarak

$$0 = a(-1)^k T^{-1} S v_0 \gamma \tag{3.13}$$

bağıntısı elde edilir ve $\gamma \neq 0$ olduğundan (3.13) $aT^{-1}Sv_0 = 0$ bağıntısına indirgenir. Bu durumda $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesi F cismi üzerinde tanımlı V vektör uzayının bir bazını teşkil ettiğinden, önceki yapılan işlemlerden elde edilen $av_0 = 0$ ve $aw = 0$ bağıntıları ile son olarak bulunan $aT^{-1}Sv_0 = 0$ bağıntısı bizi $aV = 0$ sonucuna ulaştırır. Böylece V vektör uzayının R üzerindeki hareketinin "faithful" oluşu $a = 0$ sonucunu elde etmemize neden olur.

Şimdi $Sv_0 = v_0\alpha + (T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma$ bağıntısında $\beta \neq 0$ olduğu durumu ele alalım. Buradan $Sv_0 = v_0\alpha + (T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma$ ifadesinde $\alpha, 0 \neq \beta, 0 \neq \gamma \in F$ elemanları vardır. Daha önce $\beta = 0$ olduğu durumda yapılan irdelemenin aynısını şimdi $\beta \neq 0$ olduğu durumda da yaparak $Tv_0 = v_0\alpha^* + (T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*$ olacak şekilde $\alpha^*, \beta^*, \gamma^* \in F$ elemanlarının var olduğu söylenir. Diğer taraftan, (3.5) ve (3.7) birlikte düşünülerek

$$(-1)^k a\left((T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma\right) = 0 \quad \text{ve} \quad av_0 = 0 \tag{3.14}$$

elde edilir. Yukarıda yapılan irdelemelere paralel olarak $\beta \neq 0$ olduğu durumu da iki alt duruma ayırıp ispatın geriye kalan kısmını inceleyelim:

Alt durum 1.3 İlk olarak $(T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma$ ve $(T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*$ elemanlarının F-bağımsız olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda β^* ve γ^* elemanlarının aynı anda sıfır olamayacağı açıktır. Öncelikle $\gamma^* \neq 0$ olsun. İspatın ilk kısmında elde edilen (3.3) ve (3.10) bağıntıları tekrar düzenlenirse

$$v_0\alpha = Sv_0 - (T^{-1}Sv_0)\beta - w\gamma \tag{3.15}$$

ve

$$v_0\alpha^* = Tv_0 - (T^{-1}Sv_0)\beta^* - w\gamma^* \tag{3.16}$$

kolaylıkla elde edilir. Buradan (3.16) bağıntısını sağdan $(\gamma^*)^{-1}\gamma$ ile çarparak $v_0\alpha^*(\gamma^*)^{-1}\gamma = Tv_0(\gamma^*)^{-1}\gamma - (T^{-1}Sv_0)\beta^*(\gamma^*)^{-1}\gamma - w\gamma$ eşitliği elde edilir ve bu son bağıntıda geçen $(\gamma^*)^{-1}\gamma$ elemanına d diyelim. Böylece

$$v_0\alpha^* d = Tv_0 d - (T^{-1}Sv_0)\beta^* d - w\gamma \tag{3.17}$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca (3.15) ve (3.17) karşılaştırılıp düzenlendiğinde $v_0(\alpha - \alpha^* d) = Sv_0 - Tv_0 d - T^{-1}Sv_0(\beta - \beta^* d)$ elde edilir ve bu bağıntıda $\beta - \beta^* d$ elemanı $\beta^{'}$ olarak adlandırıldığında

$$Sv_0 - (Tv_0)d = v_0(\alpha - \alpha^* d) + T^{-1}Sv_0\beta^{'} \tag{3.18}$$

sonucuna varılır. Üstelik

$$(T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma - ((T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*)(\gamma^*)^{-1}\gamma = T^{-1}Sv_0(\beta - \beta^*(\gamma^*)^{-1}\gamma)$$

bağıntısı doğal olarak gerçeklenir. Ayrıca d ve $\beta^{'}$ elemanlarının tanımını son bağıntıda kullanarak

$$(T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma - ((T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*)d = (T^{-1}Sv_0)\beta^{'}$$

bulunur. Hipotezden $(T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma$ ve $(T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*$ elemanlarının F-bağımsız olduğu gerçeği yukarıdaki ifadede $\beta^{'}$ elemanının sıfırdan farklı olması gerektiğini verir.

Şimdi, $\beta^* \neq 0$ olduğu durumu kabul edip, benzer işlemlerle çözümlerimizi elde etmeye çalışalım. (3.16) da $\beta^* \neq 0$ olduğu kullanılıp, (3.16) bağıntısı sağdan $(\beta^*)^{-1}\beta$ ile çarpılıp $(\beta^*)^{-1}\beta$ elemanı $d^{'}$ ile gösterilirse

$$v_0\alpha^* d^{'} = Tv_0 d^{'} - T^{-1}Sv_0\beta - w\gamma^* d^{'} \tag{3.19}$$

bağıntısına ulaşılır. Daha sonra, (3.15) ve (3.19) karşılaştırılıp düzenlenerek $Sv_0 - (Tv_0)d^{'} = v_0(\alpha - \alpha^* d^{'}) + w(\gamma - \gamma^* d^{'})$ olduğu elde edilir. Yukarıdaki $\gamma^* \neq 0$ durumunda yapılanlara paralel olarak son bağıntıda $\gamma - \gamma^* d^{'}$ elemanına $\gamma^{'}$ diyelim. O zaman son bağıntı

$$Sv_0 - (Tv_0)d^{'} = v_0(\alpha - \alpha^* d^{'}) + w\gamma^{'} \tag{3.20}$$

formunu alır. Ayrıca

$$(T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma - ((T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*)(\beta^*)^{-1}\beta = w(\gamma - \gamma^*(\beta^*)^{-1}\beta)$$

bağıntısı doğal olarak gerçeklenir. Böylece $(\beta^*)^{-1}\beta = d^{'}$ ve $\gamma - \gamma^*(\beta^*)^{-1}\beta = \gamma^{'}$ olduğu hatırlanarak son ifade düzenlenirse

$$(T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma - ((T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*)d^{'} = w\gamma^{'}$$

bağıntısı bulunur. Hipotezden $(T^{-1}Sv_0)\beta+w\gamma$ ve $(T^{-1}Sv_0)\beta^*+w\gamma^*$ elemanlarının F-bağımsız olduğu gerçeği yukarıdaki ifadede γ' elemanının sıfırdan farklı olması gerektiğini verir. Şimdi herhangi bir $d \in F$ ve her $v \in V$ elemanları için $r_d(v) := vd$ olacak şekilde bir $r_d : V \to V$ dönüşümü tanımlayalım. Diğer taraftan, her $x \in R$ için $\sigma(x) = TxT^{-1}$ olduğunu hatırlayarak ve T dönüşümünün yarı lineer olduğunu kullanarak her $x \in R$ için $\sigma(x)T = Tx$ olduğu açıktır. Ayrıca r_d dönüşümünün tanımından hareketle, her $x \in R$ ve $v \in V$ için $(r_dx)v = (r_dx)(v) = r_d(xv)$ olur. Buradan $xv \in V$ olduğunu ve r_d dönüşümünün tanımını son bağıntıda kullanarak $(r_dx)v = (xv)d = x(vd) = xr_d(v)$ bulunur. Son bağıntı her $v \in V$ için sağlandığından, buradan her $x \in R$ için $r_dx = xr_d$ olduğu rahatça söylenir. Ayrıca her $x \in R$ için

$$\begin{aligned}\delta(x) = \sigma(x)S - Sx &= \sigma(x)S - Sx + \sigma(x)r_dT - \sigma(x)r_dT \\ &= \sigma(x)(S - r_dT) + \sigma(x)Td - Sx\end{aligned}$$

bulunur. Böylece her $x \in R$ için $\sigma(x)T = Tx$ ve $r_dx = xr_d$ olduklarını son bağıntıda kullanarak

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \sigma(x)S - Sx + \sigma(x)r_dT - \sigma(x)r_dT \\ &= \sigma(x)(S - r_dT) + \sigma(x)Td - Sx \\ &= \sigma(x)(S - r_dT) + Txd - Sx \\ &= \sigma(x)(S - r_dT) - (S - r_dT)x\end{aligned}$$

bulunur. Burada $S - r_dT = S'$ denilirse, her $x \in R$ için $\delta(x) = \sigma(x)S' - S'x$ sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan $T^{-1}S'v_0$ elemanı için, $S - r_dT = S'$ olduğunu ve r_d dönüşümünün tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}T^{-1}S'v_0 &= T^{-1}(S - r_dT)(v_0) \\ &= T^{-1}Sv_0 - T^{-1}r_dTv_0 \\ &= T^{-1}Sv_0 - v_0d\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bağıntıdan $T^{-1}S'v_0$ ın $T^{-1}Sv_0$ ve v_0 vektörleriyle F-bağımsız olduğu görülür. Bu ise $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesinin F-bağımsız ve ayrıca $\{v_0, T^{-1}S'v_0, w\}$ kümesinin de F-bağımsız olmasını gerektirdiğini verir. Diğer taraftan, $\{v_0, T^{-1}S'v_0, w\}$ F-bağımsız olduğundan ve R nin yoğunluğundan $xv_0 = 0$, $xT^{-1}S'v_0 = T^{-1}S'v_0$ ve $xw = w$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır.

Ayrıca her $x \in R$ için $\delta(x) = \sigma(x)S' - S'x$ olduğunu hipotezde yerine yazıp komutatör açılımlarını gerçekleştirerek ve yukarıda yapılan seçimlerin ışığı altında $xv_0 = 0$ olduğundan ancak $i = k$ durumu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} 0 &= a\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(x^n)^i(Tx^nT^{-1}S' - S'x^n)(x^n)^{k-i}v_0 \\ &= a(-1)^k(x^n)^kTx^nT^{-1}S'v_0 \\ &= a(-1)^k(x^n)^kTT^{-1}S'v_0 \\ &= a(-1)^k(x^n)^kS'v_0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$0 = a(-1)^k(x^n)^kS'v_0 \tag{3.21}$$

sonucuna ulaşılır. Alt Durum 1.3 ün kabulünde geçen $(T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*$ vektöründe $\gamma^* \neq 0$ olduğu durumu göz önüne alalım. Bu durumda $S - r_dT = S'$ olduğundan (3.18) den hareketle $S'v_0 = v_0(\alpha - \alpha^*d) + T^{-1}Sv_0\beta'$ bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıyı (3.21) de yerine yazarak ve $xv_0 = 0$, $xT^{-1}S'v_0 = T^{-1}S'v_0$ seçilişlerini kullanarak $0 = a(-1)^k(x^n)^k(v_0(\alpha - \alpha^*d) + T^{-1}Sv_0\beta') = a(-1)^kT^{-1}Sv_0\beta'$ bulunur. Böylece $0 = aT^{-1}Sv_0\beta'$ elde edilir. Diğer taraftan, $\beta^* \neq 0$ olduğu durumu düşünelim. Yukarıda yapılan muhakemeye paralel olarak $\beta^* \neq 0$ ve $S - r_dT = S'$ olduğundan (3.20) den $S'v_0 = v_0(\alpha - \alpha^*d) + w\gamma'$ bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıyı (3.21) de yerine yazarak ve $xv_0 = 0$, $xT^{-1}S'v_0 = T^{-1}S'v_0$ seçilişlerini kullanarak $0 = a(-1)^k(x^n)^k(v_0(\alpha - \alpha^*d) + w\gamma') = a(-1)^kw\gamma'$ bulunur. Böylece $aw\gamma' = 0$ eşitliği elde edilir. Yukarıda yapılan tüm işlemlerin ışığı altında

$$\text{ya } \gamma^* \neq 0 \text{ ve } aT^{-1}Sv_0\beta' = 0 \text{ dır ya da } \beta^* \neq 0 \text{ ve } aw\gamma' = 0 \tag{3.22}$$

dır. Alt Durum 1.3 deki işlemlerde bazı durumları hatırlatmak gerekirse $\gamma^* \neq 0$ iken β' nün sıfır olamayacağı ve $\beta^* \neq 0$ iken de γ' nün sıfır olamayacağı elde edildi. Böylece ilk durum olan $\gamma^* \neq 0$ olduğunda $aT^{-1}Sv_0\beta' = 0$ olur ve $\beta' \neq 0$ olduğundan bu ise $aT^{-1}Sv_0 = 0$ bağıntısını verir. Son bağıntıyı (3.14) de yazarak $aw\gamma = 0$ bulunur ve burada $\gamma \neq 0$ olduğunu kullanarak $aw = 0$ bağıntısına ulaşılır. Böylece $av_0 = 0$, $aT^{-1}Sv_0 = 0$ ve $aw = 0$ elde edilir. $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesi F-bağımsız olduğundan bu $aV = 0$ olmasını gerektirir. Diğer taraftan (3.22) deki ikinci durumu düşünelim. Böylece $\beta^* \neq 0$

ve $aw\gamma' = 0$ bağıntılarını (3.14) de yazarak $aT^{-1}Sv_0\beta = 0$ bulunur ve burada $\beta \neq 0$ olduğunu kullanarak $aT^{-1}Sv_0 = 0$ bağıntısına ulaşılır. Ayrıca $\gamma' \neq 0$ olduğundan $aw\gamma' = 0$ olması $aw = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $av_0 = 0$, $aT^{-1}Sv_0 = 0$ ve $aw = 0$ elde edilir. Buradan $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesi F-bağımsız olduğundan bu durum da $aV = 0$ olmasını verir. V vektör uzayının R üzerindeki hareketinin "faithful" olmasından $a = 0$ sonucuna ulaşılır ve böylece bu durum için ispat tamamlanmış olur.

Alt durum 1.4 Son olarak $(T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma$ ve $(T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*$ elemanlarının F-bağımlı olduğu durumu inceleyelim. Durum 1 den dolayı $\dim V_F = 3$, (3.3) ve (3.10) bağıntılarından da $Sv_0 = v_0\alpha + (T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma$ ve $Tv_0 = v_0\alpha^* + (T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*$ olacak şekilde $\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*, \gamma, \gamma^* \in F$ elemanları vardır. Üstelik Alt Durum 1.3 den önceki kabullerden dolayı $\gamma \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ durumlarında olduğumuzu hatırlayalım. İlk olarak $(T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma = w'$ diyelim. Böylece $Sv_0 = v_0\alpha + w'$ bağıntısına kolayca ulaşılır. Ayrıca $(T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma$ ve $(T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^*$ elemanlarının F-bağımlı olduğundan $(T^{-1}Sv_0)\beta^* + w\gamma^* = ((T^{-1}Sv_0)\beta + w\gamma)\, l$ olacak şekilde bir $l \in F$ elemanı vardır. Böylece $Tv_0 = v_0\alpha^* + w' l$ bağıntısı elde edilir. Ayrıca $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesi V vektör uzayının F-bağımsız bir alt kümesi ve $\dim V_F = 3$ olduğundan $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesi aynı zamanda V vektör uzayının F cismi üzerindeki bir bazını teşkil eder. Bu durumda w' nün tanımından hareketle $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w'\}$ kümesinin de V vektör uzayının F-bağımsız bir alt kümesi olduğu kolaylıkla görülür. $\dim V_F = 3$ olduğundan $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w'\}$ kümesi aynı zamanda V vektör uzayının F cismi üzerindeki başka bir bazını teşkil eder.

Şimdi daha önceki irdelemelerde F-bağımsız bir $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesi üzerinden ilerleyerek elde edilen bağıntıları $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w'\}$ kümesi için de elde etmeye çalışalım. Açıkça belirtmek gerekirse (3.4) deki seçilişlere paralel olarak (3.5) de w yerine w' elemanını alarak ve yapılan irdelemelerin tümünde tamamen aynı işlemleri yaparak $aw' = 0$ olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan, R nin yoğunluğu düşünülerek $xv_0 = 0$, $xT^{-1}Sv_0 = T^{-1}Sv_0$ ve $xw' = T^{-1}Sv_0$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. Bu seçilişler (3.2) de kullanılarak $0 = a(-1)^k(x^n)^kTx^nT^{-1}Sv_0$ elde edilir ve ayrıca $xT^{-1}Sv_0 = T^{-1}Sv_0$ olması

$x^n T^{-1} S v_0 = T^{-1} S v_0$ olmasını verir. Böylece son iki bağıntı karşılaştırılarak

$$\begin{aligned} 0 &= a(-1)^k (x^n)^k T x^n T^{-1} S v_0 \\ &= a(-1)^k (x^n)^k T T^{-1} S v_0 \\ &= a(-1)^k (x^n)^k S v_0 \\ &= a(-1)^k (x^n)^k (v_0 \alpha + w') \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $0 = a(-1)^k (x^n)^k (v_0 \alpha + w')$ bulunur. Yukarıdaki seçilişlerde $x v_0 = 0$, $x T^{-1} S v_0 = T^{-1} S v_0$ ve $x w' = T^{-1} S v_0$ olduğunu son bağıntıda kullanarak

$$0 = a(-1)^k T^{-1} S v_0$$

eşitliğine ulaşılır ve böylece $a T^{-1} S v_0 = 0$ olduğu bulunur. Diğer taraftan, elde edilen $a w' = 0$ ve $a T^{-1} S v_0 = 0$ bağıntılarına ek olarak (3.14) den $a v_0 = 0$ olduğu da bilinmektedir. Böylece $\{v_0, T^{-1} S v_0, w'\}$ kümesi V vektör uzayının F cismi üzerindeki bir bazını teşkil ettiğinden $aV = 0$ dır. V vektör uzayının R üzerindeki hareketi "faithful" olduğundan $a = 0$ elde edilir ve bu durumda ispat tamamlanır.

Durum 2 Şimdi $S v_0 \in v_0 F + (T^{-1} S v_0) F$ olduğu duruma bakalım. Bu bölümde $T v_0$ vektörünün durumunu irdeleyerek ilerleyelim. Daha açık bir ifadeyle $T v_0 \notin v_0 F + (T^{-1} S v_0) F$ ve $T v_0 \in v_0 F + (T^{-1} S v_0) F$ olacak şekilde iki durumda ele alalım. Öncelikle $T v_0 \notin v_0 F + (T^{-1} S v_0) F$ olduğu durumu kabul edelim ve $S + T = S''$ toplam dönüşümünü tanımlayalım. Burada $S'' v_0 \notin v_0 F + (T^{-1} S'' v_0) F$ dır. Aksi halde, yani $S'' v_0 \in v_0 F + (T^{-1} S'' v_0) F$ olduğunda S'' nün tanımından $S v_0 + T v_0 = (S + T) v_0 \in v_0 F + (T^{-1} S v_0) F = U$ olur ve U nun V nin bir alt vektör uzayı olduğunu belirterek son bağıntının $T v_0 \in v_0 F + (T^{-1} S v_0) F$ olmasını gerektirdiği çelişkisini elde ederiz. Böylece $S'' v_0 \notin v_0 F + (T^{-1} S'' v_0) F$ olur. Buradan her $x \in R$ için $\delta(x) = T x T^{-1} S - S x$ olduğundan her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} \delta(x) &= T x T^{-1} S - S x + T x - T x \\ &= T x T^{-1} (S + T) - (S + T) x \\ &= T x T^{-1} S'' - S'' x \end{aligned}$$

bulunur. Böylece her $x \in R$ için $\delta(x) = T x T^{-1} S'' - S'' x$ elde edilir. Bu ise δ skew türevinin aynı zamanda $S'' \in End(V)$ elemanı ile de belirlendiği sonucunu verir. Bu durumda hipotezden ve $S''v_0 \notin v_0F + (T^{-1}S''v_0)F$ olduğundan Durum 1 den ispat biter.

Diğer taraftan $Tv_0 \in v_0F + (T^{-1}Sv_0)F$ olduğu durumu düşünelim. Aynı zamanda Durum 2 de $Sv_0 \in v_0F + (T^{-1}Sv_0)F$ olarak alındığından

$$Sv_0 = v_0\alpha + T^{-1}Sv_0\beta \quad \text{ve} \quad Tv_0 = v_0\alpha^* + T^{-1}Sv_0\beta^* \tag{3.23}$$

olacak şekilde $\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^* \in F$ elemanları vardır. Burada $S + T$ toplam dönüşümüne S''' dersek, bu tanımlama altında

$$\begin{aligned} S'''v_0 &= Sv_0 + Tv_0 \\ &= v_0(\alpha + \alpha^*) + T^{-1}Sv_0(\beta + \beta^*) \end{aligned}$$

olur ve her $x \in R$ için $\delta(x) = TxT^{-1}S - Sx$ olduğundan yukarıdaki benzer yöntemler tekrar edilerek her $x \in R$ için $\delta(x) = TxT^{-1}S''' - S'''x$ olduğu görülür. Ayrıca T bir yarı lineer dönüşüm olduğundan v_0 ve $T^{-1}Sv_0$ elemanlarının lineer bağımsız olması Tv_0 ve $T^{-1}(TSv_0)$ elemanlarının yani; Tv_0 ve Sv_0 elemanlarının da lineer bağımsız olmasını gerektirir. Bu durumda β ve β^* elemanları aynı anda sıfır olamaz. Çünkü β ve β^* elemanları aynı anda sıfır olsa o zaman (3.23) den $Sv_0 = v_0\alpha$ ve $Tv_0 = v_0\alpha^*$ olur. Ancak $\{Tv_0, Sv_0\}$ kümesi lineer bağımsız bir küme olduğundan Tv_0 ve Sv_0 vektörleri sıfır olamaz. Böylelikle $\alpha \neq 0$ ve $\alpha^* \neq 0$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} Sv_0 &= v_0\alpha \\ &= Tv_0(\alpha^*)^{-1}\alpha \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $(\alpha^*)^{-1}\alpha \in F$ olduğundan bu ise Tv_0 ve Sv_0 elemanlarının lineer bağımlı olmasını verir ancak bu bir çelişkidir. Bu sebeple β ve β^* elemanları aynı anda sıfır olamaz. İlk olarak $\beta = 0$ olduğu durumu inceleyelim. O zaman $Sv_0 = v_0\alpha$ dır. Durum 2 de $Sv_0 \in v_0F + T^{-1}Sv_0F$ durumu incelendiğini tekrar hatırlatarak $\beta = 0$ olduğu durumda S elemanı yerine S''' alındığını düşünerek $S'''v_0 = v_0(\alpha + \alpha^*) + T^{-1}Sv_0\beta^*$ bulunur. Bu eşitlikte $\alpha + \alpha^*$ elemanına $\alpha' \in F$ dersek $S'''v_0 \in v_0F + T^{-1}Sv_0F$ olduğu görülür. Burada yapılan muhakemenin amacı $\beta = 0$ olması durumunda problemi S elemanı yerine S''' elemanını alarak ilerletmektir. Bunu yapabilme hakkımızın var olduğu ise $S'''v_0 \in v_0F + T^{-1}Sv_0F$ bağıntısının sağlanmasından kaynaklanmaktadır. Böylece artık $\beta \neq 0$ olduğu durum incelenecektir. İspatın en başındaki kabulden v_0 ve $T^{-1}Sv_0$ elemanlarının lineer bağımsız olmasından ve R halkasının $End(V_F)$ halkasının yoğun alt halkası olmasından $xv_0 = 0$ ve $xT^{-1}Sv_0 = T^{-1}Sv_0$ olacak şekilde bir $x \in R$ elemanı vardır. Bu seçilişleri (3.2) denkleminde kullanarak

$$\begin{aligned} 0 &= a(-1)^k(x^n)^k T x^n T^{-1} S v_0 \\ &= a(-1)^k(x^n)^k S v_0 \\ &= a(-1)^k(x^n)^k(v_0\alpha + T^{-1}Sv_0\beta) \\ &= a(-1)^k T^{-1} S v_0 \beta \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $0 = a(-1)^k(T^{-1}Sv_0)\beta$ olur ve $0 \neq \beta$ olması $aT^{-1}Sv_0 = 0$ olmasını gerektirir. Şimdi $Tv_0 \notin v_0F$ olduğu durumda $a = 0$ olduğunu iddia ediyoruz ve $w \notin v_0F + (T^{-1}Sv_0)F$ olacak şekilde bir $w \in V$ elemanı seçelim. Böylece v_0, $T^{-1}Sv_0$ ve w elemanları lineer bağımsız olur. Bu durumun geri kalan kısmı için V vektör uzayının F cismi üzerindeki boyutuna bağlı olarak

$$\dim V_F = 3 \quad \text{ise} \quad u = 0,$$

ve

$$\dim V_F \geq 4 \quad \text{ise} \quad u \notin v_0F + (T^{-1}Sv_0)F + wF,$$

olacak şekilde bir $u \in V$ elemanı seçelim. Boyuta bağlı olarak, germe aksiyomundan $Tw \in V$ olduğundan

$$Tw = v_0\alpha^{**} + (T^{-1}Sv_0)\beta^{**} + w\gamma^{**} + u\eta \tag{3.24}$$

olacak şekilde $\alpha^{**}, \beta^{**}, \gamma^{**}, \eta \in F$ elemanları vardır. Bu bağıntıdan hareketle ispatı iki ayrı durumda ele alalım:

Alt durum 2.1 İlk olarak (3.24) de $\beta^{**} = 0$ olduğu durumu inceleyelim. O zaman $Tw = v_0\alpha^{**} + w\gamma^{**} + u\eta$ bağıntısı elde edilir. Buradan v_0, $T^{-1}Sv_0$ ve w elemanları lineer bağımsız ve T yarı lineer bir dönüşüm olduğundan Tv_0, Tw ve Sv_0 elemanları da lineer bağımsız olur. Burada $\gamma^{**} = 0$ olması $\eta \neq 0$ olmasını gerektirir. Aksi durumda $\eta = 0$ olarak alınırsa $Tw \in v_0F$ olur. Diğer taraftan, (3.24) de $\beta^{*} = 0$ alınırsa o zaman $Tv_0 \in v_0F$ olur ve bu sonuç ise Tv_0, Tw ve Sv_0 elemanlarının lineer bağımsız olması ile çelişir. Sonuç olarak, eğer $\gamma^{**} = 0$ ise $\eta \neq 0$ dır. Şimdi ispatın geri kalan kısmını $\gamma^{**} \in F$ elemanın durumuna göre iki ayrı durumda irdeleyelim:

İlk olarak $\gamma^{**} \neq 0$ olsun. R nin yoğunluğundan $xv_0 = 0$, $xT^{-1}Sv_0 = w$, $xw = w$ ve $xu = 0$ olacak şekilde bir $x \in R$ elemanı vardır. Bu seçilişleri (3.2) de kullanarak

$$\begin{aligned} 0 &= a(-1)^k (x^n)^k T x^n T^{-1} S v_0 \\ &= a(-1)^k (x^n)^k T w \\ &= a(-1)^k (x^n)^k (v_0 \alpha^{**} + w\gamma^{**} + u\eta) \\ &= a(-1)^k w\gamma^{**} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $0 = aw\gamma^{**}$ bulunur ve $\gamma^{**} \neq 0$ olması son bağıntıda kullanılarak $0 = aw$ sonucu elde edilir.

Diğer taraftan, şimdi $\gamma^{**} = 0$ olsun. R nin yoğunluğundan $xv_0 = 0$, $xT^{-1}Sv_0 = w$, $xw = w$ ve $xu = w$ olacak şekilde bir $x \in R$ elemanı vardır. Tekrar bu seçilişleri (3.2) de kullanarak

$$\begin{aligned} 0 &= a(-1)^k (x^n)^k T x^n T^{-1} S v_0 \\ &= a(-1)^k (x^n)^k T w \\ &= a(-1)^k (x^n)^k (v_0 \alpha^{**} + u\eta) \\ &= a(-1)^k w\eta \end{aligned}$$

bulunur ve bu $0 = aw\eta$ eşitliğini verir. Yukarıda yapılan muhakemeden $\gamma^{**} = 0$ olması $\eta \neq 0$ olmasını gerektirdiğinden son bağıntıdan $aw = 0$ sonucuna ulaşılır.

Alt durum 2.2 Şimdi (3.24) de $\beta^{**} \neq 0$ olduğu durumu inceleyelim. O zaman β^{**} ve β sıfırdan farklı olduklarından $\beta^{**} + \beta\tau(d) = 0$ olacak şekilde bir $d \in F$ bulunabilir. En azından $d = -\tau^{-1}(\beta^{-1}\beta^{**})$ alındığında yukarıdaki bağıntı sağlanır. Burada $\beta^{**} + \beta\tau(d) = 0$ koşulunu sağlayan $d \in F$ için $w + (T^{-1}Sv_0)d = w'$ diyelim. Böylece v_0, $T^{-1}Sv_0$ ve w elemanları lineer bağımsız olduğundan v_0, $T^{-1}Sv_0$ ve w' elemanları da lineer bağımsız olur. Bu durumda T yarı lineer bir dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} Tw' &= T(w + (T^{-1}Sv_0)d) \\ &= Tw + Sv_0\tau(d) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (3.23), (3.24) ve son bağıntı birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} Tw^{'} &= T(w + (T^{-1}Sv_0)) \\ &= Tw + Sv_0\tau(d) \\ &= v_0\alpha^{**} + (T^{-1}Sv_0)\beta^{**} + w\gamma^{**} + u\eta + v_0\alpha\tau(d) + T^{-1}Sv_0\beta\tau(d) \\ &= v_0(\alpha^{**} + \alpha\tau(d)) + T^{-1}Sv_0(\beta^{**} + \beta\tau(d)) + w\gamma^{**} + u\eta \end{aligned}$$

bulunur. Son bağıntıda $d \in F$ elemanının seçilişinde $\beta^{**} + \beta\tau(d) = 0$ olduğu kullanılarak $Tw^{'} = v_0(\alpha^{**} + \alpha\tau(d)) + w\gamma^{**} + u\eta$ elde edilir. Alt Durum 2.1 gereğince $Tw = v_0\alpha_1 + w\alpha_2 + u\alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ elemanlarının var olduğu durum $aw = 0$ olmasını gerektirdiğinden $Tw^{'}$ yukarıdaki formu da benzer işlemleri yaparak $aw^{'} = 0$ olmasını gerektirir. Daha önce elde edilen $aT^{-1}Sv_0 = 0$ eşitliği son bağıntıda yazılarak $0 = aw^{'} = aw + a(T^{-1}Sv_0)d = aw$ olduğundan $aw = 0$ elde edilir. Durumu kısa bir şekilde özetlemek istersek, hem $\beta^{**} = 0$ hem de $\beta^{**} \neq 0$ olduğu durumlarda her $w \notin v_0F + T^{-1}Sv_0F$ elemanı için $aw = 0$ olduğu gösterilmiş oldu. Ayrıca özel olarak, her $w \notin v_0F + T^{-1}Sv_0F$ elemanı için w yerine sırasıyla $T^{-1}Sv_0 + w$ ve $v_0 + w$ alınıp, benzer işlemler yapılarak $a(T^{-1}Sv_0 + w) = 0$ ve $a(v_0 + w) = 0$ bağıntıları sırasıyla elde edilir. Son iki bağıntıda $aw = 0$ olduğu kullanılarak, her $w \notin v_0F + T^{-1}Sv_0F$ için $av_0 = aT^{-1}Sv_0 = aw = 0$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi boyut üzerinden irdelemeler yaparak devam edelim. Eğer $\dim V_F = 3$ ise o zaman $\{v_0, T^{-1}Sv_0, w\}$ kümesi lineer bağımsız bir küme olduğundan bu küme aynı zamanda V vektör uzayının F cismi üzerindeki bir bazıdır ve bu durumda her $v \in V$ elemanı $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ olmak üzere $v = v_0\alpha_1 + T^{-1}Sv_0\alpha_2 + w\alpha_3$ formundadır. Böylece $aw = 0$, $av_0 = 0$ ve $aT^{-1}Sv_0 = 0$ bağıntıları her $v \in V$ elemanı için $av = 0$ yani $aV = 0$ olmasını gerektirir. O zaman V vektör uzayının R üzerindeki hareketi "faithful" olduğundan $a = 0$ elde edilir, böylece ispat tamamlanır. Eğer $\dim V_F \geq 4$ olursa o zaman u nun seçilişinden hareketle $\dim V_F = 3$ olduğu durumunda yapılan muhakemelerin çok benzerlerini yaparak tekrar $a = 0$ sonucuna varılır.

Şimdi $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Amacımız bir çelişki elde ederek bu durumun söz konusu olamayacağını göstermektir. İspatın en başında v_0 ve $T^{-1}Sv_0$ elemananları lineer bağımsız olacak şekilde bir $v_0 \in F$ elemanının var olduğunda $a = 0$ olduğu ve Durum 2 de $Tv_0 \notin v_0F$ olduğu durumda da $a = 0$

olduğu gösterildiğinden, $a \neq 0$ kabulü her $v \in V$ için v ile $T^{-1}Sv$ elemanlarının lineer bağımlı olmasını ya da $Tv \in vF$ sonucunu verir. Ayrıca v ile $T^{-1}Sv$ elemanlarının lineer bağımlı olmasından hareketle $T^{-1}Sv = v\gamma$ olacak şekilde öyle bir $\gamma \in F$ vardır. Bu bağıntıda T dönüşümünün yarı lineerliğini kullanarak $Sv = (Tv)\tau(\gamma)$ eşitliği elde edilir. Böylece $Sv \in (Tv)F$ olur. Bu durumlar birlikte verilmek istenirse her $v \in V$ için

$$\text{ya} \qquad Sv \in (Tv)F \qquad \text{ya da} \qquad Tv \in vF \tag{3.25}$$

olduğu görülür.

Şimdi $w \notin v_0F + T^{-1}Sv_0F$ olacak şekilde bir $w \in V$ elemanı seçelim ve T dönüşümü yarı lineer bir dönüşüm olduğunda Tv_0, Tw ve Sv_0 elemanları lineer bağımsız olur. İlk olarak $Tw \notin wF$ olduğunu kabul edelim ve bu durumda her $0 \neq \lambda \in F$ elemanı için $T(w\lambda) \notin (w\lambda)F$ bağıntısı da doğal olarak vardır. Böylece (3.25) den $0 \neq \lambda \in F$ elemanı için $S(w\lambda) = T(w\lambda)\gamma$ bağıntısı bulunur. Ayrıca $w\lambda + v_0 \notin v_0F + T^{-1}Sv_0F$ olduğundan benzer işlemler yapılarak $S(w\lambda + v_0) = T(w\lambda + v_0)\eta$ olacak şekilde uygun bir $\eta \in F$ elemanı vardır. Her iki tarafta S endomorfizması ve T yarı lineer dönüşümünün tanımlarını kullanarak, ayrıca $S(w\lambda) = T(w\lambda)\gamma$ olduğu göz önüne alınarak $Tw\tau(\lambda)(\gamma - \eta) + Sv_0 + Tv_0(-\eta) = 0$ elde edilir. Ancak bu Tv_0, Sv_0 ve Tw elemanlarının lineer bağımsız olması ile çelişir. Bu durumda $S(w\lambda + v_0) = T(w\lambda + v_0)\eta$ olması bir çelişki verdiğinden (3.25) bağıntısı bizi $T(w\lambda + v_0) \in (w\lambda + v_0)F$ sonucuna ulaştırır. Böylece her $0 \neq \lambda \in F$ elemanı için $T(w\lambda + v_0) = (w\lambda + v_0)\mu_\lambda$ olacak şekilde λ elemanının seçilişine bağlı olarak değişen uygun bir $\mu_\lambda \in F$ elemanı vardır. Buradan $Tw\tau(\lambda) + Tv_0 = w\lambda\mu_\lambda + v_0\mu_\lambda$ elde edilir. Özel olarak (3.23) denkleminde $\beta^* = 0$ alınarak $Tv_0 = v_0\alpha^*$ bulunur. Son iki bağıntı dikkate alındığında

$$Tw\tau(\lambda) = w\lambda\mu_\lambda + v_0(\mu_\lambda - \alpha^*) \tag{3.26}$$

olduğu görülür. Özel olarak, (3.26) da $\lambda = 1 \in F$ seçilerek $Tw = w\mu_1 + v_0(\mu_1 - \alpha^*)$ elde edilir. Son bağıntı sağdan $\tau(\lambda)$ ile çarpıldığında $Tw\tau(\lambda) = w\mu_1\tau(\lambda) + v_0(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\lambda)$ bulunur. Bu bağıntı (3.26) ile kıyaslanarak

$$w\left(\mu_1\tau(\lambda) - \lambda\mu_\lambda\right) + v_0\left((\mu_1 - \alpha^*)\tau(\lambda) - \mu_\lambda + \alpha^*\right) = 0$$

sonucuna varılır. Böylece w ve v_0 vektörleri lineer bağımsız olduğundan, her

$0 \neq \lambda \in F$ için

$$\mu_1 \tau(\lambda) - \lambda \mu_\lambda = 0 \tag{3.27}$$

ve aynı zamanda

$$(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\lambda) - \mu_\lambda + \alpha^* = 0 \tag{3.28}$$

bağıntıları elde edilir. Ayrıca (3.28) i soldan λ ile çarparak $\lambda(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\lambda) - \lambda\mu_\lambda + \lambda\alpha^* = 0$ bulunur ve (3.27) bağıntısı son elde edilen bağıntıda kullanıldığında her $0 \neq \lambda \in F$ için

$$\lambda(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\lambda) - \mu_1\tau(\lambda) + \lambda\alpha^* = 0 \tag{3.29}$$

olur. Buradan (3.29) da $0 \neq \beta \in F$ olmak üzere λ yerine $\lambda + \beta$ alınıp (3.29) kullanılarak, her $0 \neq \lambda, 0 \neq \beta \in F$ için

$$\beta(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\lambda) + \lambda(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\beta) = 0 \tag{3.30}$$

bağıntısına ulaşılır. Eğer her $0 \neq \lambda \in F$ için $\tau(\lambda) = \lambda$ ise yani τ birim otomorfizma ise o zaman (3.27) ve (3.28) den $\mu_1 = \mu_\lambda = \alpha^*$ olur. Şimdi $0 \neq \lambda \in F$ elemanı için $\tau(\lambda) \neq \lambda$ olduğunu kabul edelim. (3.30) da λ yerine λ^2 alınırsa

$$\beta(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\lambda)\tau(\lambda) + \lambda^2(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\beta) = 0 \tag{3.31}$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.30) soldan λ ile çarpılarak

$$\lambda\beta(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\lambda) + \lambda^2(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\beta) = 0 \tag{3.32}$$

elde edilir. Burada (3.31) ve (3.32) karşılaştırılıp $\lambda\beta(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\lambda) - \beta(\mu_1 - \alpha^*)\tau(\lambda)\tau(\lambda) = 0$ bulunur. Burada $\tau(\lambda) \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ oldukları kullanılarak son bağıntı

$$\lambda(\mu_1 - \alpha^*) - (\mu_1 - \alpha^*)\tau(\lambda) = 0 \tag{3.33}$$

bağıntısına indirgenir. Böylece $(\mu_1 - \alpha^*)(\tau(\lambda) - \lambda) = 0$ bulunur. Her zaman $\tau(\lambda) \neq \lambda$ olacak şekilde bir $0 \neq \lambda \in F$ bulanabileceğinden $\mu_1 = \alpha^*$ olur. Elde edilen bu sonuç (3.28) de kullanıldığında $\alpha^* = \mu_\lambda$ dır. Böylece $\alpha^* = \mu_\lambda = \mu_1$ bulunur. Bu ise $\mu \in F$ elemanının $\lambda \in F$ elemanının seçilişinden bağımsız olduğunu verir. Buradan $\alpha^* = \mu_\lambda = \mu_1 = \mu \in F$ alarak (3.26) yeniden düzenlenirse her $\lambda \in F$ için $Tw\tau(\lambda) = w\lambda\mu$ olur. Kabulden $Tw \notin wF$ olduğunu hatırlayarak, özel olarak $\lambda = 1$ alınırsa $Tw = w\mu \in wF$ çelişkisi elde edilir. Böylece $w \notin v_0F + T^{-1}Sv_0F$ olacak şekildeki her $w \in V$ elemanı için $Tw \in wF$ sonucuna ulaşırız. Burada $w \in V$ nin seçilişinden $w \notin v_0F + T^{-1}Sv_0F$ olduğu göz önüne alınarak $w + v_0$ ve $w + T^{-1}Sv_0$ vektörlerinin de bu koşulu sağladığı sonucunu çıkarabiliriz. Böylece bu koşulu sağlayan V deki her w vektörü için $Tw \in wF$ olduğundan $w + v_0 \notin v_0F + T^{-1}Sv_0F$ ve $w + T^{-1}Sv_0 \notin v_0F + T^{-1}Sv_0F$ vektörleri için de $T(w + v_0) \in (w + v_0)F$ ve $T(w + T^{-1}Sv_0) \in (w + T^{-1}Sv_0)F$ bağıntıları sağlanır. Böylece

$$Tw = w\mu$$
$$T(w + v_0) = (w + v_0)\xi$$
$$T(w + T^{-1}Sv_0) = (w + T^{-1}Sv_0)\varepsilon$$

olacak şekilde $\mu, \xi, \varepsilon \in F$ elemanları vardır. Burada T nin yarı lineer dönüşüm ve $Tv_0 = v_0\alpha^*$ olduğunu kullanarak $(w + v_0)\xi = T(w + v_0) = Tw + Tv_0 = w\mu + v_0\alpha^*$ bağıntısı bulunur. Böylece $(w + v_0)\xi = w\mu + v_0\alpha^*$ bağıntısından

$$w(\mu - \xi) + v_0(\alpha^* - \xi) = 0 \tag{3.34}$$

dır. Burada v_0 ve w vektörleri lineer bağımsız olduklarından $\mu = \xi = \alpha^*$ elde edilir. Ayrıca $T(w + T^{-1}Sv_0) = (w + T^{-1}Sv_0)\varepsilon$ bağıntısı düzenlenerek $Tw + Sv_0 = w\varepsilon + T^{-1}Sv_0\varepsilon$ bulunur. Burada $Tw = w\mu$ ve (3.23) den $Sv_0 = v_0\alpha + T^{-1}Sv_0\beta$ olduğunu kullanıp bağıntıyı düzenleyerek $w(\mu - \varepsilon) + v_0\alpha + T^{-1}Sv_0(\beta - \varepsilon) = 0$ bulunur. v_0, $T^{-1}Sv_0$ ve w elemanları lineer bağımısız olduğundan $\mu = \varepsilon = \beta$ sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak $\varepsilon = \mu = \xi = \alpha^*$ olduğu görülür. Böylece her $v \in V$ için $Tv = v\alpha^*$ sonucuna ulaşılır. Bu durumun geri kalan kısmı için V vektör uzayının F cismi üzerindeki boyutuna bağlı olarak

$$\dim V_F = 3 \quad \text{ise} \quad u = 0,$$

ve

$$\dim V_F \geq 4 \quad \text{ise} \quad u \notin v_0F + (T^{-1}Sv_0)F + wF,$$

olacak şekilde bir $u \in V$ elemanı seçelim. Eğer $\dim V_F \geq 4$ ise $u \notin v_0F + (T^{-1}Sv_0)F + wF$ elemanı seçerek ve benzer işlemleri tekrar yaparak her $u \in V$

için $Tu = u\alpha^*$ bağıntısı elde edilir. Eğer $\dim V_F = 3$ ise o zaman yukarıda yapılan muhakemelerden $v \in V$ için $Tv = v\alpha^*$ sonucuna ulaşılır. Burada her $v \in V$ ve her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} \sigma(x)v &= (TxT^{-1})v \\ &= T(xT^{-1}v) \\ &= x(T^{-1}v)\alpha^* \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, her $v \in V$ için $Tv = v\alpha^*$ olduğundan v yerine $T^{-1}v \in V$ yazılarak $T(T^{-1}v) = T^{-1}v\alpha^*$ olur. O zaman $v = T^{-1}v\alpha^*$ dır. Böylece her $x \in R$ için ve her $v \in V$ için

$$\begin{aligned} \sigma(x)v &= (TxT^{-1})v \\ &= T(xT^{-1}v) \\ &= x(T^{-1}v)\alpha^* \\ &= xv \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse her $x \in R$ için $(\sigma(x) - x)V = 0$ olur. V vektör uzayının R üzerindeki hareketi "faithful" olduğundan, her $x \in R$ için $\sigma(x) = x$ bulunur. O zaman her $x \in R$ için $\delta(x) = \sigma(x)S - Sx = xS - Sx$ olduğundan δ bir adi türeve dönüşür. Bu durumda Teorem 2.23 uyarınca $\delta = 0$ çelişkisine ulaşılır. Böylece $a = 0$ olduğu görülür.

Yardımcı Özellik 3.2. *F bir cisim, V F cismi üzerindeki bir vektör uzayı olmak üzere R, sıfırdan farklı sonlu ranklı lineer dönüşümleri içeren End*(V_F) *halkasının karakteristiği 2 olmayan yoğun bir alt halkası olsun. Ayrıca* $\dim V_F = 2$, *σ, R nin bir otomorfizması ve δ, R nin sıfırdan farklı bir skew türevi (σ-türevi) olsun. n, k pozitif sabit tamsayılar ve $a \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için* $a[\delta(x^n), x^n]_k = 0$ *ise o zaman* $a = 0$ *dır.*

İspat. Yardımcı Özellik 3.1 in ispatından her $x \in R$ için $\sigma(x) = qxq^{-1}$ ve $\delta(x) = cx - \sigma(x)c = cx - qxq^{-1}c$ olacak şekilde öyle bir $c \in \mathrm{End}(V)$ ve $q \in \mathrm{End}(V)$ tersinir yarı-lineer dönüşümlerinin var olduğunu biliyoruz. Böylece δ nın bu formunu hipotezde yerine yazarak, her $x \in R$ için $a[cx^n - qx^nq^{-1}c, x^n]_k = 0$ denklemi kolayca bulunur. Ayrıca $\dim V_F = 2$ olduğundan Yardımcı Özellik 2.9

uyarınca yukarıdaki son denklem $M_2(F)$ içinde sağlanır, daha açık bir ifadeyle her $x \in M_2(F)$ için $a[cx^n - qx^nq^{-1}c, x^n]_k = 0$ özdeşliğine ulaşılır. $M_2(F)$ halkası bir regüler halka olduğundan Teorem 2.7 den $Ra = Re$ olacak şekilde bir $e = e^2 \in M_2(F)$ elemanının var olduğunu biliyoruz. İspatın bundan sonraki kısmını $e = e^2 \in M_2(F)$ elemanının durumuna göre ayrı ayrı irdeleyelim.

İlk olarak eğer $e = 0$ ise o zaman $Ra = 0$ olup R nin asallığından $a = 0$ elde edilir. Diğer taraftan, eğer $e = 1$ ise o zaman $Ra = R$ olur. Ayrıca hipotezi soldan $r \in R$ elemanı ile çarparak, her $r, x \in R$ için $ra[\delta(x^n), x^n]_k = 0$ özdeşliğine ulaşılır ve bu her $x \in R$ için $Ra[\delta(x^n), x^n]_k = 0$ olmasını gerektirir. Son özdeşlikte $Ra = R$ olduğunu kullanarak, her $x \in R$ için $R[\delta(x^n), x^n]_k = 0$ elde edilir ve böylece R bir asal halka olduğundan

$$[\delta(x^n), x^n]_k = 0 \tag{3.35}$$

özdeşliğine kolayca ulaşılır. Bu durumda Teorem 2.24 gereğince $\delta = 0$ çelişkisine ulaşılır. Bu nedenle bundan sonra $e \neq 0, 1$ olduğu kabul edilebilir. Bu durumda Önerme 2.1 gereğince $Ra \cong Re$ olacak şekilde bir $e = e^2 \in M_2(F)$ vardır. Böylece, her $x \in M_2(F)$ ve her $e = e^2 \in M_2(F)$ elemanları için

$$e[cx^n - qx^nq^{-1}c, x^n]_k = 0 \tag{3.36}$$

elde edilir. Öncelikle (i, j). bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olarak tanımlanan matrisi e_{ij} ile gösterelim ve ayrıca $q_{ij}, p_{ij} \in F$ olmak üzere $p = q^{-1}c = \sum_{i,j} e_{ij}p_{ij}$ ve $q = \sum_{i,j} e_{ij}q_{ij}$ olarak alalım.

Şimde bazı seçilişlere göre hesaplamalar yaparak q dönüşümünün tersinir olmasıyla ilgili bir çelişki elde etmeye çalışalım:
İlk olarak (3.36) denkleminde e ve x yerine e_{11} alınırsa o zaman

$$0 = e_{11}[ce_{11} - qe_{11}q^{-1}c, e_{11}]_k$$

olur. Ayrıca bu özdeşlikte Tanım 2.40 kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= e_{11}[ce_{11} - qe_{11}q^{-1}c, e_{11}]_k \\ &= e_{11}\Big(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(e_{11})^i(ce_{11} - qe_{11}q^{-1}c)(e_{11})^{k-i}\Big) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi son denklemi sağdan e_{22} ile çarpalım. Bu durumda $e_{11}e_{22} = 0$ toplam terimleri olacağından, bu özdeşlik ancak $i = k$ olduğu durumda aşikar olmayan bir özdeşlik olur. Böylece

$$\begin{aligned} 0 &= e_{11}(-1)^k e_{11}(ce_{11} - qe_{11}q^{-1}c)e_{22} \\ &= (-1)^{k+1} e_{11}qe_{11}q^{-1}ce_{22} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bu denklemde $p = q^{-1}c = \sum_{i,j} e_{ij}p_{ij}$ ve $q = \sum_{i,j} e_{ij}q_{ij}$ elmanlarını yerine yazarak, $0 = (-1)^{k+1}e_{11}\sum_{i,j} e_{ij}q_{ij}e_{11}\sum_{i,j} e_{ij}p_{ij}e_{22}$ bulunur. Bu durumda $0 = (-1)^{k+1}q_{11}p_{12}e_{12}$ özdeşliği elde edilir. Bu durum ancak $q_{11}p_{12} = 0$ iken mümkündür. Böylece

$$q_{11}p_{12} = 0 \tag{3.37}$$

elde edilir. Bundan sonra yapılacak işlemlerde de aynı muhakemeler yapılacaktır; ancak, tekrar aynı işlemleri yapmamak adına sadece eleman seçilişleri ve sağdan (veya soldan) hangi eleman ile çarpıldığı verilerek, bazı sonuçlar elde edilmeye çalışılacaktır. Önerme 2.1 gereğince $Ra \cong Re \cong Rf$ olacak şekilde $e, f \in M_2(F)$ idempotent elemanları vardır. Şimdi (3.36) da e ve x yerine e_{22} alıp sağdan e_{11} ile çarparak

$$q_{22}p_{21} = 0 \tag{3.38}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.36) da e ve x yerine $e_{11} + e_{21}$ yazıp, elde edilen bağıntıyı sağdan e_{22} ile çarparak $0 = 2q_{12}p_{12} + 2q_{11}p_{12}$ bulunur. Hipotez gereği $char(R) \neq 2$ olduğundan ve ayrıca (3.37) den son bağıntı

$$q_{12}p_{12} = 0 \tag{3.39}$$

bağıntısına indirgenir. Son olarak (3.36) da e ve x yerine $e_{12} + e_{22}$ alarak, daha sonra elde edilen sonucu sağdan e_{11} ile çarparak $0 = 2q_{21}p_{21} + 2q_{22}p_{21}$ elde edilir. Böylece $\mathrm{char}(R) \neq 2$ olduğundan ve aynı zamanda (3.38) den

$$q_{21}p_{21} = 0 \tag{3.40}$$

elde edilir. Şimdi bazı irdelemeler yaparak çelişki elde etmeye çalışalım: İlk olarak $p_{12} \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.37) ve (3.39) dan $q_{11} = 0 = q_{12}$ bulunur ve bu sonuç $q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ olduğunu verir. Fakat bu durum q elemanının tersinir olmasıyla çelişir. Benzer şekilde, eğer $p_{21} \neq 0$ olursa o zaman (3.38) ve (3.40) dan $q_{22} = 0 = q_{21}$ bulunur ve bu sonuç ile $q =$

$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ formunda olup bu q elemanının tersinir olmasıyla çelişir. Her iki durumunda çelişkiye yol açmasından bundan sonra $p_{12} = 0 = p_{21}$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda p matrisi $M_2(F)$ de bir köşegen matris olur. Şimdi ψ, $R = M_2(F)$ nin herhangi bir otomorfizması olsun. (3.36) dan

$$\psi(e[cx^n - qx^n q^{-1}c, x^n]_k) = 0$$

olur. Otomorfizmanın k. mertebeden komutatörlere etkisi yine invaryant kalacağından ve ψ örten olduğundan

$$\psi(e)[\psi(c)y^n - \psi(q)y^n\psi(q^{-1}c), y^n]_k = 0$$

elde edilir. Burada ψ otomorfizma olduğundan bir $e \in R$ idempotenti için $\psi(e)$ de R nin bir idempotentidir. Yukarıda (3.36) için yapılan tüm irdelemeler sonucunda p köşegen matris sonucuna ulaştığımızdan, yukarıdaki ψ otomorfizmaları içeren özdeşlik için aynı irdelemeler yapılarak $\psi(p)$ nin de bir köşegen matris olduğu sonucuna ulaşırız. Burada özel olarak $\psi(x) = (1 + e_{12})x(1 - e_{12}) = x - xe_{12} + e_{12}x - e_{12}xe_{12}$ iç otomorfizmasını alalım. $\psi(x)$ in tanımından $\psi(p) = p - pe_{12} + e_{12}p - e_{12}pe_{12}$ olup bu $\psi(p) - p = -pe_{12} + e_{12}p - e_{12}pe_{12}$ olmasını gerektirir. Burada p köşegen bir matris olduğundan her $s \in \{1, 2\}$ için $p_{ss} \in F$ olmak üzere $p = \sum_s e_{ss}p_{ss}$ olarak alınabilir. Böylece son bağıntıda yerine yazılarak $\psi(p) - p = (p_{22} - p_{11})e_{12}$ elde edilir. Burada p ve $\psi(p)$ matrislerinin köşegen matrisler olmasından $\psi(p) - p$ de bir köşegen matris olacaktır ve bu durum ancak $p_{22} - p_{11} = 0$ olmasıyla mümkündür. Böylece $p_{22} = p_{11}$ elde edilir. Bu durumda $p = q^{-1}c$ matrisi bir skaler matristir ve $M_2(F)$ nin merkezine aittir. Fakat $p = q^{-1}c$ nin merkezde olması her $x \in R = M_2(F)$ için $\delta(x) = cx - \sigma(x)c = cx - qxq^{-1}c = cx - q(q^{-1}c)x = cx - cx = 0$ olmasını gerektirir. O zaman $\delta = 0$ çelişkisi elde edilir. Elde edilen bu çelişki $e \neq 0, 1$ durumunun söz konusu olmadığını gösterip ispatı tamamlar.

Yardımcı Özellik 3.3. *R değişmeli olmayan bir asal halka, n, k pozitif sabit tamsayılar ve q tersinir bir eleman olacak şekilde $c, q \in Q$ olsun. Eğer $0 \neq a \in R$ ve her $x \in R$ için $a[cx^n - qx^n q^{-1}c, x^n]_k = 0$ ise o zaman ya $q^{-1}c \in C$ dir, ya da $q, c \in C$ dir.*

İspat. Kolaylık olsun diye hipotezdeki özdeşliği her $x \in R$ için

$$\phi(x) = a[cx^n - qx^n q^{-1}c, x^n]_k = 0 \tag{3.41}$$

olarak adlandıralım. Böylece $\phi(x)$, R için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olur. Teorem 2.15 den, R ve Q aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağladığından $\phi(x)$, Q için de bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir ve bu durumda (3.41) özdeşliği Q için de sağlanır. Eğer $q^{-1}c \in C$ ise o zaman ispatlanacak bir şey yoktur. Bu sebeple $q^{-1}c \notin C$ olduğunu kabul edebiliriz. Diğer taraftan, eğer $q \in C$ ise o zaman (3.41) den her $x \in R$ için $a[[c, x^n], x^n]_k = 0$ elde edilir. Bu durumda Teorem 2.23 uyarınca $c \in C$ bulunur ve ispat biter. Böylece bundan sonra hem $q^{-1}c \notin C$ hem de $q \notin C$ olduğu durumu kabul edelim. Buradan (3.41) özdeşliği Q için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olur. Böylece Martindale Teoreminden (bkz. Teorem 2.8) Q, ilişkili bölümlü halkası olarak C yi kabul eden ve sıfırdan farklı bir $H = \mathrm{Soc}(R)$ "socle" a sahip bir primitif halkadır. Ayrıca Jacobson Teoreminden (bkz. Teorem 2.5) Q halkası, sıfırdan farklı sonlu ranklı lineer dönüşümleri içeren C üzerinde tanımlı bir V vektör uzayının lineer dönüşümlerinin oluşturduğu $\mathrm{End}(V_C)$ halkasının yoğun bir alt halkasına izomorftur. Bu nedenle V nin C üzerindeki boyutuna göre çözümü irdeleyelim. İlk olarak eğer $\dim_C V = 1$ ise Yardımcı Özellik 2.9 dan $\mathrm{End}(V_C) \cong M_1(C)$ olur ve $M_1(C)$ halkasının tek yoğun alt halkası kendisi olduğundan $R \cong C$ sonucuna varılır. Fakat R halkası değişmeli olmadığından bu bir çelişkidir. Böylece artık $\dim_C V \geq 2$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $\dim_C V = 2$ olursa, o zaman Yardımcı Özellik 3.2 den $a = 0$ çelişkisi elde edilir. Diğer taraftan, eğer $\dim_C V \geq 3$ olursa o zaman da Yardımcı Özellik 3.1 den tekrar $a = 0$ çelişkisine ulaşılır, bu ise ispatımızı tamamlar.

Şimdi Teorem 3.1 in ispatına geçebiliriz. İlk olarak bütünlük açısından Teorem 3.1 i hatırlatalım: R, karakteristiği 2 den farklı ve değişmeli olmayan bir asal halka, $a \in R$, k ve n sabit pozitif tamsayılar olmak üzere her $x \in R$ için $a[\delta(x^n), x^n]_k = 0$ olacak şekilde R nin sıfırdan farklı bir δ skew türevi (σ-türevi) varsa o zaman $a = 0$ dır.

Teorem 3.1 in İspatı Burada $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim ve hipotezdeki δ nın yapısına bağlı olarak ispatı iki alt duruma ayıralım:

DURUM 1 İlk olarak δ nın R halkasının bir X-iç türevi olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x \in R$ için $\delta(x) = cx - \sigma(x)c$ olacak şekilde bir $\sigma \in \mathrm{Aut}(R)$ ve $0 \neq c \in Q$ elemanı vardır. Bu forma sahip δ yı hipotezde kullanarak, her $x \in R$ için

$$a[cx^n - \sigma(x^n)c, x^n]_k = 0 \tag{3.42}$$

elde edilir. Teorem 2.15 den her $x \in Q$ için $a[cx^n - \sigma(x^n)c, x^n]_k = 0$ olur. Eğer σ, R halkasının bir X-iç otomorfizması ise o zaman $\sigma(x) = qxq^{-1}$ olacak şekilde bir tersinir $q \in Q$ elemanı vardır. Bu durumda $\delta(x) = cx - \sigma(x)c = cx - qxq^{-1}c$ formunda olup bunu hipotezde yerine yazarak, her $x \in Q$ için $a[cx^n - qx^nq^{-1}c, x^n]_k = 0$ elde edilir. Böylece Yardımcı Özellik 3.3 den ya $q^{-1}c \in C$ ya da $q, c \in C$ dir. Fakat her iki durum da $\delta = 0$ çelişkisini verir. O halde σ nın R nin bir X-dış otomorfizması olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda (3.42) R nin otomorfizmasını içeren aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olur ve Teorem 2.28 dan R aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği sağlar. Ayrıca Teorem 2.15 den (3.42) özdeşliği Q içinde sağlanır.

Alt Durum 1 İlk olarak σ, R halkasının bir Frobenius otomorfizması olmasın. Bu durumda Teorem 2.19 ve (3.42) özdeşliğinden her $x \in Q$ ve her $y \in Q$ için $a[cx^n - y^nc, x^n]_k = 0$ elde edilir. Şimdi özel olarak, y elemanı yerine x alalım ve $[c, x] := d(x)$ olarak tanımlayalım. Böylece her $x \in Q$ için $a[d(x^n), x^n]_k = 0$ bağıntısı elde edilir. Bu durumda, Teorem 2.23 den $a = 0$ veya $c \in C$ olduğu sonucuna varılır. Ancak bu durumda ispatın başında yapılan $a \neq 0$ kabulünden dolayı $c \in C$ olmak zorundadır. Ayrıca burada $\delta(x) = cx - \sigma(x)c$ tanımından ve hipotez gereği δ nın sıfırdan farklı olmasından dolayı $c \neq 0$ olmalıdır. (3.42) bağıntısında $\sigma(x) = y$ ve $0 \neq c \in C$ olduğu dikkate alınarak, her $x, y \in Q$ için

$$\begin{aligned} 0 &= a[cx^n - cy^n, x^n]_k \\ &= ac[x^n - y^n, x^n]_k \\ &= ac[y^n, x^n]_k \end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. Burada $0 \neq c \in C$ olduğundan ve Q nun asallığından her $x, y \in Q$ için $a[y^n, x^n]_k = 0$ elde edilir. Bu durumda, (Shiue, 2003, Proposition) daki önermenin ispatından R halkasının değişmeli olduğu sonucuna ulaşılır. Fakat bu sonuç hipotezle çelişir.

Altdurum 2 Altdurum 1 çelişki verdiğinden şimdi σ nın R halkasının bir Frobenius otomorfizması olduğunu kabul edelim. İlk olarak $\mathrm{char}(R) = 0$ ise o zaman Tanım 2.39 dan σ Frobenius otomorfizması C nin tüm elemanlarını sabit bırakan bir Frobenius otomorfizma olur ve bu durumda Teorem 2.18 den

σ, R halkasının bir X-iç otomomorfizması olur; ancak bu ise bir çelişkidir.

Şimdi $\mathrm{char}(R) = p > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Tanım 2.39 dan bazı sıfırdan farklı sabit n tamsayısı ve her $\lambda \in C$ elemanı için $\sigma(\lambda) = \lambda^{p^n}$ dır. Ayrıca $n = 0$ ise $\sigma(\lambda) = \lambda^{p^0} = \lambda^1 = \lambda$ olur ve bu $\sigma(\lambda) = \lambda$ olmasını verir. Böylece yukarıda incelenen duruma ulaşılır ve o durum çelişki verdiğinden $n \neq 0$ olduğu sonucu bulunur. Burada C nin sonlu veya sonsuz oluşuna göre C nin cebirsel kapanışını sırasıyla C veya F ile gösterelim. Bu durumda her $q \in Q$ için $\phi(q) = q \otimes 1$ ile tanımlı $\phi : Q \to Q \otimes_C F$ dönüşümü Q halkasının bir gömme dönüşümü olur. Böylece Q halkasını $Q \otimes_C F$ nin bir alt halkası olarak ele alabiliriz. Teorem 2.25 gereğince, $Q \otimes_C F$ halkası, genişletilmiş merkezi F olan bir asal halkadır. Ayrıca C nin herhangi bir otomorfizmasının p. dereceden bir kuvveti de C nin bir otomorfizmasıdır ve bu durum F için de geçerlidir. Daha açık bir şekilde ifade etmek istersek; F nin herhangi bir otomorfizmasının p. dereceden bir kuvveti de F nin bir otomorfizmasıdır. Böylece σ otomorfizması $Q \otimes_C F$ nin bir otomorfizmasına genişletilebilir ve üstelik bir Frobenius otomorfizma olma özelliğini korur. Ayrıca (Lanski, 2014, p. 144) deki ispatın içinde yapılan muhakemelerin ve işlemlerin çok benzerini (3.42) de kullanarak (3.42) özdeşliğinin $Q \otimes_C F$ halkası için aşikar olmayan ve otomorfizmaları içeren bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olduğu görülür. Böylece Martindale Teoreminden (bkz. Teorem 2.8) $Q \otimes_C F$, ilişkili bölümlü halkası olarak F yi kabul eden ve sıfırdan farklı bir H "socle" ına sahip primitif bir halka olur. Ayrıca Jacobson Teoreminden (bkz. Teorem 2.5) $Q \otimes_C F$, F üzerindeki V vektör uzayının lineer dönüşümlerinin oluşturduğu $\mathrm{End}(V_F)$ halkasının yoğun bir alt halkasına izomorftur. Böylece eğer $\dim_C V = 2$ ise o zaman Yardımcı Özellik 3.2 den $a = 0$ çelişkisi elde edilir. Diğer taraftan, eğer $\dim_C V \geq 3$ olursa o zaman da Yardımcı Özellik 3.1 den tekrar $a = 0$ çelişkisine ulaşılır.

DURUM 2 Artık δ nın R halkasının bir X-dış türevi olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca hipotezden, her $x \in R$ için $a[\delta(x^n), x^n]_k = 0$ dır ve δ σ-türevinin tanımında, Leibnitz açılımı $\delta(x^n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(x^i)\delta(x)x^{n-i-1}$ dır. Böylece her $x \in R$ için

$$0 = a\Big[\sum_{i=0}^{n-1} \sigma(x^i)\delta(x)x^{n-i-1}, x^n\Big]_k \tag{3.43}$$

bulunur. Burada δ bir X-dış türev olduğundan, Teorem 2.22 den, her $x \in R$

ve her $y \in R$ olmak üzere

$$0 = a\Big[\sum_{i=0}^{n-1} \sigma(x^i)yx^{n-i-1}, x^n\Big]_k$$

elde edilir. İspatın geri kalan ksımını σ otomorfizmasının X-iç olması ve X-dış olmasına bağlı olarak iki ayrı durumda ele alalım:

İlk olarak σ, R halkasının bir X-dış otomorfizması olsun. O zaman Teorem 2.20 uyarınca her $x \in R$ ve her $y, z \in R$ elemanları için

$$0 = a\Big[\sum_{i=0}^{n-1} z^i yx^{n-i-1}, x^n\Big]_k$$

özdeşliği bulunur. Özel olarak bu özdeşlikte z yerine 0 alarak, her $x, y \in R$ için $a[yx^{n-1}, x^n]_k = 0$ elde edilir. Burada y yerine yx alarak, her $x, y \in R$ için $a[yx^n, x^n]_k = 0$ bulunur. Bu durumda (Dhara et al., 2016, Theorem 1.2) den ya $a = 0$ dır ya da R değişmeli bir halkadır. Ancak her iki durum da çelişki verdiğinden σ yı R halkasının bir X-iç otomorfizma olarak alabiliriz. Şimdi her $x \in R$ için $\sigma(x) = qxq^{-1}$ olacak şekilde bir tersinir $q \in Q$ elemanıyla belirli R nin bir iç otomorfizması olsun. Burada σ nın bu formunu (3.43) de yazarak, her $x \in R$ için $a\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(qxq^{-1})^i yx^{n-i-1}, x^n\Big]_k = 0$ özdeşliğini elde ederiz. Eğer $\sigma = I_{id}$ ise o zaman δ bir adi türev dönüşümü olur ve Teorem 2.23 uyarınca $a = 0$ çelişkisine ulaşılır. Bu sebeple $\sigma \neq I_{id}$ olmalıdır. Böylece (3.43) özdeşliği R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olur. Bu durumda Martindale Teoreminden (bkz. Teorem 2.8) R, ilişkili bölümlü halkası olarak C yi kabul eden ve sıfırdan farklı bir $H = \mathrm{Soc}(R)$ "socle" ına sahip bir primitif halkadır. Jacobson Teoremi (bkz. Teorem 2.5) gereğince R halkası, C üzerindeki V vektör uzayının lineer dönüşümlerinin oluşturduğu $\mathrm{End}(V_C)$ halkasının yoğun bir alt halkasına izomorftur. Şimdi boyut üzerinden bazı irdelemeler yapalım:

İlk olarak $\dim_C V \geq 3$ olsun. Burada $\sigma \neq I_{id}$ olduğundan $q \notin C$ olduğu açıktır. Buna paralel olarak $q^{-1} \notin C$ dır. Bu durumda elemanı da merkezi olmayan bir eleman olur. Böylece $q^{-1}v$ ve v elemanları C-bağımsız olacak şekilde bir $v \in V$ elemanı her zaman bulunabilir. Ayrıca $\dim_C V \geq 3$ olduğundan $q^{-1}v$, v ve w elemanları C-bağımsız olacak şekilde bir $w \in V$ vektörü her zaman bulunur. R nin yoğunluğundan

$$xw = 0, \quad xv = v, \quad yw = v \ \text{ ve } \ xq^{-1}v = q^{-1}v$$

olacak şekilde $x, y \in R$ elemanları vardır. Bu seçilişleri (3.43) denkleminde kullanarak ve (3.43) e sağdan w elemanını uygulayarak, her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned}
0 &= a\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(qxq^{-1})^i yx^{n-i-1}, x^n\Big]_k w \\
&= a\sum_{j=0}^{k}(-1)^j(x^n)^j\left(\sum_{i=0}^{n-1}(qxq^{-1})^i yx^{n-i-1}\right)(x^n)^{k-j}w \\
&= a(-1)^k(x^n)^k\sum_{i=0}^{n-1}(qxq^{-1})^i yx^{n-i-1}w \\
&= a(-1)^k(x^n)^k(qxq^{-1})^{n-1}yw \\
&= a(-1)^k(x^n)^k qx^{n-1}q^{-1}v \\
&= a(-1)^k(x^n)^k v \\
&= a(-1)^k v
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$av = 0 \tag{3.44}$$

bulunur. Ayrıca $v + w$ elemanı da w ve $q^{-1}v$ elemanları ile C-bağımsız olduğundan, (3.44) de v yerine $v + w$ alınıp $av = 0$ olduğu kullanılarak

$$aw = 0 \tag{3.45}$$

olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan, R nin yoğunluğu kullanılırsa

$$xw = 0, \quad yw = qv, \quad xv = q^{-1}v \ \text{ ve } \ xq^{-1}v = q^{-1}v$$

olacak şekilde $x, y \in R$ elemanlarını seçilebilir. Böylece (3.43) ve yukarıdaki seçilişlerden

$$\begin{aligned}
0 &= a\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(qxq^{-1})^i yx^{n-i-1}, x^n\Big]_k w \\
&= a\sum_{j=0}^{k}(-1)^j(x^n)^j\left(\sum_{i=0}^{n-1}(qxq^{-1})^i yx^{n-i-1}\right)(x^n)^{k-j}w \\
&= a(-1)^k(x^n)^k\sum_{i=0}^{n-1}(qxq^{-1})^i yx^{n-i-1}w \\
&= a(-1)^k(x^n)^k(qxq^{-1})^{n-1}yw \\
&= a(-1)^k(x^n)^k qx^{n-1}v \\
&= a(-1)^k(x^n)^k v \\
&= a(-1)^k q^{-1}v
\end{aligned}$$

olup bu ise $aq^{-1}v = 0$ olmasını gerektirir. Bu işleme V vektör uzayının C üzerindeki boyutuna kadar uygun vektör seçilip devam edildiğinde, seçilen vektörler $\{v, q^{-1}v, w\}$ kümesiyle lineer bağımsız olacak şekilde yapılıp a elemanına ilgili vektörün uygulanmasının sıfır verdiği sonucuna ulaşılır. Böylece (3.44), (3.45) ve son bağıntı birlikte düşünüldüğünde $aV = 0$ sonucuna varılır. V vektör uzayının R üzerindeki hareketi "faithful" olduğundan $a = 0$ çelişkisi elde edilir.

Son olarak $\dim_C V = 2$ olduğu durumu ele alalım. O zaman Yardımcı Özellik 2.9 dan R halkası, C üzerindeki 2×2 tipindeki matrisler halkasına izomorftur. O zaman $q'_{rs}, a_{rs}, q_{rs} \in C$ olmak üzere q, a ve q^{-1} elemanlarını sırasıyla $q = \sum_{r,s} q'_{rs}e_{rs}$, $a = \sum_{r,s} a_{rs}e_{rs}$ ve $q^{-1} = \sum_{r,s} q_{rs}e_{rs}$ olarak gösterebiliriz. Eğer $q = \begin{pmatrix} q_{22} & -q_{12} \\ -q_{21} & q_{11} \end{pmatrix} \in M_2(C)$ matrisi tersinir bir matris ise o zaman q matrisinin tersinin $q^{-1} = \dfrac{1}{\det(q)} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ formunda olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca hipotezden her $x, y \in R$ için

$$0 = a\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(x^n)^j\left(\sum_{i=0}^{n-1}(qxq^{-1})^i yx^{n-i-1}\right)(x^n)^{k-j} \tag{3.46}$$

dır. Şimdi birkaç hesaplama yaparak ispatın geri kalan kısmında bize gerekli olacak bir takım verilere ulaşmaya çalışalım:

Eğer (3.46) da sırasıyla x yerine e_{11}, y yerine e_{22} yazılıp ve bu bağıntı soldan e_{11} ile çarpılırsa

$$0 = e_{11}a\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}((e_{11})^n)^j\left(\sum_{i=0}^{n-1}(qe_{11}q^{-1})^i e_{22}(e_{11})^{n-i-1}\right)((e_{11})^n)^{k-j}$$

elde edilir. Ancak $e_{22}e_{11} = 0$ olduğundan ve bu bağıntıda $e_{22}e_{11}$ geçişlerinin olmadığı tek durum $j = k$ ve $i = n-1$ olmasıdır. Bu nedenle $0 = (-1)^k e_{11}ae_{11}(qe_{11}q^{-1})^{n-1}e_{22}$ bağıntısına ulaşılır. Ayrıca $(qe_{11}q^{-1})^{n-1} = qe_{11}q^{-1}$ olduğunu son bağıntıda kullanıp $q = \sum_{r,s} q'_{rs}e_{rs}$, $a = \sum_{r,s} a_{rs}e_{rs}$ ve $q^{-1} = \sum_{r,s} q_{rs}e_{rs}$ formları yerine yazılarak $0 = e_{11}ae_{11}qe_{11}q^{-1}e_{22} = a_{11}q'_{11}q_{12} = a_{11}q_{22}q_{12}$ elde edilir ve böylece

$$0 = a_{11}q_{22}q_{12} \tag{3.47}$$

bağıntısına ulaşılır. Bundan sonra yapılacak işlemlerde de aynı muhakemeler yapılacaktır, ancak tekrar aynı işlemleri yapmamak adına sadece eleman seçilişleri ve elemanların sağ (sol) çarpılışları verilerek bazı sonuçlar elde edilmeye çalışılacaktır. Öncelikle (3.46) da sırasıyla x yerine e_{11}, y yerine e_{22} alarak ve bu bağıntıyı soldan e_{12} ile çarparak

$$0 = a_{21}q_{22}q_{12} \tag{3.48}$$

sonucuna varırız. Ayrıca (3.46) da sırasıyla x yerine e_{11}, y yerine e_{12} alarak ve bu bağıntıyı soldan e_{11} ile çarparak

$$0 = a_{11}q_{22}q_{11} \tag{3.49}$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.46) da sırasıyla x yerine e_{11}, y yerine e_{12} yazarak ve bu bağıntıyı soldan e_{22} ile çarparak

$$0 = a_{21}q_{22}q_{11} \tag{3.50}$$

elde edilir. Eğer (3.46) da sırasıyla x yerine e_{22}, y yerine e_{21} alınıp bu bağıntı soldan e_{22} ile çarpılırsa

$$0 = a_{22}q_{11}q_{22} \tag{3.51}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca (3.46) da sırasıyla x yerine e_{22}, y yerine e_{21} yazılıp bu bağıntı soldan e_{11} ile çarpılırsa

$$0 = a_{12}q_{11}q_{22} \tag{3.52}$$

elde edilir. Eğer (3.46) da sırasıyla x yerine e_{22}, y yerine e_{11} alınıp bu bağıntıyı soldan e_{11} ile çarparsak

$$0 = a_{12}q_{11}q_{21} \tag{3.53}$$

bulunur. Son olarak, (3.46) da sırasıyla x yerine e_{22}, y yerine e_{11} yazarak ve bu bağıntıyı soldan e_{22} ile çarparak

$$0 = a_{22}q_{11}q_{21} \tag{3.54}$$

sonucunu elde ederiz. Şimdi özel olarak R nin aşağıdaki iç otomorfizmalarını tanımlayalım: Her $x \in R$ için

$$\varphi(x) = (1 - e_{12})x(1 + e_{12}) = x + xe_{12} - e_{12}x - e_{12}xe_{12}$$
$$\psi(x) = (1 + e_{12})x(1 - e_{12}) = x - xe_{12} + e_{12}x - e_{12}xe_{12}$$

olsun. R halkası $a[\delta(x^n), x^n]_k = 0$ özdeşliğini sağladığından, $a[\delta(x^n), x^n]_k = 0$ özdeşliği R nin herhangi bir $\xi \in \{\varphi, \psi\}$ otomorfizması altında invaryant kalır, yani R, $\xi\left(a\left[\delta(x^n), x^n\right]_k\right)$ özdeşliğini de sağlar. Böylece, her $x, y \in R$ için

$$\xi(a)\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi(q)x\xi(q)^{-1}\right)^i yx^{n-i-1}, x^n\right]_k = 0 \tag{3.55}$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca yukarıda yapılan işlemlerde a ve q elemanları için elde edilen (3.53) ve (3.54) bağıntıları, benzer işlemleri yaparak $\xi(a)$ ve $\xi(q)$ elemanları için de sağlanır. Bu durumda $\xi(a)$ ve $\xi(q)$ elemanları da (3.53) ve (3.54) bağıntılarını sağlar. Örneğin (3.55) bağıntısında sırasıyla ξ yerine φ, x yerine e_{22} ve y yerine e_{11} alıp bu bağıntıyı soldan e_{11} ile çarparsak

$$0 = \varphi(a)_{12}\varphi(q^{'})_{22}\varphi(q)_{21} \tag{3.53a}$$

bağıntısını elde ederiz. Benzer şekilde (3.55) bağıntısında sırasıyla ξ yerine φ, x yerine e_{22} ve y yerine e_{11} yazarak ve bu bağıntıyı soldan e_{22} ile çarparak

$$0 = \varphi(a)_{22}\varphi(q^{'})_{22}\varphi(q)_{21} \tag{3.54a}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.55) bağıntısında sırasıyla ξ yerine ψ, x yerine e_{22} ve y yerine e_{11} alıp bu bağıntıyı soldan e_{11} ile çarparsak

$$0 = \psi(a)_{12}\psi(q^{'})_{22}\psi(q)_{21} \tag{3.53b}$$

bağıntısına ulaşılır. Son olarak (3.55) bağıntısında sırasıyla ξ yerine ψ, x yerine e_{22} ve y yerine e_{11} yazarak ve bu bağıntıyı soldan e_{22} ile çarparak

$$0 = \psi(a)_{22}\psi(q^{'})_{22}\psi(q)_{21} \tag{3.54b}$$

olur. Son elde edilen bağıntıları incelemeden önce ilk olarak basit bir muhakeme ile yukarıda elde edilen (3.53) ve (3.54) bağıntılarını indirgemeye çalışalım: Eğer q_{21} içeriği sıfır ise o zaman q tersinir bir matris ve $q = \begin{pmatrix} q_{22} & -q_{12} \\ -q_{21} & q_{11} \end{pmatrix}$ formunda olduğundan $q_{11} \neq 0$ ve $q_{22} \neq 0$ olmalıdır. Aksi halde bu q matrisinin tersinir bir matris olmasıyla çelişir. Böylece $q_{11} \neq 0$ ve $q_{22} \neq 0$ olduğu (3.49)-(3.52) bağıntılarında kullanılarak, (3.49) dan $a_{11} = 0$, (3.50) den $a_{21} = 0$, (3.51) den $a_{22} = 0$ ve son olarak (3.52) den $a_{12} = 0$ elde edilir. Böylece $a_{11} = 0 = a_{21} = a_{22} = a_{12}$ olur. Fakat bu durum $a = 0$ çelişkisini verdiğinden $q_{21} \neq 0$

olmalıdır. Bu durumda $q_{21} \neq 0$ olduğu (3.53) ve (3.54) de kullanılarak bu bağıntılar sırasıyla

$$0 = a_{12}q_{11} \tag{3.56}$$

$$0 = a_{22}q_{11} \tag{3.57}$$

olarak indirgenir. Şimdi (3.53a) da

$$\begin{aligned}\varphi(a)_{12} &= e_{11}(a + ae_{12} - e_{12}a - e_{12}ae_{12})e_{22}\\ &= a_{12} + a_{11} - a_{22} - a_{21}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(q^{'})_{22} &= e_{22}(q^{'} + q^{'}e_{12} - e_{12}q^{'} - e_{12}q^{'}e_{12})e_{22}\\ &= q^{'}_{22} + q^{'}_{21}\\ &= q_{11} - q_{21}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(q)_{21} &= e_{22}(q + qe_{12} - e_{12}q - e_{12}qe_{12})e_{11}\\ &= q_{21}\end{aligned}$$

bağıntılarını kullanarak $0 = a_{12}q_{11}q_{21} - a_{12}q_{21}q_{21} + a_{11}q_{11}q_{21} - a_{11}q_{21}q_{21} - a_{22}q_{11}q_{21} + a_{22}q_{21}q_{21} - a_{21}q_{11}q_{21} + a_{21}q_{21}q_{21}$ bulunur. Son bağıntıda (3.56), (3.57) ve $q_{21} \neq 0$ olduğu dikkate alınarak

$$0 = -a_{12}q_{21} + a_{11}q_{11} - a_{11}q_{21} + a_{22}q_{21} - a_{21}q_{11} + a_{21}q_{21} \tag{3.58}$$

elde edilir. Ayrıca (3.54a) da

$$\begin{aligned}\varphi(a)_{22} &= e_{22}(a + ae_{12} - e_{12}a - e_{12}ae_{12})e_{22}\\ &= a_{22} + a_{21}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(q^{'})_{22} &= e_{22}(q^{'} + q^{'}e_{12} - e_{12}q^{'} - e_{12}q^{'}e_{12})e_{22}\\ &= q^{'}_{22} + q^{'}_{21}\\ &= q_{11} - q_{21}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(q)_{21} &= e_{22}(q + qe_{12} - e_{12}q - e_{12}qe_{12})e_{11}\\ &= q_{21}\end{aligned}$$

bağıntılarını yerine yazarsak $0 = a_{22}q_{11}q_{21} - a_{22}q_{21}q_{21} + a_{21}q_{11}q_{21} - a_{21}q_{21}q_{21}$ olduğu görülür. O zaman (3.57) ve $q_{21} \neq 0$ kullanılırsa

$$0 = -a_{22}q_{21} + a_{21}q_{11} - a_{21}q_{21} \tag{3.59}$$

olur. Diğer taraftan, (3.53b) de

$$\begin{aligned} \psi(a)_{12} &= e_{11}(a - ae_{12} + e_{12}a - e_{12}ae_{12})e_{22} \\ &= a_{12} - a_{11} + a_{22} - a_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(q^{'})_{22} &= e_{22}(q^{'} - q^{'}e_{12} + e_{12}q^{'} - e_{12}q^{'}e_{12})e_{22} \\ &= q^{'}_{22} - q^{'}_{21} \\ &= q_{11} + q_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(q)_{21} &= e_{22}(q - qe_{12} + e_{12}q - e_{12}qe_{12})e_{11} \\ &= q_{21} \end{aligned}$$

bağıntılarını kullanarak $0 = a_{12}q_{11}q_{21} + a_{12}q_{21}q_{21} - a_{11}q_{11}q_{21} - a_{11}q_{21}q_{21} + a_{22}q_{11}q_{21} + a_{22}q_{21}q_{21} - a_{21}q_{11}q_{21} - a_{21}q_{21}q_{21}$ elde edilir. Burada (3.56), (3.57) bağıntıları ve $q_{21} \neq 0$ olduğu kullanılarak

$$0 = a_{12}q_{21} - a_{11}q_{11} - a_{11}q_{21} + a_{22}q_{21} - a_{21}q_{11} - a_{21}q_{21} \tag{3.60}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.54b) de

$$\begin{aligned} \psi(a)_{22} &= e_{22}(a - ae_{12} + e_{12}a - e_{12}ae_{12})e_{22} \\ &= a_{22} - a_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(q^{'})_{22} &= e_{22}(q^{'} - q^{'}e_{12} + e_{12}q^{'} - e_{12}q^{'}e_{12})e_{22} \\ &= q^{'}_{22} - q^{'}_{21} \\ &= q_{11} + q_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(q)_{21} &= e_{22}(q - qe_{12} + e_{12}q - e_{12}qe_{12})e_{11} \\ &= q_{21} \end{aligned}$$

olduğu kullanılarak $0 = \psi(a)_{22}\psi(q^{'})_{22}\psi(q)_{21} = a_{22}q_{11}q_{21} + a_{22}q_{21}q_{21} - a_{21}q_{11}q_{21} - a_{21}q_{21}q_{21}$ bulunur. Bu bağıntıda (3.57) ve $q_{21} \neq 0$ kullanılırsa

$$0 = a_{22}q_{21} - a_{21}q_{11} - a_{21}q_{21} \tag{3.61}$$

sonucuna varılır. Böylece (3.59) ve (3.61) bağıntıları kıyaslanarak $0 = -2a_{21}q_{21}$ bulunur ve $\mathrm{char}(R) \neq 2$ olduğundan $0 = a_{21}q_{21}$ elde edilir. Burada $q_{21} \neq 0$ olması

$$0 = a_{21} \tag{3.62}$$

olmasını gerektirir. Bu durumda (3.62) bağıntısını (3.61) de yazarak ve $q_{21} \neq 0$ olduğunu kullanarak

$$0 = a_{22} \tag{3.63}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.58) ve (3.60) bağıntılarını kıyaslayıp $\mathrm{char}(R) \neq 2$ olduğunu kullanarak $0 = -a_{11}q_{21} + a_{22}q_{21} - a_{21}q_{11}$ sonucuna varılır. (3.62) ve (3.63) ü son bağıntıda kullanarak $0 = -a_{11}q_{21}$ elde edilir. $q_{21} \neq 0$ olduğundan

$$0 = a_{11} \tag{3.64}$$

bulunur. Son olarak (3.62), (3.63) ve (3.64) bağıntılarını (3.58) de yazarak $0 = -a_{12}q_{21}$ olur ve burada $q_{21} \neq 0$ olduğunu kullanarak $0 = a_{12}$ sonucu elde edilir. Böylece $a_{11} = 0 = a_{12} = a_{21} = a_{22}$ olup bu $a = 0$ çelişkisini verir ve elde edilen bu çelişki ile ispat tamamlanır.

Son olarak Teorem 3.1 de dışlanan karakteristik koşulunun kaldırılamaz bir koşul olduğunu gösteren bir örnek verelim.

Örnek 3.1. *(Chuang et al., 2006) $R = M_2(GF(2))$, $a = e_{11}+e_{12}$, $g = e_{12}+e_{21}$ ve her $x \in R$ için $\sigma(x) = gxg^{-1}$ olsun. $b = e_{21} + e_{22}$ olmak üzere $\delta(x) = bx - \sigma(x)b$ dönüşümü R halkasının sıfırdan farklı bir iç skew türevidir. Böylece her $x \in R$ için $a[[\delta(x), x], x] = 0$ fakat $a \neq 0$ ve $\delta \neq 0$ dır.*

4 ASAL HALKALAR ÜZERİNDE b-GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Bu bölümde ilk olarak asal halkaların b-genelleştirilmiş türevlerini ihtiva eden bazı özdeşlikler, daha sonrasında ise bir asal halka üzerinde homomorfizma ya da ters-homomorfizma olarak hareket eden b-genelleştirilmiş türevler incelenecektir. İlk olarak ikinci bölümde verdiğimiz tanımları bütünlük olması amacıyla hatırlayalım.

S, R halkasının boştan farklı bir alt kümesi ve $F : R \to R$, R halkasının toplamsal bir dönüşümü olsun. Eğer her $x, y \in S$ için $F(xy) = F(x)F(y)$ koşulu sağlanıyorsa F toplamsal dönüşümüne S üzerinde homomorfizma olarak hareket eder denir. Diğer taraftan, eğer her $x, y \in S$ için $F(xy) = F(y)F(x)$ koşulu sağlanıyorsa F toplamsal dönüşümüne S üzerinde ters-homomorfizma olarak hareket eder denir.

(Albaş and Argaç, 2004), R değişmeli olmayan bir asal halka, d, R halkası üzerinde tanımlı bir genelleştirilmiş türev ve I_{id}, R üzerinde birim dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için

(i) $d([x, y]) = 0$ ise $d = 0$ dır,

(ii) $d([x, y]) = [x, y]$ ise $d = I_{id}$ dır,

(iii) $d([x, y]) = -[x, y]$ ise $d = -I_{id}$ dır,

(iv) $d(xy) = xy$ ise $d = I_{id}$ dır,

(v) $d(xy) = -xy$ ise $d = -I_{id}$ dır

olduğunu göstermişlerdir.

(Argaç, 2006), değişmeli olmayan bir yarı asal halkanın sıfırdan farklı bir ideali üzerinde bazı özdeşlikleri sağlayan halkanın bir türevini ele alarak halkanın yapısı ve halkanın türevi hakkında bir takım karakterizasyonlar vermiştir. Daha açık bir ifadeyle R bir yarı-asal halka, I, R nin sıfırdan farklı iki yanlı bir ideali ve d, R nin bir türevi olmak üzere, her $x, y \in R$ için

(i) $d([x, y]) = [x, y]$,

(ii) $d([x, y]) = -[x, y]$,

(iii) ya $d([x, y]) = [x, y]$ ya da $d([x, y]) = -[x, y]$

özdeşliklerinden herhangi biri sağlandığında d türevinin I ideali üzerinde bir "commuting" dönüşüm (her $x \in I$ için $[d(x), x] = 0$) olduğunu göstermiştir.

Ayrıca (Bell and Kappe, 1989), bir R asal halkasının bir d türevi R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali üzerinde homomorfizma ya da ters-homomorfizma olarak hareket ederse d türevinin sıfır türev olması gerektiğini göstermişlerdir.

Daha sonra (Asma et al., 2003), yukarıda sözü edilen problemi asal halkaların Lie idealleri üzerinde ele almışlardır. Bu çalışmada 2-burulmasız bir R asal halkasının her $x \in L$ için $x^2 \in L$ koşulunu sağlayacak şekildeki merkezi olmayan bir L Lie ideali üzerinde, R nin bir d türevinin homomorfizma ya da ters-homomorfizma olarak hareket ettiğinde d türevinin sıfır türev olması gerektiğini göstermişlerdir.

Daha sonra (Wang and You, 2007), "her $x \in L$ için $x^2 \in L$" gibi bir ağır koşulu kaldırmışlardır.

(Bell and Kappe, 1989) nin sonucunun literatürde farklı türev kavramlarının ele alınarak çeşitli genelleştirmeleri bulunmaktadır. (Albaş and Argaç, 2004), aynı problemi bir asal R halkasının sıfırdan farklı bir d genelleştirilmiş türevi için ele almışlar ve bu durumda d genelleştirilmiş türevinin R halkasının birim dönüşümü olması gerektiğini göstermişlerdir.

Ayrıca (Dhara, 2012), aynı problemi yarı-asal halkaların sıfırdan farklı iki yanlı idealleri üzerinde hareket eden genelleştirilmiş türevleri için ele almış ve bir takım sonuçlar elde etmiştir.

Bu bölümde yukarıda bahsedilen çalışmalardan motivasyon alınarak bir asal R halkasının bir g b-genelleştirilmiş türevinin her $x, y \in R$ için

(i) $g([x,y]) = 0$,

(ii) $g([x,y]) = \mp[x,y]$,

(iii) $g(xy) = \mp xy$,

(iv) $g(xy) = \mp yx$,

(v) $g(xy) \mp xy \in Z(R)$,

(vi) $g(xy) \mp yx \in Z(R)$,

(vii) $g(xy) = g(x)g(y)$,

$(viii)$ $g(xy) = g(y)g(x)$

özdeşliklerinden birini sağlaması durumları incelenecektir. Söz konusu problemlerin ispatına geçmeden önce ispatlarda sıklıkla kullanılacak bir Uyarıyı ele alarak ilerleyelim:

Uyarı 4.1. *R bir asal halka, Q, R halkasının sağ Martindale kesirler halkası* *ve $b \in Q$ olsun. Eğer g dönüşümü, R halkasının bir d türevi ile belirli bir b-genelleştirilmiş türevi ise o zaman her $x \in R$ için $(-g)(x) = -g(x)$ ile tanımlı $-g : R \to Q$ dönüşümü de R halkasının bir $-d$ türevi ile belirli bir b-genelleştirilmiş türevidir.*

İspat. Hipotezden g, R halkasının bir b-genelleştirilmiş türevi olduğundan, g nin tanımından hareketle her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y + bxd(y)$ özdeşliği vardır. Ayrıca d, R halkasının bir türevi olduğundan d dönüşümü R deki toplamayı da korur. Böylece her $x, y \in R$ için $(-d)(xy) = -d(xy) = -d(x)y - xd(y) = (-d)(x)y + x(-d)(y)$ olur. Buradan R nin bir d dönüşümünün R nin bir türevi olması $-d$ dönüşümünün de R nin bir türevi olmasını gerektirdiği görülür. Böylece her $x, y \in R$ için $(-g)(xy) = -g(xy) = -g(x)y - bxd(y) = (-g)(x)y + bx(-d)(y)$ olur. Bu durumda $-g$ dönüşümü R halkasının $-d$ türevi ile belirli bir b-genelleştirilmiş türevi olur.

Aşağıdaki teorem Teorem 2.10 un b-genelleştirilmiş türevlere bir genellemesidir. Bu bölümde aksi belirtilmedikçe R merkezi $Z(R)$, sağ Martindale kesirler halkası Q, genişletilmiş merkezi C, merkezi kapanışı RC olan bir asal halkayı gösterecektir. g ile R nin $b \in Q$ olmak üzere ilişkili dönüşümü d olan bir b-genelleştirilmiş türevini göstereceğiz.

Teorem 4.1. *R değişmeli olmayan bir asal halka olsun. Eğer g, R halkasının bir b-genelleştirilmiş türevi olmak üzere her $x, y \in R$ için $g([x, y]) = 0$ koşulu sağlanıyorsa o zaman $g = 0$ dır.*

İspat. Hipotezden g, R halkasının bir b-genelleştirilmiş türevi olduğundan her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y + bxd(y)$ dir. Burada eğer $b = 0$ veya $d = 0$ olarak seçilirse o zaman her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y$ elde edilir. Böylece Yardımcı Özellik 2.4 den g dönüşümü R halkasının bir sol çarpan dönüşümü olur ve her sol çarpan dönüşümü bir genelleştirilmiş türev dönüşümü olduğundan g, R halkasının bir genelleştirilmiş türevi olur. Bu durumda Teorem 2.10 uyarınca $g = 0$ bulunur. Şimdi hem $b \neq 0$ hem de $d \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Hipotezde y yerine yx yazarak ve tekrar hipotezi kullanarak, her $x, y \in R$ için $0 = g([x, yx]) = g([x, y]x) = g([x, y])x + b[x, y]d(x) = b[x, y]d(x)$ bulunur. Böylece her $x, y \in R$ için

$$b[x, y]d(x) = 0 \tag{4.1}$$

elde edilir. Ayrıca $r \in R$ olmak üzere (4.1) de y yerine yr yazarak, her $r, x, y \in R$ için

$$b[x,y]rd(x) + by[x,r]d(x) = 0 \tag{4.2}$$

bağıntısı bulunur. Teorem 2.27 gereğince R ve Q aynı diferansiyel özdeşliği sağladığından Q halkası da (4.2) özdeşliğini sağlar. Şimdi (4.2) de y yerine b yazarak, her $r, x \in Q$ için

$$b[x,b]rd(x) + b^2[x,r]d(x) = 0 \tag{4.3}$$

olduğu görülür. Bu durumda (4.1) ve (4.3) denklemlerini birlikte kullanarak, her $r, x \in Q$ için

$$b[x,b]rd(x) = 0 \tag{4.4}$$

elde edilir. Böylece Q nun bir asal halka olmasını son özdeşlikte kullanarak, her $x \in Q$ elemanı için ya $b[x,b] = 0$ ya da $d(x) = 0$ elde edilir. Şimdi H=$\{x \in Q : b[x,b] = 0\}$ ve K=$\{x \in Q : d(x) = 0\}$ olacak şekilde iki küme tanımlayalım. Bu tanımlardan hareketle $(H,+)$ ve $(K,+)$ nın, $(Q,+) = (H,+)\bigcup(K,+)$ olacak şekilde $(Q,+)$ nın toplamsal iki alt grubu olduğu kolaylıkla görülür. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından, bu durumda ya $Q = H$ olmalıdır ya da $Q = K$ olmalıdır. İspatın ilk kısımlarında $d \neq 0$ olarak kabul edildiğinden her $x \in Q$ için $b[x,b] = 0$ olmak zorundadır. Bu durumda $b \neq 0$ olduğundan Yardımcı Özellik 2.7 gereğince $b \in C$ bulunur. Son elde edilen bağıntıyı (4.3) de kullanarak, her $r, x \in Q$ için $b^2[x,r]d(x) = 0$ bulunur. Ayrıca son bağıntıda r yerine yr yazarak ve $0 \neq b \in C$ olduğunu kullanarak, her $r, x, y \in Q$ için $[x,y]rd(x) = 0$ elde edilir. Q bir asal halka olduğundan, son özdeşlikten her $x \in Q$ için ya $[x,y] = 0$ dır ya da $d(x) = 0$ dır sonucuna ulaşılır. Şimdi $H^{'} = \{x \in Q : x \in C\}$ ve $K^{'} = \{x \in Q : d(x) = 0\}$ olacak şekilde iki küme tanımlayalım. Yukarıda yapılan muhakemenin aynısını yaparak ya $Q = H^{'}$ ya da $Q = K^{'}$ sonucuna ulaşılır. Eğer $Q = H^{'}$ olarak alınırsa o zaman bu durum Q halkasının değişmeli olmasını verir ve bu aynı zamanda R halkasının da değişmeli olmasını gerektirir; ancak hipotezden R halkası değişmeli bir halka olmadığından bu bir çelişkidir. Şimdi $Q = K^{'}$ olduğu durumu ele alalım, o zaman $d = 0$ dır ve yukarıdaki kabulden dolayı bu durum da çelişkidir, böylece elde edilen bu çelişkilerle ispat tamamlanır.

Aşağıdaki iki teorem Teorem 2.11 ve Teorem 2.12 çalışmalarının bir asal R halkasının bir b-genelleştirilmiş türevine genellemeleridir.

Teorem 4.2. *R değişmeli olmayan bir asal halka ve g, R nin sıfırdan farklı bir b-genelleştirilmiş türevi olmak üzere her $x, y \in R$ için $g([x, y]) = [x, y]$ veya her $x, y \in R$ için $g([x, y]) = -[x, y]$ ise o zaman sırasıyla $g = I_{id}$ dir, veya $g = -I_{id}$ dir.*

İspat. İlk olarak her $x, y \in R$ için $g([x, y]) = [x, y]$ olduğu durumu kabul edelim. Hipotezden g bir b-genelleştirilmiş türev olduğundan, g nin tanımından her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y + bxd(y)$ özdeşliği vardır. Bu özdeşlikte eğer $b = 0$ veya $d = 0$ alınırsa, o zaman her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y$ elde edilir. Böylece Yardımcı Özellik 2.4 den g dönüşümü R halkasının bir sol çarpan dönüşümü olur. Her sol çarpan dönüşümü bir genelleştirilmiş türev dönüşümü olduğundan g, R halkasının bir genelleştirilmiş türevi olur. Bu durumda Teorem 2.11 den $g = I_{id}$ elde edilir.

Şimdi hem b hem de d nin sıfırdan farklı olduklarını kabul edebiliriz. Hipotezde y yerine yx yazarak ve tekrar hipotezi kullanarak, her $x, y \in R$ için $[x, y]x = [x, yx] = g([x, yx]) = g([x, y]x) = g([x, y])x + b[x, y]d(x)$ elde edilir. Son bağıntıdan, her $x, y \in R$ için $b[x, y]d(x) = 0$ bulunur. Teorem 4.1 in ispatında her $x, y \in R$ için $b[x, y]d(x) = 0$ özdeşliği sağlandığı durumda ya $d = 0$ ya da R halkasının değişmeli olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştı, ancak her iki durumda çelişkiye neden olur. Şimdi, her $x, y \in R$ için $g([x, y]) = -[x, y]$ olduğu durumu ele alalım. Yukarıda yapılan muhakemelerden, eğer $b = 0$ veya $d = 0$ ise o zaman g dönüşümünün R halkasının bir genelleştirilmiş türevi olduğu elde edilir. Böylece Teorem 2.11 gereğince $g = -I_{id}$ bulunur. Artık hem b hem de d nin sıfırdan farklı olduklarını kabul edebiliriz. Şimdi yukarıda yapılan muhakemenin çok benzerlerini yaparak istenilen durumu elde etmeye çalışalım. İlk olarak $g([x, y]) = -[x, y]$ hipotezinde y yerine yx yazarak ve tekrar hipotezi kullanarak, her $x, y \in R$ için $-[x, y]x = -[x, yx] = g([x, yx]) = g([x, y]x) = g([x, y])x + b[x, y]d(x)$ elde edilir. Son bağıntıyı düzenleyerek, her $x, y \in R$ için $b[x, y]d(x) = 0$ bulunur. İspatın ilk kısmından bu durum bir çelişki verir ve bu çelişkiyle ispat tamamlanır.

Şimdi bu teoremin doğal bir sonucunu verelim.

Sonuç 4.1. *R değişmeli olmayan bir asal halka ve g, R halkasının sıfırdan farklı bir b-genelleştirilmiş türevi olmak üzere her $x, y \in R$ için ya $g([x,y]) = [x,y]$ ya da $g([x,y]) = -[x,y]$ özdeşlikleri sağlanırsa o zaman sırasıyla ya $g = I_{id}$ dir ya da $g = -I_{id}$ dir.*

İspat. Hipotezden, R halkasının her $x, y \in R$ için $g([x,y]) = [x,y]$ veya $g([x,y]) = -[x,y]$ olacak şekilde bir g b-genelleştirilmiş türevinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda her bir $y \in R$ için R halkasının $H_y = \{x \in R : g([x,y]) = [x,y]\}$ ve $K_y = \{x \in R : g([x,y]) = -[x,y]\}$ olacak şekilde iki alt kümesini tanımlayalım. Böylece H_y ve K_y, $(R,+)$ nin $(R,+) = (H_y,+) \bigcup (K_y,+)$ olacak şekildeki toplamsal iki alt grubu olur. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından her bir $y \in R$ için ya $R = H_y$ dir, ya da $R = K_y$ olmalıdır. Daha önce yapılan muhakemenin çok benzerini yaparak, ya $R = \{y \in R : R = H_y\}$, ya da $R = \{y \in R : R = K_y\}$ olması gerektiği sonucuna varılır. Bu durumda Teorem 4.2 kullanılarak istenilen sonuçlara ulaşılır.

Teorem 4.3. *R değişmeli olmayan bir asal halka olsun. R halkasının sıfırdan farklı bir b-genelleştirilmiş türevi g için*

(i) her $x, y \in R$ için $g(xy) = xy$,

(ii) her $x, y \in R$ için $g(xy) = -xy$,

(iii) her $x, y \in R$ için ya $g(xy) = xy$ ya da $g(xy) = -xy$

özdeşliklerinden herhangi biri sağlanırsa o zaman ya $g = I_{id}$ veya $g = -I_{id}$ dır.

İspat. İspata ilk olarak (i) şıkkının sağlandığını kabul ederek başlayalım. Bu durumda her $x, y \in R$ için $g(xy) = xy$ olur. Ayrıca hipotezden her $x, y \in R$ için $g(yx) = yx$ dir. Son iki bağıntıdan, her $x, y \in R$ için $g([x,y]) = [x,y]$ olur ve Teorem 4.2 den $g = I_{id}$ elde edilir.

Şimdi her $x, y \in R$ için ya $g(xy) = -xy$ olsun. Diğer taraftan, hipotez gereği her $x, y \in R$ için $g(yx) = -yx$ doğal olarak vardır. Son iki bağıntıdan, her $x, y \in R$ için $g([x,y]) = -[x,y]$ olur ve Teorem 4.2 den $g = -I_{id}$ bulunur.

Son olarak her $x, y \in R$ için ya $g(xy) = xy$ ya da $g(xy) = -xy$ olduğu durumu kabul edelim. Her $x \in R$ için $H_x = \{y \in R : g(xy) = xy\}$ ve $K_x = \{y \in R : g(xy) = -xy\}$ olacak şekilde R nin iki alt kümesini tanımlayalım.

Sonuç 4.1 in ispatında kullanılan tekniğin aynısını kullanarak, ya $R = H_x$ dır, ya da $R = K_x$ dır, sonucuna varılır. Eğer $R = H_x$ ise (i) den, eğer $R = K_x$ ise (ii) den ispat tamamlanır.

Teorem 4.4. *R bir asal halka olsun. Her $x, y \in R$ için $g(xy) = yx$ veya $(g(xy) = -yx)$ olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı bir g b-genelleştirilmiş türevi varsa o zaman R değişmelidir ve sırasıyla $g = I_{id}$ dir, veya $g = -I_{id}$ dir.*

İspat. İlk olarak her $x, y \in R$ için $g(xy) = yx$ olduğunu kabul edelim. Buradan $z \in R$ olmak üzere y yerine yz yazarak, her $x, y, z \in R$ için $g((xy)z) = z(xy)$ elde edilir. Diğer taraftan, her $x, y, z \in R$ için $g(x(yz)) = (yz)x$ bulunur. Son iki bağıntı karşılaştırıldığında, her $x, y, z \in R$ için $[zx, y] = 0$ olduğu görülür. Teorem 2.15 gereğince son özdeşlik Q içinde sağlanır. Böylece bu özdeşlikte z yerine 1 yazarak, her $x, y \in Q$ için $[x, y] = 0$ bulunur ve bu Q halkasının değişmeli olmasını gerektirir. Ayrıca Q halkasının değişmeli olması R halkasının da değişmeli olmasını gerektirir.

Şimdi her $x, y \in R$ için $g(xy) = -yx$ olduğunu kabul edelim ve $-g$ dönüşümünü f olarak adlandıralım. Hipotezden g dönüşümü R nin d türevi ile belirli bir b-genelleştirilmiş türevi olduğundan Uyarı 4.1 gereğince $f = -g$ dönüşümü de R nin $-d$ türevi ile belirli bir b-genelleştirilmiş türevidir. Böylece her $x, y \in R$ için $f(xy) = (-g)(xy) = -g(xy) = -(-yx) = yx$ olur ve bu durumda her $x, y \in R$ için $f(xy) = yx$ elde edilir. Bu durumda ispatın ilk kısmından R halkasının değişmeli olduğu kolayca görülür.

Böylece her iki durumda da R halkasının değişmeli olduğu bulunur. Eğer her $x, y \in R$ için $g(xy) = yx$ ise R değişmeli olduğundan her $x, y \in R$ için $g(xy) = xy$ olur. Burada g nin tanımından her $x, y \in R$ için $(g(x) - x)y + bxd(y) = 0$ dır. Bu özdeşlikte y yerine yz yazarak ve özdeşliği kullanarak her $x, y, z \in R$ için $(g(x) - x)yz + bxd(y)z + bxyd(z) = 0$ bulunur. Son iki bağıntıdan her $x, y, z \in R$ için $bxyd(z) = 0$ olur. Teorem 2.27 den Q halkası da son özdeşliği sağlar. Böylece Q nun asallığından ya $b = 0$ ya da $d = 0$ dır. Her iki durumda da her $x, y \in R$ için $(g(x) - x)y = 0$ olur ve R nin asallığı $g = I_{id}$ olmasını gerektirir.

Eğer her $x, y \in R$ için $g(xy) = -yx$ ise R değişmeli olduğundan her $x, y \in R$ için $g(xy) = -xy$ olur. Burada g nin tanımından her $x, y \in R$ için

$(g(x)+x)y+bxd(y)=0$ dır. Bu özdeşlikte y yerine yz yazarak ve özdeşliği kullanarak her $x,y,z \in R$ için $(g(x)+x)yz+bxd(y)z+bxyd(z)=0$ bulunur. Son iki bağıntıdan her $x,y,z \in R$ için $bxyd(z)=0$ olur. Teorem 2.27 den Q halkası da son özdeşliği sağlar. Böylece Q nun asallığından ya $b=0$ ya da $d=0$ dır. Her iki durumda da her $x,y \in R$ için $(g(x)+x)y=0$ olur ve R nin asallığı $g=-I_{id}$ olmasını gerektirir ve böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem (Ashraf et al., 2007, Theorem 2.1) in bir asal R halkasının b-genelleştirilmiş türevine genellemesidir.

Teorem 4.5. *R bir asal halka olsun. Her $x,y \in R$ için $g(xy)-xy \in Z(R)$ $(g(xy)+xy \in Z(R))$ olacak şekilde R halkasının bir g b-genelleştirilmiş türevi varsa o zaman ya R değişmelidir ya da sırasıyla $g=I_{id}$ veya $g=-I_{id}$ dir.*

İspat. İlk olarak her $x,y \in R$ için $g(xy)-xy \in Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Eğer $b=0$ veya $d=0$ ise g nin tanımından, her $x,y \in R$ için $g(xy)=g(x)y$ olur. Hipotezde y yerine yz alarak, her $x,y,z \in R$ için $g((xy)z)-xyz \in Z(R)$ olur ve bu bağıntıda her $x,y \in R$ için $g(xy)=g(x)y$ olduğu kullanılırsa, her $x,y,z \in R$ için $(g(xy)-xy)z \in Z(R)$ bulunur. Yardımcı Özellik 2.1 gereğince son bağıntıdan ya her $x,y \in R$ için $g(xy)=xy$ dır, ya da her $z \in R$ için $z \in Z(R)$ olduğu elde edilir. Eğer her $z \in R$ için $z \in Z(R)$ ise bu R halkasının değişmeli olmasını gerektirir. Eğer R değişmeli ise ispat tamamlanır. Şimdi her $x,y \in R$ için $g(xy)=xy$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 4.3 den $g=I_{id}$, istenilen durumu elde edilir. Şimdi hem b hem de d nin sıfırdan farklı olduklarını kabul edelim. Kabulde $z \in R$ olmak üzere y yerine yz yazarak, $g((xy)z)-xyz \in Z(R)$ bulunur. Son bağıntıyı düzenleyerek, her $x,y,z \in R$ için $(g(xy)-xy)z+bxyd(z) \in Z(R)$ elde edilir. Ayrıca $(g(xy)-xy)z+bxyd(z)$ bağıntısı R halkasının merkezine ait olduğundan, her $x,y,z \in R$ için $[z,(g(xy)-xy)z+bxyd(z)]=0$ olur. Son bağıntıda hipotezi ve komutatör özelliklerini kullanarak, her $x,y,z \in R$ için $0=[z,(g(xy)-xy)z]+[z,bxyd(z)]=[z,bxyd(z)]$ bulunur. Böylece her $x,y,z \in R$ için

$$[z,bxyd(z)]=0 \tag{4.5}$$

olur. İspatın geri kalan kısmını iki ayrı durumda ele alalım. İlk olarak $b \in C$ olduğunu kabul edelim ve (4.5) de $0 \neq b \in C$ olduğu kullanılarak her $x,y,z \in R$

için

$$0 = [z, xyd(z)] = xy[z, d(z)] + x[z, y]d(z) + [z, x]yd(z) \tag{4.6}$$

bağıntısına ulaşılır. Ayrıca $r \in R$ olmak üzere (4.6) da x yerine rx yazarak ve (4.6) yı kullanarak, her $r, x, y, z \in R$ için $0 = r(xy[z, d(z)] + x[z, y]d(z) + [z, x]yd(z)) + [z, r]xyd(z) = [z, r]xyd(z)$ elde edilir ve böylece her $r, x, y, z \in R$ için $[z, r]xyd(z) = 0$ olduğu görülür. Teorem 2.27 den Q halkası da bu özdeşliği sağlar. Buradan son özdeşlikte y yerine 1 yazılarak, her $r, x, z \in Q$ için $[z, r]xd(z) = 0$ bulunur ve Q bir asal halka olduğundan son özdeşlik her bir $z \in Q$ elemanı için ya $[r, z] = 0$ ya da $d(z) = 0$ olmasını gerektirir. Şimdi $H = \{z \in Q : z \in C\}$ ve $K = \{z \in Q : d(z) = 0\}$ olacak şekilde Q nun iki alt kümesini oluşturalım. Buradan hareketle $(H, +)$ ve $(K, +)$, $(Q, +) = (H, +) \bigcup (K, +)$ olacak şekilde $(Q, +)$ nın toplamsal iki alt grubu olduğu açıktır. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından, bu durumda ya $Q = H$ olmalıdır, ya da $Q = K$ olmalıdır. İspatın ilk kısımlarında $d \neq 0$ olarak kabul edildiğinden, her $z \in Q$ için $z \in C$ elde edilir ve bu durum Q nun dolayısıyla R halkasının değişmeli olmasına neden olur ve ispat biter.

Şimdi $b \notin C$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca Teorem 2.27 den Q halkası da (4.5) özdeşliğini sağlar ve böylece (4.5) de x yerine bx yazarak ve (4.5) bağıntısını kullanarak, her $x, y, z \in Q$ için $[z, b^2xyd(z)] = b[z, bxyd(z)] + [z, b]bxyd(z) = 0$ elde edilir. Son özdeşlik (4.5) ile kıyaslanırsa, her $x, y, z \in Q$ için $[z, b]bxyd(z) = 0$ bulunur ve bu bağıntıda y yerine 1 yazarak, her $x, z \in Q$ için $[z, b]bxd(z) = 0$ elde edilir. Bu durumda Q nun bir asal halka olması her bir $z \in Q$ için ya $[z, b]b = 0$ ya da $d(z) = 0$ olmasını gerektirir. Şimdi $H = \{z \in Q : [z, b]b = 0\}$ ve $K = \{z \in Q : d(z) = 0\}$ olacak şekilde Q nun iki alt kümesini oluşturalım. Yukarıda yapılan muhakemeden, $d \neq 0$ olduğundan, her $z \in Q$ için $[z, b]b = 0$ elde edilir. Bu özdeşlikte $r \in Q$ olmak üzere z yerine zr yazarak ve özdeşliği tekrar kullanarak, her $r, z \in Q$ için $[z, b]rb + z[r, b]b = 0$ bulunur. Son iki özdeşlik kıyaslanırsa, her $r, z \in Q$ için $[z, b]rb = 0$ olduğu kolayca görülür. Bu durumda Q bir asal halka ve $b \neq 0$ olduğundan son özdeşlikten $b \in C$ çelişkisine ulaşılır. O halde R halkası değişmelidir.

Şimdi, her $x, y \in R$ için $g(xy) + xy \in Z(R)$ olduğunu düşünelim. Ayrıca $g(xy) + xy \in Z(R)$ olması $-(g(xy) + xy) \in Z(R)$ olmasını gerektirdiğinden hipotezi düzenleyerek, her $x, y \in R$ için $-(g(xy) + xy) = -g(xy) - xy \in$

$Z(R)$ olduğu kolayca görülür. Şimdi her $x \in R$ için $(-g)(x) = -g(x)$ olarak tanımlayalım ve bu tanımdan hareketle son bağıntıyı düzenleyerek, her $x, y \in R$ için $(-g)(xy) - xy \in Z(R)$ olur. Bu durumda $-g$ dönüşümünü f olarak adlandıralım ve hipotezden g dönüşümü R nin d türevi ile belirli bir b-genelleştirilmiş türevi olduğundan Uyarı 4.1 gereğince $f = -g$ dönüşümü de R nin $-d$ türevi ile belirli bir b-genelleştirilmiş türevidir. Böylece her $x, y \in R$ için $f(xy) - xy \in Z(R)$ özdeşliği sağlanır. Bu durumda ispatın ilk kısmından ya R değişmelidir, ya da $f = I_{id}$ dir sonucuna varılır. Böylece f nin tanımından ya R değişmelidir, ya da $g = -I_{id}$ dir bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.6. *R bir asal halka ve R nin bir g b-genelleştirilmiş türevi her $x, y \in R$ için $g(xy) - yx \in Z(R)$ $(g(xy) + yx \in Z(R))$ koşulunu sağlıyorsa o zaman R değişmelidir.*

İspat. İlk olarak her $x, y \in R$ için $g(xy) - yx \in Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Eğer $b = 0$ veya $d = 0$ ise g nin tanımından hareketle her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y$ olur ve Yardımcı Özellik 2.4 den her $x \in R$ için $g(x) = ax$ olacak şekilde bir $a \in Q(RC)$ vardır. Son bağıntıda elde edilen g nin formunu hipotezde kullanarak, her $x, y \in R$ için

$$axy - yx \in Z(R) \tag{4.7}$$

bağıntısına ulaşılır. (4.7) de x yerine xz alarak, her $x, y, z \in R$ için

$$axzy - yxz \in Z(R) \tag{4.8}$$

elde edilir. Ayrıca (4.7) bağıntısı her $y, z \in R$ için $azy - yz \in Z(R)$ formunda da yazılabilir. Bu formda y yerine yx alınırsa, o zaman her $x, y, z \in R$ için

$$azyx - yxz \in Z(R) \tag{4.9}$$

olduğu görülür. (4.8) ve (4.9) bağıntılarını kıyaslayarak, her $x, y, z \in R$ için

$$a[x, zy] \in Z(R) \tag{4.10}$$

sonucuna ulaşılır, böylece her $x, y, z \in R$ için $a[x, z]y + az[x, y] \in Z(R)$ olur. Son bağıntıda y yerine yr alınırsa, o zaman her $r, x, y, z \in R$ için $(a[x, z]y + az[x, y])r + azy[x, r] \in Z(R)$ bulunur. Burada bu bağıntının halkanın merkezinde olmasını ve komutatör özelliklerini kullanarak, her $r, x, y, z \in R$ için

$$[r, azy[x, r]] = 0 \tag{4.11}$$

elde edilir. Teorem 2.15 gereğince (4.11) bağıntısı Q içinde sağlanır. Böylece (4.11) de $z = 1 \in Q$ alınırsa, her $r, x, y \in Q$ için

$$[r, ay[x, r]] = 0 \tag{4.12}$$

kolayca görülür. (4.12) de y yerine yas alınıp (4.12) kullanılırsa, o zaman her $r, s, x, y \in Q$ için $[r, ay]as[x, r] = 0$ sonucuna ulaşılır. Buradan Q bir asal halka olduğundan her $r \in Q$ için ya $[r, ay]a = 0$ dır, ya da $[x, r] = 0$ bulunur. Şimdi $H = \{r \in Q : [r, ay]a = 0\}$ ve $H = \{r \in Q : [x, r] = 0\}$ olacak şekilde Q nun iki alt kümesini oluşturalım. Buradan hareketle $(H, +)$ ve $(K, +)$ nın, $(Q, +) = (H, +) \bigcup (K, +)$ olacak şekilde $(Q, +)$ nın toplamsal iki alt grubu olduğu kolaylıkla görülür. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından, bu durumda ya $Q = H$ olmalıdır ya da $Q = K$ olmalıdır. Eğer $Q = K$ ise o zaman Q halkası dolayısıyla R halkası değişmeli olur ve ispat biter. Şimdi $Q = H$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $r, y \in Q$ için $[r, ay]a = 0$ olur. Buradan $y = 1 \in Q$ alınırsa, her $r \in Q$ için

$$[r, a]a = 0 \tag{4.13}$$

bulunur. (4.13) de r yerine rs alıp (4.12) kullanılırsa, her $r, s \in Q$ için

$$[r, a]sa = 0 \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.14) de s yerine sr alarak, her $r, s \in Q$ için

$$[r, a]sra = 0 \tag{4.15}$$

bulunur. Diğer taraftan, (4.14) bağıntısı sağdan r ile çarpılırsa, o zaman her $r, s \in Q$ için

$$[r, a]sar = 0 \tag{4.16}$$

bağıntısına ulaşılır. (4.15) ve (4.16) bağıntılarını kıyaslayarak, her $r, s \in Q$ için $[r, a]s[r, a] = 0$ elde edilir. Q nun asallığından $a \in C$ olduğu görülür. (4.10) ve

Yardımcı Özellik 2.1 den $a = 0$ ya da her $x, y, z \in R$ için $[x, zy] \in Z(R)$ olur. Eğer $a = 0$ ise (4.7) den her $x, y \in R$ için $yx \in Z(R)$ olur ve bu durumda R halkası değişmelidir. Diğer taraftan, eğer her $x, y, z \in R$ için $[x, zy] \in Z(R)$ ise o zaman R nin değişmeli olduğu kolayca görülür.

Şimdi hem b hem de d nin sıfırdan farklı olduklarını kabul edelim. Hipotezde y yerine yz alarak, her $x, y, z \in R$ için $g((xy)z) - yzx \in Z(R)$ elde edilir. Burada g nin tanımından, her $x, y, z \in R$ için $g(xy)z + bxyd(z) - yzx + yxz - yxz \in Z(R)$ bulunur ve bağıntı düzenlenirse, her $x, y, z \in R$ için $(g(xy) - yx)z + bxyd(z) + y[x, z] \in Z(R)$ olur. Son bağıntıdan her $x, y, z \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [z, (g(xy) - yx)z] + [z, bxyd(z) + y[x, z]] \\ &= [z, bxyd(z) + y[x, z]] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $x, y, z \in R$ için $[z, bxyd(z) + y[x, z]] = 0$ olduğu görülür ve Teorem 2.27 den bu bağıntı Q için de sağlanır. Son bağıntıda $x = 1 \in Q$ alınırsa, her $y, z \in Q$ için

$$[z, byd(z)] = 0 \tag{4.17}$$

olur. (4.17) de y yerine ybr alıp (4.17) kullanılırsa, her $r, y, z \in Q$ için $[z, by]brd(z) = 0$ bulunur. Son bağıntıda $y = 1 \in Q$ alınarak, her $r, z \in Q$ için $[z, b]brd(z) = 0$ olduğu görülür. Buradan Q bir asal halka olduğundan her $z \in Q$ için ya $[z, b]b = 0$ dır, ya da $d(z) = 0$ bulunur. Şimdi $H = \{z \in Q : [z, b]b = 0\}$ ve $K = \{z \in Q : d(z) = 0\}$ olacak şekilde Q nun iki alt kümesini oluşturalım. Buradan hareketle $(H, +)$ ve $(K, +)$ nın, $(Q, +) = (H, +) \bigcup (K, +)$ olacak şekilde $(Q, +)$ nın toplamsal iki alt grubu olduğu kolaylıkla görülür. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından, bu durumda ya $Q = H$ olmalıdır ya da $Q = K$ olmalıdır. $d \neq 0$ kabulünden hareketle $Q = H$ olmak zorundadır. Böylece her $z \in Q$ için $[z, b]b = 0$ elde edilir. Son bağıntıda z yerine zr alıp bu bağıntı kullanılarak, her $r, z \in Q$ için $[z, b]rb = 0$ bulunur ve bu bağıntıda $b \neq 0$ olduğu ve Q nun asallığı kullanılarak, $b \in C$ elde edilir. Bu bağıntı (4.17) de kullanılırsa, her $y, z \in Q$ için $[z, yd(z)] = 0$ elde edilir. Son bağıntıda y yerine ys alıp bu bağıntı kullanılırsa, her $s, y, z \in Q$ için $[z, y]sd(z) = 0$ bulunur. Q nun asallığından her $z \in Q$ için ya $[z, y] = 0$ dır, ya da $d(z) = 0$ dır sonucuna varılır. Şimdi $H = \{z \in Q : [z, y] = 0\}$ ve $K = \{z \in Q : d(z) = 0\}$ olacak şekilde Q nun iki alt kümesini oluşturup yukarıda yapılan muhakemelerin çok benzerlerini yaparak ve $d \neq 0$ olduğunu kullanarak, R halkasının değişmeli olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi her $x, y \in R$ için $g(xy)+yx \in Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $g(xy) + yx \in Z(R)$ olması $-(g(xy) + yx) \in Z(R)$ olmasını gerektirdiğinden hipotezi düzenleyerek, her $x, y \in R$ için $-(g(xy) + yx) = -g(xy) - yx \in Z(R)$ olduğu kolayca görülür. Şimdi her $x \in R$ için $(-g)(x) = -g(x)$ olarak tanımlayalım ve bu tanımdan hareketle son bağıntıyı düzenleyerek, her $x, y \in R$ için $(-g)(xy) - yx \in Z(R)$ olur. Bu durumda $-g$ dönüşümünü f olarak adlandıralım ve hipotezden g dönüşümü R nin d türevi ile belirli bir b-genelleştirilmiş türevi olduğundan Uyarı 4.1 gereğince $f = -g$ dönüşümü de R nin $-d$ türevi ile belirli bir b-genelleştirilmiş türevidir. Böylece her $x, y \in R$ için $f(xy)-yx \in Z(R)$ özdeşliği sağlanır ve ispatın ilk kısmından R halkasının değişmeli olduğu kolayca elde edilip ispat biter.

Ayrıca bu teoremin ispatına alternatif olarak aşağıdaki ispat verilecektir. Bu ispatta seçilen dönüşümün sadece toplamsal bir dönüşüm olmasının yeterli olduğunu, bu dönüşümün bir b-genelleştirilmiş türev olmadığı durumda da hipotezde geçen özdeşlik sağlandığında R halkasının değişmeli olması gerektiği gösterilmiştir.

İspat. İlk olarak her $x, y \in R$ için $g(xy) - yx \in Z(R)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $z \in R$ olmak üzere kabul edilen bağıntıda y yerine yz alınırsa, her $x, y \in R$ için $g(x(yz))-(yz)x \in Z(R)$ bulunur. Ayrıca, hipotezden her $x, z \in R$ için $g(xz) - zx \in Z(R)$ olduğu açıktır ve bu bağıntıda x yerine xy yazarak, her $x, y, z \in R$ için $g((xy)z) - z(xy) \in Z(R)$ elde edilir. Son iki bağıntıyı kıyaslayarak, her $x, y, z \in R$ için $-(yz)x + z(xy) \in Z(R)$ bulunur ve bu bağıntıyı düzenleyerek, her $x, y, z \in R$ için $[zx, y] \in Z(R)$ olduğu kolayca görülür. Teorem 2.15 uyarınca her $x, y, z \in Q$ için $[zx, y] \in Z(Q) = C$ kolayca bulunur. Bu bağıntıda z yerine 1 yazarak her $x, y \in Q$ için $[x, y] \in C$ elde edilir. Şimdi her bir $x \in Q$ için $d_x(y) = [x, y]$ olarak tanımlayalım. Böylece her $y \in Q$ için $d_x(y) = [x, y] \in C$ olur ve Yardımcı Özellik 2.10 dan Q halkasının değişmeli olduğu sonucuna varılır ve bu R halkasının değişmeli olmasını gerektirip ispat biter.

Şimdi her $x, y \in R$ için $g(xy)+yx \in Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $g(xy) + yx \in Z(R)$ olması $-(g(xy) + yx) \in Z(R)$ olmasını gerektirdiğinden hipotezi düzenleyerek her $x, y \in R$ için $-(g(xy) + yx) = -g(xy) - yx \in Z(R)$ olduğu kolayca görülür. Şimdi her $x \in R$ için $(-g)(x) = -g(x)$ olarak tanımlayalım ve bu tanımdan hareketle son bağıntıyı düzenleyerek, her $x, y \in R$ için $(-g)(xy) - yx \in Z(R)$ olur. Bu durumda $-g$ dönüşümünü f olarak adlandıralım. Böylece her $x, y \in R$ için $f(xy) - yx \in Z(R)$ özdeşliği sağlanır ve ispatın ilk kısmından R halkasının değişmeli olduğu kolayca elde edilir.

Aşağıdaki iki teorem (Albaş and Argaç, 2004, Theorem 3.4) ün bir asal halkanın bir b-genelleştirilmiş türevine genellemesidir.

Teorem 4.7. *R bir asal halka olsun. R nin sıfırdan farklı bir g b-genelleştirilmiş türevi R üzerinde bir homomorfizma olarak hareket ediyorsa o zaman her $x \in R$ için $g(x) = -bxq$, $d(x) = [q, x]$ ve $qb = -1$ olacak şekilde bir $q \in Q(RC)$ elemanı vardır, ya da g, R üzerinde birim dönüşümdür.*

İspat. Hipotezden g dönüşümü R nin bir b-genelleştirilmiş türevi olduğundan g nin tanımından hareketle, her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y + bxd(y)$ dir. Bu tanımda eğer $b = 0$ veya $d = 0$ olarak alınırsa, o zaman her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y$ olur ve bu durumda g, R nin bir genelleştirilmiş türevi olacağından (Albaş and Argaç, 2004, Theorem 3.4) den g nin, R üzerinde bir birim dönüşüm olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi hem b hem de d nin sıfırdan farklı olduklarını kabul edelim. Hipotezde $z \in R$ olmak üzere y yerine yz yazarak, her $x, y, z \in R$ için $g(xyz) = g((xy)z) = g(xy)z+bxyd(z) = g(x)g(y)z+bxyd(z)$ bulunur. Böylece her $x, y, z \in R$ için

$$g((xy)z) = g(x)g(y)z + bxyd(z) \tag{4.18}$$

elde edilir. Diğer taraftan, hipotezde tekrar y yerine yz yazarak ve bu sefer farklı bir düzenleme yaparak, her $x, y, z \in R$ için $g(xyz) = g((xy)z) = g(x)g(yz) = g(x)g(y)z + g(x)byd(z)$ olur ve bu durumda her $x, y, z \in R$ için

$$g((xy)z) = g(x)g(y)z + g(x)byd(z) \tag{4.19}$$

olduğu görülür. Buradan (4.18) ve (4.19) kıyaslanırsa, her $x, z \in R$ için

$$(g(x)b - bx)Rd(z) = (0) \tag{4.20}$$

bulunur. Ayrıca Teorem 2.27 gereğince Q halkası da (4.20) özdeşliğini sağlar. Böylece (4.20) de Q nun bir asal halka ve $d \neq 0$ olduğu kullanılarak, her $x \in Q$ için

$$g(x)b = bx \tag{4.21}$$

elde edilir. Şimdi ispatı b elemanının R halkasının genişletilmiş merkezi C ye ait olduğu ve olmadığına bağlı olarak iki alt durumda ele alalım. İlk olarak $b \in C$ olduğunu kabul edelim, bu durumda (4.21) den her $x \in Q$ için $b(g(x) - x) = 0$ olur. Q bir asal halka ve $0 \neq b \in C$ olduğundan her $x \in Q$ için $g(x) = x$ olur, bu ise g nin R üzerinde bir birim dönüşüm olmasını gerektirir. Böylece $b \notin C$ olduğunu düşünebiliriz. Ayrıca (4.21) de x yerine xy yazılıp ve (4.21) kullanılırsa, her $x, y \in Q$ için

$$g(x)yb + bx(d(y)b - y) = 0 \tag{4.22}$$

elde edilir. Şimdi (4.22) özdeşliğinde

$$F_1(x) = g(x), \quad H_1(y) = d(y)b - y, \quad a_1 = b, \quad c_1 = b$$

alınırsa $F_1(x)yb + bxH_1(y) = 0$ olur. Tek elemanlı $\{b\}$ kümesi C-bağımsız bir küme olduğundan Önerme 2.2 gereğince her $x, y \in Q$ için

$$F_1(x) = g(x) = -bxq_{11} \tag{4.23}$$

ve

$$H_1(y) = d(y)b - y = q_{11}yb \tag{4.24}$$

olacak şekilde $q_{11} \in Q(RC)$ vardır. Şimdi $q_{11} \in Q(RC)$ elemanını q olarak adlandıralım. Daha sonra (4.23) de x yerine xy yazarak ve tekrar (4.23) ü kullanarak, her $x, y \in Q$ için $bx(d(y) + yq - qy) = 0$ bulunur. Bu bağıntıda $b \neq 0$ olduğunu ve Q nun bir asal halka olduğunu kullanarak, $y \in Q$ için $d(y) = [q, y]$ olduğu kolayca görülür. Elde edilen d türevinin bu formu (4.24) de yerine yazılıp komutatör açılımı yapılırsa, her $y \in Q$ için $[q, y]b - y - qyb = 0$ olur. Bu bağıntıyı düzenleyerek, her $y \in Q$ için $y(qb + 1) = 0$ elde edilir ve bu bağıntıda $y = 1 \in Q$ alınarak $qb = -1$ sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak (4.23) den, her $x \in R$ için $g(x) = -bxq$, $d(x) = [q, x]$ ve $qb = -1$ olacak şekilde bir $q \in Q(RC)$ elemanının var olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.8. *R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka olsun. R nin sıfırdan farklı bir g b-genelleştirilmiş türevi R üzerinde bir ters-homomorfizma olarak hareket ediyorsa o zaman R halkası değişmelidir ve bu durumda g R üzerinde birim dönüşümdür.*

İspat. Hipotezden g dönüşümü R nin bir b-genelleştirilmiş türevi olduğundan g nin tanımından hareketle, her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y + bxd(y)$ dir. Bu tanımda eğer $b = 0$ veya $d = 0$ olarak alınırsa o zaman her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y$ elde edilir. Bu durumda g, R nin bir genelleştirilmiş türevidir ve (Albaş and Argaç, 2004, Theorem 3.4) den g R üzerinde birim dönüşümdür. Böylece hipotezden her $x, y \in R$ için $xy - yx = [x, y] = 0$ olur ve bu R halkasının değişmeli olmasını verir, bu durum ise ispatı sonlandırır.

Şimdi hem b hem de d nin sıfırdan farklı olduklarını kabul edelim. İlk olarak hipotezde x yerine xy alıp g nin b-genelleştirilmiş türev tanımını kullanarak, her $x, y \in R$ için $g((xy)y) = g(xy)y + bxyd(y) = g(y)g(x)y + bxyd(y)$ bulunur. Diğer taraftan, tekrar hipotezde x yerine xy alıp hipotezi kullanarak, her $x, y \in R$ için $g((xy)y) = g(y)g(xy) = g(y)g(x)y + g(y)bxd(y)$ özdeşliği de kolayca elde edilir. Son iki bağıntıyı kıyaslayarak, her $x, y \in R$ için

$$bxyd(y) = g(y)bxd(y) \tag{4.25}$$

bulunur.

Şimdi ispatı $b \in C$ olması ve olmaması olarak iki alt durumda ele alalım ve ilk olarak $b \in C$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 \neq b \in C$ olduğundan (4.25) den her $x, y \in R$ için

$$xyd(y) = g(y)xd(y) \tag{4.26}$$

kolayca elde edilir. Ayrıca $t \in R$ olmak üzere (4.26) da x yerine tx yazarak, her $t, x, y \in R$ için $txyd(y) = g(y)txd(y)$ bulunur. Diğer taraftan, (4.26) soldan t ile çarpılırsa, her $t, x, y \in R$ için $txyd(y) = tg(y)xd(y)$ olduğu görülür. Son iki bağıntıyı kıyaslayarak her $t, x, y \in R$ için $[g(y), t]xd(y) = 0$ elde edilir. Teorem 2.27 den her $t, x, y \in Q$ için $[g(y), t]xd(y) = 0$ bulunur. Q nun bir asal halka olması her $y \in Q$ için ya $[g(y), t] = 0$ ya da $d(y) = 0$ olmasını gerektirir. Şimdi her $y \in Q$ için Q halkasının H=$\{y \in Q : g(y) \in C\}$ ve K=$\{y \in Q : d(y) = 0\}$ olacak şekilde iki alt kümesini tanımlayalım. Böylece $(H, +)$ ve

$(K,+)$, $(Q,+)$ nin $(Q,+) = (H,+)\bigcup(K,+)$ olacak şekildeki toplamsal iki alt grubu olduğu açıktır. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $Q = H$ ya da $Q = K$ olmalıdır. Ancak, $d \neq 0$ olması her $y \in Q$ için $Q = H$ olmasını gerektirir ve bu ise her $y \in Q$ için $g(y) \in C$ demektir. Böylece her $x, y \in Q$ için

$$g(xy) = g(x)y + bxd(y) \in C \tag{4.27}$$

bulunur. Ayrıca $z \in Q$ olmak üzere (4.27) de y yerine yz yazarak ve d nin türev tanımını kullanarak, her $x, y, z \in Q$ için

$$(g(x)y + bxd(y))z + bxyd(z) \in C \tag{4.28}$$

elde edilir. Şimdi (4.28) den her $x, y, z \in Q$ için $[z, (g(x)y + bxd(y))z + bxyd(z)] = 0$ olur. (4.27) den son bağıntı her $x, y, z \in Q$ için $[z, bxyd(z)] = 0$ bağıntısına indirgenir ve $0 \neq b \in C$ olduğundan her $x, y, z \in Q$ için

$$[z, xyd(z)] = 0 \tag{4.29}$$

bulunur. (4.29) da $y = 1 \in Q$ alarak, her $x, z \in Q$ için $[z, xd(z)] = 0$ elde edilir. Burada x yerine $r \in Q$ olmak üzere rx yazılarak, her $x, z \in Q$ için $[z, r]xd(z) = 0$ bulunur. Burada Q nun bir asal halka olması her $z \in Q$ için ya $[z, r] = 0$ ya da $d(z) = 0$ olmasını gerektirir. Şimdi her $z \in Q$ için Q halkasının H=$\{z \in Q : z \in C\}$ ve K=$\{z \in Q : d(z) = 0\}$ olacak şekilde iki alt kümesini tanımlayalım. Böylece $(H,+)$ ve $(K,+)$, $(Q,+)$ nin $(Q,+) = (H,+)\bigcup(K,+)$ olacak şekildeki toplamsal iki alt grubu olduğu açıktır. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $Q = H$ ya da $Q = K$ olmalıdır. Fakat, $d \neq 0$ olması her $z \in Q$ için $Q = H$ olmasını gerektirir. Bu durumda Q halkası değişmeli dolayısıyla R halkası da değişmeli olur. Böylece Teorem 4.18 den her $x \in R$ için $g(x) = -bxq$ ve $qb = -1$ olacak şekilde bir $q \in Q(RC)$ elemanının var olduğu sonucuna varılır. Ayrıca R değişmeli olduğundan her $x \in R$ için $g(x) = -qbx$ olur ve $qb = -1$ olduğu son bağıntıda kullanılarak, her $x \in R$ için $g(x) = x$ dir. Yani g R üzerinde birim dönüşümdür sonucu elde edilir.

Şimdi $b \notin C$ olduğunu kabul edelim ve (4.25) de x yerine $xd(y)$ yazarak, her $x, y \in R$ için $bxd(y)yd(y) = g(y)bxd(y)d(y)$ elde edilir. (Koşan and Lee, 2014, Theorem 2.3) gereğince g b-genelleştirilmiş türevi Q ya genişletildiğinden

Teorem 2.27 gereğince son özdeşlik Q halkası için de sağlanır. Elde edilen son bağıntı ve (4.25) i kıyaslayarak, her $x, y \in Q$ için $bx(d(y)yd(y) - yd(y)d(y)) = 0$ bulunur. Böylece $b \neq 0$ ve Q bir asal halka olduğundan her $y \in Q$ için $[y, d(y)]d(y) = 0$ bulunur. Bu durumda (De Filippis et al., 2012, Theorem 2) gereğince ya Q değişmelidir ya da her $x \in Q$ için $d(x) = \lambda x$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı vardır. İlk durum R halkasının da değişmeli olmasını gerektirir ve Teorem 4.7 den ispat biter. Şimdi her $x \in Q$ ve bir $\lambda \in C$ için $d(x) = \lambda x$ olduğunu kabul edelim. Burada x yerine xy alınıp türev tanımını kullanarak, her $x, y \in Q$ için $\lambda xy = d(xy) = d(x)y + xd(y) = \lambda xy + x\lambda y$ elde edilir. Böylece her $x, y \in Q$ için $\lambda xy = 0$ dır. Özel olarak $x = y = 1 \in Q$ alınırsa $\lambda = 0$ bulunur ve böylece $d = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi Teorem 4.8 de halkanın asallığı ve dışlanan karakteristik koşulu kaldırılamaz koşullardır.

Örnek 4.1. *F karakteristiği 2 olan bir cisim ve $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in F \right\}$ olsun. Her $x \in R$ için $g(x) = e_{11}x + e_{11}xe_{22}$ dönüşümü R halkasının sıfırdan farklı bir b-genelleştirilmiş türevidir. Burada her $x, y \in R$ için için $g(xy) = g(y)g(x)$ özdeşliği sağlanır, fakat ne R halkası değişmeli bir halkadır ne de g R üzerinde birim dönüşümdür.*

5 ASAL HALKALAR ÜZERİNDE b-GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLERİN BELİRLİ ÖZDEŞLİKLERİ

Bu bölümde asal halkalar üzerinde b-genelleştirilmiş türevleri bünyesinde barındıran eden bazı özdeşlikler incelenecektir.

S, R nin boştan farklı bir altkümesi ve $F : R \to R$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in S$ için $[F(x), x] = 0$ ise F ye "commuting" dönüşüm denir. Bu tip dönüşümler ilk olarak Posner tarafından ele alınmış, sonrasında birçok matematikçi benzer özdeşlikleri otomorfizma, türev ya da genelleştirilmiş türeve sahip asal halkalar ve yarı asal halkalar üzerinde çalışmışlardır.

(Posner, 1957), bir R asal halkası üzerinde tanımlı bir d türevinin $a \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ özdeşliğini sağladığında ya $a = 0$ dır, ya da $d = 0$ olduğunu göstermiştir. (Mayne, 1976), bir R asal halkası üzerinde tanımlı bir T trivial olmayan bir otomorfizması R üzerinde $xx^T - x^Tx \in Z(R)$ özdeşliğini sağlandığında R nin değişmeli tamlık bölgesi olduğunu ispatlamıştır.

(Mayne, 1984), yukarıdaki sözü edilen sonucu bir asal halkanın sıfırdan farklı bir idealine genişletmiştir. Bu çalışmada bir R asal halkası üzerinde tanımlı bir U sıfırdan farklı bir ideali veya bir quadratik Jordan ideali, bir L trivial olmayan otomorfizması veya bir türevi olmak üzere; her $u \in U$ için $uL(u) - L(u)u \in Z(R)$ özdeşliği sağlanırsa o zaman R halkasının değişmeli olduğunu göstermiştir.

Daha sonra (Lanski, 1997), yukarıda değinilen bu sonucu bir yarı asal halkanın bir sol idealine genişletmiştir. Daha açık bir ifadeyle, bir R yarı asal halka üzerinde tanımlı bir L sıfırdan farklı sol ideali, bir D sıfırdan farklı türevi ve $t_0, t_1, ..., t_n$ pozitif tamsayılar olmak üzere, her $x \in L$ için, $[[...[[D(x^{t_0}), x^{t_1}], x^{t_2}], ...], x^{t_n}] = 0$ ise ya $D(L) = 0$ olduğunu, ya da $D(L)$ ve $D(R)L$ nin R nin sıfırdan farklı merkezil bir idealinde içerildiğini ispatlamıştır. Üstelik R bir asal halka olduğunda R halkasının değişmeli olduğu sonucuna ulaşmıştır.

(Hvala, 1998), bir R asal halkası üzerinde tanımlı bir f genelleştirilmiş türevinin $c, d \in R$ olmak üzere R halkası üzerinde $cf(x) + f(x)d = 0$ özdeşliğini gerçeklerse o zaman aşağıdaki koşullardan birinin sağlandığını göstermiştir:

(i) $c, d \in C$ ve $c + d = 0$,

(ii) $c \in C$ ve $f(x) = xb$ ve $b(c + d) = 0$ olacak şekilde $b \in Q(RC)$ elemanı vardır,

(iii) $d \in C$ ve $f(x) = bx$ ve $(c + d)b = 0$ olacak şekilde $b \in Q(RC)$ elemanı vardır,

(iv) $f(x) = \lambda x + \mu(cx - xd)$ ve $\lambda c + \mu c^2 = \mu d^2 - \lambda d \in C$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in C$ vardır.

Aynı çalışmada, bir R asal halkasının bir f genelleştirilmiş türevi $a, b \in R$ sıfırdan farklı elemanlar olmak üzere her $x \in R$ için $af(x)b = 0$ oluyorsa o zaman her $x \in R$ için $f(x) = q_1 x + xq_2$ ve $aq_1 = q_2 b$ olacak şekilde $q_1, q_2 \in Q(RC)$ elemanlarının var olduğu ispatlanmıştır.

Tezin bu bölümünde amacımız, bir asal halkanın genelleştirilmiş türevleriyle ilişkili bazı sonuçları bir asal halkanın b-genelleştirilmiş türevlerine genişletmektir. Bu bölümde aksi belirtilmedikçe R merkezi $Z(R)$, sağ Martindale kesirler halkası Q, genişletilmiş merkezi C, merkezi kapanışı RC olan bir asal halkayı gösterecektir. g ile R nin $b \in Q$ olmak üzere ilişkili türevi d olan b-genelleştirilmiş türevini göstereceğiz. İspatlara başlamadan önce şu teoremi hatırlatalım: Her b-genelleştirilmiş Δ türevi uygun $a, b \in Q$ elemanları için $\Delta(x) = ax + bd(x)$ formundadır ve eğer $b \neq 0$ ise d Q nun bir türevidir (Koşan and Lee, 2014, Theorem 2.3).

Uyarı 5.1. *R bir asal halka, h ilişkili türevi d olan bir b-genelleştirilmiş türev ve g ilişkili türevi d olan b'-genelleştirilmiş türev olsun. Her $x \in R$ için $h(x) = g(x)$ ise o zaman $a \in Q$ ve her $x \in R$ için ya $h(x) = ax = g(x)$ dir, ya da $a, b, b' \in Q$, uygun bir $\lambda \in C$ ve her $x \in R$ için $h(x) = ax + bd(x)$, $g(x) = ax + b'\delta(x)$, $d = \lambda\delta$ ve $b' = \lambda b$ dir.*

İspat. Hipotezdeki $h(x) = g(x)$ özdeşliğinde x yerine xy yazıp, h ve g nin tanımlarını kullanarak $h(xy) = g(xy)$ özdeşliğini açarsak, her $x, y \in R$ için

$$bxd(y) = b'x\delta(y) \tag{5.1}$$

elde edilir. Teorem 2.27 den (5.1) özdeşliği Q için de sağlanır. Üstelik (Koşan and Lee, 2014, Theorem 2.3) den her $x \in R$ için $a, u \in Q$ olmak üzere $h(x) = ax + bd(x)$ ve $g(x) = ux + b^{'}\delta(x)$ dir. Eğer $b = 0$ ise (5.1) den her $x, y \in Q$ için $b^{'}x\delta(y) = 0$ olur. Q bir asal halka olduğundan, son bağıntıdan her $y \in Q$ için ya $b^{'} = 0$ dır ya da $\delta(y) = 0$ dır. Eğer $b^{'} = 0$ ise o zaman her $x \in R$ için $h(x) = ax$ ve $g(x) = ux$ olduğuna ulaşırız. Buradan h ve g nin bu formları hipotezde kullanılırsa, her $x \in R$ için $(a - u)x = 0$ elde edilir. Teorem 2.15 den Q da son özdeşliği sağlar ve Q nun asallığından $a = u$ bulunur. Böylece her $x \in R$ için $h(x) = ax = g(x)$ olur.

Diğer taraftan, eğer $\delta = 0$ ise o zaman her $x \in R$ için $h(x) = ax$ ve $g(x) = ux$ olur. Yukarıda yapılan muhakemenin aynısını yaparak her $x \in R$ için $h(x) = ax = g(x)$ elde edilir. Şimdi $b \neq 0$ ve $b^{'} = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman (5.1) den her $x, y \in R$ için $bxd(y) = 0$ olur ve Teorem 2.27 gereğince R ve Q aynı diferansiyel özdeşliği sağladığından, her $x, y \in Q$ için $bxd(y) = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu bağıntıda $b \neq 0$ ve Q nun bir asal halka olduğunu kullanarak $d = 0$ bulunur. Bu durumda, her $x \in R$ için $h(x) = ax$ ve $g(x) = ux$ formundadır. Yukarıda yapılan muhakemenin aynısını yaparak, her $x \in R$ için $h(x) = ax = g(x)$ olduğuna ulaşılır. Böylece hem $b \neq 0$ hem de $b^{'} \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Burada ispatı iki duruma ayıralım:

İlk olarak $\{b, b^{'}\}$ kümesi C-bağımsız olsun. O zaman (5.1) özdeşliğinde Yardımcı Özellik 2.6 kullanılarak her $x \in R$ için $d(x) = 0 = \delta(x)$ elde edilir. Bu durumda her $x \in R$ için $h(x) = ax$ ve $g(x) = ux$ dir ve yukarıda yapılan muhakemenin aynısını yaparak, her $x \in R$ için $h(x) = ax = g(x)$ bulunur.
Şimdi $\{b, b^{'}\}$ kümesi C-bağımlı olsun. Bu durumda (Chuang et al., 2006, Lemma 1) den $b^{'} = \lambda b$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı vardır. Elde edilen bu bağıntıyı (5.1) de yerine yazıp Teorem 2.27 kullanılırsa, her $x, y \in Q$ için $bx(d(y) - \lambda\delta(y)) = 0$ olur. Q bir asal halka ve $b \neq 0$ olduğunda son bağıntı her $y \in Q$ için $d(y) = \lambda\delta(y)$ olmasını gerektirir. Buradan h ve g nin $h(x) = ax + bd(x)$, $g(x) = ux + b^{'}\delta(x)$ formlarını hipotezde yazıp $d(y) = \lambda\delta(y)$ ve $b^{'} = \lambda b$ bağıntılarını kullanarak, her $x \in Q$ için $ax = ux$ elde edilir. Q nun asallığından $a = u$ bulunur. Böylece her $x \in R$ için $d = \lambda\delta$ ve $b^{'} = \lambda b$ olmak üzere $h(x) = ax + bd(x)$ ve $g(x) = ax + b^{'}\delta(x)$ dır ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.1. *R değişmeli olmayan bir asal halka olsun. Her $x \in R$ için $g(x) \in$*

$Z(R)$ olacak şekilde R halkasının bir g b-genelleştirilmiş türevi varsa o zaman $g = 0$ dır.

İspat. Hipotezden g, R nin bir b-genelleştirilmiş türevi olduğundan, $b \in Q$ ve her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y + bxd(y)$ dir. Burada eğer $b = 0$ veya $d = 0$ ise her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y$ olur. Bu durumda Yardımcı özellik 2.4 den g, R nin bir genelleştirilmiş türevi olur ve (Hvala, 1998, Lemma 3) den $g = 0$ bulunur.

Şimdi $b \neq 0$ ve $d \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Hipotezde x yerine xy yazıp g nin tanımını kullanarak, her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)y + bxd(y) \in Z(R)$ bulunur. Son bağıntıdan her $x, y \in R$ için $0 = [y, g(x)y + bxd(y)] = [y, bxd(y)]$ elde edilir. Ayrıca bu bağıntıda Teorem 2.27 kullanılarak $[y, bxd(y)] = 0$ özdeşliğinin Q halkası için de sağlandığı bulunur. Böylece her $x, y \in Q$ için

$$[y, bxd(y)] = 0 \tag{5.2}$$

olur. İlk olarak $0 \neq b \in C$ olduğunu kabul edelim. O zaman (5.2) den, her $x, y \in Q$ için

$$x[y, d(y)] + [y, x]d(y) = 0 \tag{5.3}$$

dır. (5.3) de x yerine rx yazıp (5.3) ü kullanarak, her $r, x, y \in Q$ için $0 = rx[y, d(y)] + r[y, x]d(y) + [y, r]xd(y) = r(x[y, d(y)] + [y, x]d(y)) + [y, r]xd(y) = [y, r]xd(y)$ bağıntısına ulaşılır. Buradan her $r, x, y \in Q$ için $[y, r]xd(y) = 0$ elde edilir. Son bağıntıda Q nun asallığı her $y \in Q$ için ya $[y, r] = 0$ ya da $d(y) = 0$ olmasını gerektirir.

Şimdi $H = \{y \in Q : y \in C\}$ ve $K = \{y \in Q : d(y) = 0\}$ olacak şekilde Q nun iki alt kümesini seçelim. Bu seçilişlerden hareketle $(H, +)$ ve $(K, +)$, $(Q, +) = (H, +) \bigcup (K, +)$ olacak şekilde $(Q, +)$ nın iki toplamsal alt grubudur. Bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $Q = H$ ya da $Q = K$ dır. İspatın ilk kısmında $d \neq 0$ kabul edildiğinden $Q = H$ olmalıdır. Böylece her $y \in Q$ için $y \in C$ olur ve bu durum R halkasının değişmeli olmasını verir; fakat bu bir çelişkidir. Şimdi $b \notin C$ olduğunu kabul edebiliriz. (5.2) de x yerine xbr yazılırsa, her $r, x, y \in Q$ için $[y, bxbrd(y)] = bx[y, brd(y)] + [y, bx]brd(y) = 0$ olur. Son bağıntıda (5.2) kullanılırsa, her $r, x, y \in Q$ için

$$[y, bx]brd(y) = 0 \tag{5.4}$$

olur. Özel olarak (5.4) de $x = 1 \in Q$ alınırsa, her $r, y \in Q$ için $[y, b]brd(y) = 0$ olur. Q nun asallığından her $y \in Q$ için ya $[y, b]b = 0$ ya da $d(y) = 0$ dır. $H' = \{y \in Q : [y, b]b = 0\}$ ve $K' = \{y \in Q : d(y) = 0\}$ olsun. O zaman H' ve K', Q nun toplamsal iki alt grubudur ve $(Q, +) = (H', +)\bigcup(K', +)$ dır. Fakat bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından bu durumda ya $Q = H'$ ya da $Q = K'$ dür. $d \neq 0$ olduğundan yukarıda yapılan muhakemenin aynısını yaparak $Q = H'$ bulunur. Bu ise her $y \in Q$ için $[y, b]b = 0$ olmasını gerektirir. Son bağıntıda y yerine yr yazılırsa, her $r, y \in Q$ için $y[r, b]b + [y, b]rb = 0$ dır. Bu son iki bağıntıdan her $r, y \in Q$ için $[y, b]rb = 0$ elde edilir. Burada Q nun asallığı ve $b \neq 0$ olduğu kullanılarak $b \in C$ çelişkisi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Yardımcı Özellik 5.1. *R bir asal halka, g R nin sıfırdan farklı bir b-genelleştirilmiş türevi ve $c \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için*

$$cg(x) = 0$$

ise o zaman aşağıdaki koşullardan biri sağlanır:

(*i*) $c = 0$,

(*ii*) *her $x \in R$ için $ca = 0$ olmak üzere $g(x) = ax$ olacak şekilde $a \in Q$ vardır,*

(*iii*) *her $x \in R$ için $ca = 0 = cb$ olmak üzere $g(x) = ax + bd(x)$ olacak şekilde $a, b \in Q$ elemanları vardır.*

İspat. Hipotezden her $x \in R$ için $cg(x) = 0$ olsun. İlk olarak $c \in Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $c = 0$ ya da her $x \in R$ için $g(x) = 0$ dır, fakat hipotezde g sıfırdan farklı bir b-genelleştirilmiş türev olduğundan eğer $c \in Z(R)$ ise $c = 0$ olmak zorundadır, böylece (i) elde edilir. Şimdi $c \notin Z(R)$ olduğunu kabul edebiliriz. Hipotezde x yerine xy yazıp hipotez kullanılırsa o zaman, her $x, y \in R$ için $0 = cg(xy) = cg(x)y + cbxd(y) = cbxd(y)$ olur. Böylece her $x, y \in R$ için $cbxd(y) = 0$ elde edilir. Teorem 2.27 gereğince son bağıntı Q için de sağlanır. Böylece Q nun asallığından ya $cb = 0$ ya da $d = 0$ bağıntıları elde edilir. Ayrıca (Koşan and Lee, 2014, Teorem 2.3) gereğince bir b-genelleştirilmiş türev g nin uygun $a, b \in Q$ elemanları ve her $x \in R$ için $g(x) = ax + bd(x)$ formundadır. Burada eğer $d = 0$ ise her $x \in R$ için $g(x) = ax$ sonucuna varılır.

Başlangıç hipotezinden, her $x \in R$ için $cax = 0$ elde edilir ve Teorem 2.15 in ışığında her $x \in Q$ için $cax = 0$ olduğu görülür. Son bağıntıda $x = 1 \in Q$ alınarak $ca = 0$ dır ve buradan (ii) elde edilir. Diğer taraftan, eğer $cb = 0$ ise hipotezden her $x \in R$ için $0 = cg(x) = cax + cbd(x) = cax$ olur ve yukarıda yapılan muhakemenin aynısını yaparak $ca = 0$ bulunur, bu ise (iii) yi ispatlar.

Teorem 5.2. *R değişmeli olmayan bir asal halka, g R nin bir b-genelleştirilmiş türevi ve $c \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $cg(x) \in Z(R)$ ise o zaman aşağıdaki koşullardan biri sağlanır:*

(i) *$c = 0$ dır,*

(ii) *$cq = 0$ olmak üzere $g(x) = qx$ olacak şekilde $q \in Q(R)$ vardır,*

(iii) *$ca = 0 = cb$ olmak üzere her $x \in R$ için $g(x) = ax + bd(x)$ olacak şekilde $a, b \in Q$ vardır.*

İspat. Hipotezden her $x \in R$ için $cg(x) \in Z(R)$ dir. Eğer her $x \in R$ için $cg(x) = 0$ ise Yardımcı Özellik 5.1 den ispat tamamlanır. Böylece her $x \in R$ için $cg(x) \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Hipotezde x yerine xy yazıp, g nin tanımını kullanarak, her $x, y \in R$ için $cg(x)y + cbxd(y) \in Z(R)$ olduğu bulunur. Bu bağıntıdan hareketle her $x, y \in R$ için $0 = [y, cg(x)y + cbxd(y)] = [y, cg(x)]y + [y, cbxd(y)] = [y, cbxd(y)]$ elde edilir. Böylece her $x, y \in R$ için

$$[y, cbxd(y)] = 0 \tag{5.5}$$

olur. Teorem 2.27 den bu özdeşlik Q için de sağlanır. Şimdi (5.5) de x yerine $xcbz$ yazıp komütatör özellikleri kullanılırsa o zaman, her $x, y, z \in Q$ için $0 = cbx[y, cbzd(y)] + [y, cbx]cbzd(y)$ bulunur. Bu özdeşlikte x yerine 1 alarak ve (5.5) i kullanarak, her $y, z \in Q$ için $[y, cb]cbzd(y) = 0$ olduğu görülür. Bu durumda Q bir asal halka olduğundan, her $y \in Q$ için ya $[y, cb]cb = 0$ dır, ya da $d(y) = 0$ dır. Şimdi $H = \{y \in Q : [y, cb]cb = 0\}$ ve $K = \{y \in Q : d(y) = 0\}$ olacak şekilde Q nun iki alt kümesini tanımlayalım. Buradan hareketle $(H, +)$ ve $(K, +)$, $(Q, +) = (H, +) \bigcup (K, +)$ olacak şekilde $(Q, +)$ nın iki toplamsal alt grubu olduğu görülür. Fakat bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından bu durumda ya $Q = H$ ya da $Q = K$ dır. Eğer $Q = K$ ise her $y \in Q$ için $d(y) = 0$ ve bu durumda her $x, y \in Q$ için $g(xy) = g(x)y$

dir. Yardımcı özellik 2.4 den her $x \in Q$ için $g(x) = qx$ olacak şekilde bir $q \in Q(RC)$ vardır. g nin bu formunu hipotezde kullanarak, her $x \in Q$ için $cqx \in C$ bulunur ve bu durumda Q nun asallığından ya $cq = 0$ dır, ya da Q değişmelidir ve dolayısıyla R halkası değişmelidir sonucuna ulaşılır. Hipotezde R nin değişmeli olmayan bir halka olması $cq = 0$ olmasını gerektirir. Bu ise (ii) şıkkını ispatlar. Şimdi $Q = H$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $y \in Q$ için $[y, cb]cb = 0$ dır. Son özdeşlikte y yerine yr alıp bu özdeşlik kullanılırsa, her $r, y \in Q$ için

$$[y, cb]rcb = 0 \tag{5.6}$$

elde edilir ve (5.6) da r yerine ry yazarak, her $r, y \in Q$ için $[y, cb]rycb = 0$ bulunur. Diğer taraftan (5.6) yı y ile sağdan çarparak, her $r, y \in Q$ için $[y, cb]rcby = 0$ elde edilir. Son iki özdeşlik kıyaslanırsa o zaman, her $r, y \in Q$ için $[y, cb]r[y, cb] = 0$ bulunur. Q halkasının asallığından her $y \in Q$ için $[y, cb] = 0$ ve dolayısıyla $cb \in C$ dir. Ayrıca (Koşan and Lee, 2014, Theorem 2.3) uyarınca g dönüşümü, uygun $a, b \in Q$ ve her $x \in R$ için $g(x) = ax + bd(x)$ formunda olduğundan, eğer $cb = 0$ ise hipotezden her $x \in Q$ için $cg(x) = cax \in C$ olur ve yukarıda yapılan muhakemenin aynısını yaparak $ca = 0$ elde edilir, böylece (iii) ispatlanır. Şimdi $0 \neq cb \in C$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $0 \neq cb \in C$ olduğu (5.5) te kullanılarak her $x, y \in Q$ için $[y, xd(y)] = 0$ elde edilir. Son özdeşlikte x yerine 1 alarak, her $y \in Q$ için $[y, d(y)] = 0$ bulunur. (Posner, 1957, Theorem 2) gereğince ya R değişmelidir ya da $d = 0$ dır, fakat her iki durumda da çelişki elde edilir.

Yardımcı Özellik 5.2. *R bir asal halka, $c \in R$ ve g R nin sıfırdan farklı bir b-genelleştirilmiş türevi olsun. Her $x \in R$ için $g(x)c = 0$ ise ya $c = 0$ dır ya da her $x \in R$ için $qc = 0$ olmak üzere $g(x) = -bxq$ olacak şekilde bir $q \in Q(R)$ elemanı vardır.*

İspat. Eğer $c \in Z(R)$ ise o zaman $c = 0$ ya da her $x \in R$ için $g(x) = 0$ dır. Fakat hipotezde g sıfırdan farklı bir b-genelleştirilmiş türev olduğundan, eğer $c \in Z(R)$ ise $c = 0$ sonucuna ulaşılır. Şimdi $c \notin Z(R)$ olduğunu kabul edelim. (Koşan and Lee, 2014, Theorem 2.3) gereğince g, uygun $a, b \in Q$ ve her $x \in R$ için $g(x) = ax + bd(x)$ formundadır. Böylece g nin bu formunda eğer $b = 0$ veya $d = 0$ ise o zaman her $x \in R$ için $g(x) = ax$ olur ve hipotezden her $x \in R$ için

$axc = 0$ bağıntısına ulaşılır. Ayrıca, Teorem 2.15 den her $x \in Q$ için $axc = 0$ bağıntısı da kolayca elde edilir. Son bağıntıda Q nun asallığı ya $a = 0$ ya da $c = 0$ olmasını gerektirir. Fakat, iki durum da hipotezle ve $c \notin Z(R)$ kabulü ile çelişir. Bu sebeple hem $b \neq 0$ hem de $d \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Şimdi hipotezde x yerine xy alıp g nin tanımı kullanılırsa o zaman, her $x, y \in R$ için

$$g(x)yc + bxd(y)c = 0 \tag{5.7}$$

elde edilir. Böylece (5.7) de x yerine xr alarak, her $r, x, y \in R$ için

$$g(x)ryc + bx(d(r)y + rd(y))c = 0 \tag{5.8}$$

bulunur. Üstelik (5.8) de r yerine cr alıp hipotez kullanılırsa, her $r, x, y \in R$ için $bx(d(c)ry + cd(r)y + crd(y))c = 0$ sonucuna ulaşılır. Teorem 2.27 den son özdeşlik Q için de sağlanır. Böylece $b \neq 0$ olduğundan son bağıntıda Q nun asallığı her $r, y \in Q$ için

$$(d(c)r + cd(r))yc + crd(y)c = 0 \tag{5.9}$$

olmasını gerektirir. Şimdi (5.9) bağıntısını gözönüne alarak, her $r, y \in Q$ için

$$F(r) = d(c)r + cd(r), \quad H(y) = d(y)c, \quad a_1 = c, \quad c_1 = c$$

olarak alalım. Böylece (5.9) her $r, y \in Q$ için

$$F(r)yc + crH(y) = 0$$

olur. Buradan Önerme 2.2 gereğince, her $r, y \in Q$ için

$$F(r) = -crq_{11}, \quad H(y) = q_{11}yc$$

olacak şekilde $q_{11} \in Q(RC)$ elemanı vardır. Böylece, her $r, y \in Q$ için

$$d(c)r + cd(r) = -crq_{11} \tag{5.10}$$

ve

$$d(y)c = q_{11}yc \tag{5.11}$$

bağıntıları bulunur. Şimdi $q_{11} \in Q(RC)$ elemanını q olarak adlandıralım. (5.11) de y yerine yx alıp (5.11) i kullanarak, her $x, y \in Q$ için $(d(y) - [q, y])xc = 0$

sonucuna ulaşılır. Bu bağıntıda $c \neq 0$ olması ve Q nun asallığı kullanılırsa her $y \in Q$ için $d(y) = [q, y]$ bulunur. Bunu (5.10) da yerine yazarak $qc = 0$ olduğu görülür. Her $y \in Q$ için $d(y) = [q, y]$ olduğunu her $x \in Q$ için $g(x) = ax + bd(x)$ bağıntısında yerine yazarak her $x \in Q$ için $g(x) = (a+bq)x - bxq$ bulunur. Elde edilen g nin bu formunu hipotezde kullanıp $qc = 0$ olduğunu dikkate alarak her $x \in Q$ için $(a + bq)xc = 0$ elde edilir. Bu durumda Q nun asallığı ve $c \notin Z(R)$ olması $a + bq = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $q \in Q(RC)$ ve her $x \in Q$ için $g(x) = -bxq$ ve $qc = 0$ olur ve ispat biter.

Teorem 5.3. *R değişmeli olmayan bir asal halka, $c \in R$ ve g R nin her $x \in R$ için $g(x)c \in Z(R)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir b-genelleştirilmiş türevi olsun. O zaman ya $c = 0$ dır, ya da her $x \in R$ için $qc = 0$ olmak üzere $g(x) = -bxq$ olacak şekilde bir $q \in Q(R)$ elemanı vardır.*

İspat. Hipotezden her $x \in R$ için $g(x)c \in Z(R)$ olduğundan x yerine xy alınırsa, her $x, y \in R$ için

$$g(x)yc + bxd(y)c \in Z(R) \tag{5.12}$$

olur. (5.12) de y yerine cy alarak, her $x, y \in R$ için

$$g(x)cyc + bx(d(c)y + cd(y))c \in Z(R) \tag{5.13}$$

elde edilir. (5.13) bağıntısının R nin merkezinde olmasını, hipotezi ve komutatör özelliklerini kullanarak, her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [yc, g(x)cyc + bx(d(c)y + cd(y))c)] \\ &= [yc, bx(d(c)y + cd(y))c)] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da her $x, y \in R$ için

$$[yc, bx(d(c)y + cd(y))c] = 0 \tag{5.14}$$

elde edilir. Teorem 2.27 den (5.14) özdeşliği Q için de sağlanır. Böylece (5.14) de x yerine xbz alıp (5.14) ü kullanarak, her $x, y, z \in Q$ için $[yc, bx]bz(d(c)y + cd(y))c = 0$ bulunur ve bu bağıntıda x yerine 1 alarak, her $y, z \in Q$ için $[yc, b]bz(d(c)y + cd(y))c = 0$ elde edilir. Son bağıntıda Q nun asallığından her $y \in Q$ için ya $[yc, b]b = 0$ ya da $(d(c)y + cd(y))c = 0$ bağıntısına ulaşılır. Şimdi $H = \{y \in Q : [yc, b]b = 0\}$ ve $K = \{y \in Q : (d(c)y + cd(y))c = 0\}$ olacak şekilde Q nun iki alt kümesini oluşturalım. Buradan hareketle $(H,+)$ ve $(K,+)$, $(Q,+) = (H,+)\bigcup(K,+)$ olacak şekilde $(Q,+)$ nın iki alt grubu olduğu açıktır. Ancak bir grup iki öz altgrubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından, bu durumda ya $Q = H$ olmalıdır, ya da $Q = K$ olmalıdır.

İlk olarak $Q = K$ olsun. O zaman her $y \in Q$ için $(d(c)y + cd(y))c = 0$ olur. Son bağıntıyı (5.13) de kullanarak, her $y \in Q$ için $g(x)cyc \in C$ elde edilir. Hipotezden $g(x)c \in C$ olduğundan, son bağıntı Yardımcı Özellik 2.1 gereğince her $x, y \in Q$ için ya $g(x)c = 0$ dır, ya da $yc \in C$ dir olmasını gerektirir. Her $x \in Q$ için $g(x)c = 0$ ise Yardımcı Özellik 5.2 den ispat tamamlanır. Böylece her $y \in Q$ için $yc \in C$ olduğu durumu düşünelim. Bu durumda $y = 1 \in Q$ alınırsa $c \in C$ elde edilir, bu bağıntıyı hipotezde kullanıp, Yardımcı Özellik 2.1 gereğince ya $c = 0$ dır, ya da $g(x) \in C$ sonucuna varılır. Eğer $c = 0$ ise o zaman ispat tamamlanır. Diğer taraftan, eğer her $x \in Q$ için $g(x) \in C$ ise o zaman Teorem 5.1 den $g = 0$ çelişkisi elde edilir.

Şimdi $Q = H$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $y \in Q$ için $[yc, b]b = 0$ dır. Bu bağıntıda y yerine yz alınırsa, her $y, z \in Q$ için $[y, b]zcb + y[zc, b]b = 0$ bulunur. Son iki bağıntıyı kıyaslayarak, her $y, z \in Q$ için $[y, b]zcb = 0$ olur ve Q nun asallığından ya $b \in C$ dir, ya da $cb = 0$ elde edilir. İlk olarak $b \in C$ olsun. Eğer $b = 0$ ise (5.13) den her $x, y \in R$ için $g(x)cyc \in C$ bulunur ve yukarıda yapılan muhakemelerin aynısını yaparak istenilen sonuçlar elde edilir. Şimdi $0 \neq b \in C$ olduğunu kabul edelim. Kabulümüzü (5.14) de kullanarak her $x, y \in Q$ için $[yc, x(d(c)y + cd(y))c] = 0$ bulunur. Bu bağıntıda x yerine rx alıp son bağıntı kullanılarak, her $r, x, y \in Q$ için $[yc, r]x(d(c)y + cd(y))c = 0$ elde edilir. Q asal olduğundan son bağıntı her $y \in Q$ için ya $[yc, r] = 0$ olmasını, ya da $(d(c)y + cd(y))c = 0$ olmasını gerektirir. Şimdi $H = \{y \in Q : [yc, r] = 0\}$ ve $K = \{y \in Q : (d(c)y + cd(y))c = 0\}$ olacak şekilde Q nun iki alt kümesini oluşturalım. Buradan hareketle $(H,+)$ ve $(K,+)$, $(Q,+) = (H,+)\bigcup(K,+)$ olacak şekilde $(Q,+)$ nın iki alt grubu olur. Ancak bir grup iki öz altgrubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından, bu durumda ya $Q = H$ olmalıdır, ya da $Q = K$ olmalıdır. Aynı işlemleri tekrarlamamak adına daha önce yapılan muhakemelerin çok benzerlerini yaparak her $y \in Q$ için ya $yc \in C$ ya da her $y \in Q$ için $(d(c)y + cd(y))c = 0$ dır sonucuna varılır. Eğer her $y \in Q$ için $(d(c)y + cd(y))c = 0$ olursa o zaman (5.13) den her $x, y \in R$ için $g(x)cyc \in$

C bulunur ve yukarıda yapılan işlemlerin aynısını yaparak ispat tamamlanır. Böylece her $y \in Q$ için $yc \in C$ olduğunu kabul edebiliriz. Burada $y = 1 \in Q$ alınırsa $c \in C$ elde edilir. İlk olarak son elde edilen bağıntıyı hipotezde kullanıp daha sonra Yardımcı Özellik 2.1 den ya $c = 0$ dır, ya da her $x \in Q$ için $g(x) \in C$ dir bağıntılarına ulaşılır. Fakat her $x \in Q$ için $g(x) \in C$ olduğu durumda Teorem 5.1 $g = 0$ çelişkisine gerektirir. Bu durumda $c = 0$ olması gerektiği sonucuna ulaşılır.

Son olarak $cb = 0$ olduğu durumu ele alalım. Hipotezden her $x \in Q$ için $g(x)c \in C$ olduğundan her $r, x \in Q$ için $0 = [r, g(x)c]$ olur. Bu bağıntıyı sağdan b ile çarpıp $cb = 0$ olduğunu kullanarak, her $r, x \in Q$ için $g(x)crb = 0$ bulunur. Q bir asal halka ve $b \neq 0$ olduğundan, son bağıntı her $x \in Q$ için $g(x)c = 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda Yardımcı Özellik 5.2 den teorem ispatlanır.

Teorem 5.4. *R değişmeli olmayan bir asal halka, $a, c \in R$ ve g R nin her $x \in R$ için $ag(x)c = 0$ olacak şekildeki sıfırdan farklı bir b-genelleştirilmiş türevi olsun. O zaman aşağıdakilerden biri sağlanır:*

(i) $a = 0$ dır, ya da $a \in Z(R)$ dir ve her $x \in R$ için $qc = 0$ olmak üzere $g(x) = -bxq$ olacak şekilde bir $q \in Q(RC)$ elemanı vardır,

(ii) $c = 0$ dır, ya da $c \in Z(R)$ dir ve her $x \in R$ için $au = 0$ olmak üzere $g(x) = ux$ olacak şekilde bir $u \in Q$ elemanı vardır,

(iii) $c \in Z(R)$ dir ve her $x \in R$ için $au = 0 = ab$ olmak üzere $g(x) = ux + bd(x)$ olacak şekilde $u, b \in Q$ elemanları vardır,

(iv) Her $x \in R$ için $aw = 0 = qc$ olmak üzere $d(x) = [q, x]$ ve $g(x) = wx - bxq$ olacak şekilde $b, w \in Q$ ve $q \in Q(RC)$ elemanları vardır.

İspat. İlk olarak $a \in Z(R)$ olsun. Eğer $a = 0$ ise ispatlanacak bir şey yoktur. Böylece $0 \neq a \in Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda hipotezden her $x \in R$ için $g(x)ac = 0$ olur ve $0 \neq a \in Z(R)$ olduğundan her $x \in R$ için $g(x)c = 0$ elde edilir. Yardımcı Özellik 5.2 gereğince ya $c = 0$ dır, ya da $qc = 0$ olmak üzere her $x \in R$ için $g(x) = -bxq$ olacak şekilde bir $q \in Q(RC)$ elemanı vardır istenilen (i) sonucu bulunur.

Öncelikle $a \notin Z(R)$ ve $c \in Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x \in R$ için $acg(x) = 0$ olur. Eğer $c = 0$ ise ispatlanacak bir şey olmadığından $c \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. $c \neq 0$ olduğunu son bağıntıda kullanarak, her $x \in R$ için $ag(x) = 0$ bulunur. Bu durumda $a \neq 0$ olduğundan Yardımcı

Özellik 5.1 gereğince ya her $x \in R$ için $au = 0$ olmak üzere $g(x) = ux$ olacak şekilde bir $u \in Q$ elemanı vardır, bu durum (ii) yi ispatlar, ya da her $x \in R$ için $au = 0 = ab$ olmak üzere $g(x) = ux + bd(x)$ olacak şekilde $u, b \in Q$ elemanları vardır, bu durum (iii) yi ispatlar.

Şimdi $a \notin Z(R)$ ve $c \notin Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Hipotezde x yerine xy alınırsa, her $x, y \in R$ için

$$ag(x)yc + abxd(y)c = 0 \tag{5.15}$$

elde edilir. Eğer $ab = 0$ ise (5.15) den her $x, y \in R$ için $ag(x)yc = 0$ olur ve Teorem 2.15 den son bağıntı Q için de sağlanır. Bu durumda $c \notin Z(R)$ ve Q nun asallığı son bağıntıda kullanılarak, her $x \in Q$ için $ag(x) = 0$ bulunur ve bu durumda Yardımcı Özellik 5.1 den istenilen durumlar elde edilir. Böylece $ab \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Şimdi (5.15) bağıntısını göz önüne alarak, her $x, y \in R$ için

$$F(x) = ag(x), \quad H(y) = d(y)c, \quad a_1 = c, \quad c_1 = ab$$

olarak seçelim. O zaman (5.15) bağıntısı her $x, y \in R$ için

$$F(x)yc + abxH(y) = 0$$

olur. Önerme 2.2 den her $x, y \in R$ için

$$F(x) = -abxq_{11}, \quad H(y) = q_{11}yc$$

olacak şekilde $q_{11} \in Q(RC)$ elemanı vardır. Böylece her $x, y \in R$ için

$$ag(x) = -abxq_{11} \tag{5.16}$$

ve

$$d(y)c = q_{11}yc \tag{5.17}$$

bağıntıları elde edilir. Şimdi $q_{11} \in Q(RC)$ elemanını q olarak seçelim. (5.17) de y yerine xy alınırsa, her $x, y \in R$ için $d(x)yc + xd(y)c = qxyc$ olur. Bu bağıntıda (5.17) yi kullanarak, her $x, y \in R$ için $(d(x) - qx + xq)yc = 0$ elde edilir. Teorem 2.27 den son bağıntı Q için de sağlanır. Böylece $c \neq 0$ ve Q bir asal halka olduğundan, her $x \in Q$ için $d(x) = [q, x]$ dır. (Koşan and Lee, 2014, Theorem 2.3) gereğince, her $x \in R$ ve uygun $u, b \in Q$ elemanları için $g(x) = ux + bd(x)$ formunda olduğundan, burada her $x \in Q$ için $d(x) = [q, x]$ olduğu yerine yazılırsa, her $x \in R$ için $g(x) = ux + b[q, x] = (u + bq)x - bxq$ bulunur. Ayrıca g nin bu formunu (5.16) da kullanarak, her $x \in R$ için $-abxq - aux - abqx + abxq = 0$ bulunur. Böylece her $x \in R$ için $(abq + au)x = 0$ ve Teorem 2.15 gereğince her $x \in Q$ için $(abq + au)x = 0$ olur. Son bağıntıda $x = 1 \in Q$ alınarak, $abq + au = 0$ bulunur. Üstelik (5.17) de her $x \in R$ için $d(x) = [q, x]$ olduğu dikkate alınırsa, Teorem 2.27 uyarınca, her $y \in Q$ için $[q, y]c = qyc$ olur. Bu her $y \in Q$ için $yqc = 0$ olmasını gerektirir. Burada $y = 1 \in Q$ alınırsa $qc = 0$ dır. Sonuç olarak $w = u + bq$ olarak alınırsa bu durumda $aw = 0 = qc$ olmak üzere her $x \in R$ için $g(x) = wx - bxq$ elde edilir. Bu ise (iv) ü verir.

Teorem 5.5. *R değişmeli olmayan bir asal halka, $c \in R$ olmak üzere h ilişkili dönüşümü d olan bir b-genelleştirilmiş türev ve g ilişkili dönüşümü δ olan bir b'-genelleştirilmiş türev olsun. Eğer her $x \in R$ için $ch(x) = g(x)c$ ise o zaman aşağıdakilerden biri sağlanır:*

(i) $c = 0$ dır, ya da $c \in Z(R)$ dir ve her $x \in R$ için $h(x) = ax = g(x)$ olacak şekilde bir $a \in Q$ elemanı vardır,

(ii) $c \in Z(R)$, $d = \lambda\delta$ ve $b' = \lambda b$ olmak üzere her $x \in R$ için $h(x) = ax + bd(x)$ ve $g(x) = ax + b'\delta(x)$ olacak şekilde $a, b, b' \in Q$ ve $\lambda \in C$ elemanları vardır,

(iii) $g = 0$ ve ya her $x \in R$ için $ca = 0 = cb$ olmak üzere $h(x) = ax + bd(x)$ olacak şekilde $a, b \in Q$ elemanları vardır, ya da $ca = 0$ olmak üzere, her $x \in R$ için $h(x) = ax$ olacak şekilde bir $a \in Q$ elemanı vardır,

(iv) Her $x \in R$ için $g(x) = ux$, $d(x) = [q, x]$ ve $h(x) = wx - bxq$ olacak şekilde $b, u, w \in Q$ ve $p, q \in Q(RC)$ elemanları vardır. Burada $p \in C$, $q + pc = 0$ ve $cw = 0$ olmak üzere $w = a + bq$ ve $u = cbp$ dir,

(v) $q \in C$, $q + pc = 0$, $cb = 0$ ve $ca = b'q$ olmak üzere, her $x \in R$ için $g(x) = -b'xp$, $h(x) = ax + bd(x)$ olacak şekilde $a, b, b' \in Q$ ve $p, q \in Q(RC)$ elemanları vardır,

(vi) $p = \lambda c$, $qc \in C$ ve $cw + b'qc = 0$ olmak üzere her $x \in R$ için $d(x) = [x, p]$, $h(x) = wx + bxp$, $\delta(x) = [q, x]$, $g(x) = pbx - b'xq$ olacak şekilde $\lambda \in C$, $b, b', w \in Q$ ve $p, q \in Q(RC)$ elemanları vardır,

(vii) $p + qc = 0$, $cb = \lambda b^{'}$ *ve* $cw = 0$ *olmak üzere her* $x \in R$ *için* $d(x) = \lambda^{-1}[x,p]$, $h(x) = wx + \lambda^{-1}bxp$, $\delta(x) = [q,x]$ *ve* $g(x) = -b^{'}xq$ *olacak şekilde* $\lambda \in C$, $b, b^{'}, w \in Q$ *ve* $p, q \in Q(RC)$ *elemanları vardır.*

İspat. İlk olarak $c \in Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda hipotezden her $x \in R$ için $c(h(x) - g(x)) = 0$ olur. Son bağıntıda $c \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa her $x \in R$ için ya $c = 0$ dır, ya da $h(x) = g(x)$ olduğu bulunur. Eğer $c = 0$ ise ispatlanacak bir şey olmadığından her $x \in R$ için $h(x) = g(x)$ olduğu durumu düşünelim. Bu durumda Uyarı 5.1 gereğince istenilen (i) ve (ii) sonuçları elde edilir.

Şimdi $c \notin Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Hipotezde x yerine xy alıp, g ve h nin tanımları kullanılırsa, her $x, y \in R$ için

$$ch(x)y + cbxd(y) - g(x)yc - b^{'}x\delta(y)c = 0 \tag{5.18}$$

elde edilir. İlk olarak $b^{'} = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman (5.18) den her $x, y \in R$ için

$$ch(x)y + cbxd(y) - g(x)yc = 0 \tag{5.19}$$

olur. Eğer $cb = 0$ ise, (5.19) dan her $x, y \in R$ için $ch(x)y - g(x)yc = 0$ bulunur. Hipotezi son bağıntıda kullanarak, her $x \in R$ için

$$g(x)cy - g(x)yc = 0 \tag{5.20}$$

elde edilir. (5.20) de y yerine yr alınırsa, her $r, x, y \in R$ için $g(x)cyr - g(x)yrc = 0$ olur. Diğer taraftan, (5.20) yi sağdan r ile çarparak, her $r, x, y \in R$ için $g(x)cyr - g(x)ycr = 0$ elde edilir. Son iki bağıntı karşılaştırıldığında, her $r, x, y \in R$ için $g(x)y[c,r] = 0$ bulunur. Teorem 2.15 den son özdeşlik Q için de sağlanır. Bu durumda $c \notin Z(R)$ ve Q bir asal halka olduğundan $g = 0$ bulunur. Böylece hipotezden her $x \in R$ için $ch(x) = 0$ elde edilir ve Yardımcı Özellik 5.1 den ya $ca = 0 = cb$ olmak üzere her $x \in R$ için $h(x) = ax + bd(x)$ olacak şekilde $a, b \in Q$ elemanları vardır, ya da her $x \in R$ için $h(x) = ax$ olacak şekilde bir $a \in Q$ elemanı vardır ve $ca = 0$ dır, böylece (iii) elde edilir.

Şimdi $cb \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Üstelik, Teorem 2.27 den, (5.19) özdeşliği Q için de sağlanır. Böylece, (5.19) bağıntısını göz önüne alarak her

$x, y \in Q$ için

$$F_1(x) = ch(x), \quad F_2(x) = -g(x), \quad H_1(y) = d(y),$$
$$a_1 = 1, \quad a_2 = c, \quad c_1 = cb$$

olarak alalım. Bu durumda her $x, y \in Q$ için (5.20)

$$\sum_{j=1}^{2} F_j(x) y a_j + \sum_{i=1}^{1} c_i x H_i(y) = 0$$

formunda olur. O zaman, Önerme 2.2 nin ışığında $i = 1$, $j = 1, 2$ ve her $x, y \in Q$ için

$$F_j(x) = -\sum_{i=1}^{1} c_i x q_{ij}, \quad H_i(y) = \sum_{j=1}^{2} q_{ij} y a_j$$

olacak şekilde $q_{ij} \in Q(RC)$ elemanları vardır. Böylece her $x, y \in Q$ için

$$ch(x) = -cbxq_{11}, \tag{5.21}$$

$$g(x) = cbxq_{12}, \tag{5.22}$$

$$d(y) = q_{11}y + q_{12}yc \tag{5.23}$$

bağıntıları elde edilir. Şimdi (5.21) de x yerine xy yazıp, h nin tanımını kullanarak, her $x, y \in Q$ için $ch(x)y + cbxd(y) = -cbxyq_{11}$ bulunur. Ayrıca bu bağıntıda (5.21) kullanılırsa, her $x, y \in Q$ için $cbx(d(y) - q_{11}y + yq_{11}) = 0$ elde edilir. Son bağıntıda $cb \neq 0$ ve Q nun asal olması kullanılırsa, her $y \in Q$ için $d(y) = [q_{11}, y]$ formunda olduğu görülür. Ayrıca (5.22) de x yerine xy alıp g nin tanımını kullanarak, her $x, y \in Q$ için $g(x)y + b'x\delta(y) - cbxyq_{12} = 0$ bulunur. Son bağıntıda (5.22) ve $b' = 0$ kabulü kullanılırsa, her $y \in Q$ için $cbx(q_{12}y - yq_{12}) = 0$ elde edilir. Bu bağıntıda $cb \neq 0$ ve Q nun asallığından $q_{12} \in C$ olduğu görülür. (5.21) ve (5.22) hipotezde yerine yazılırsa, her $x \in Q$ için $cbx(q_{12}c + q_{11}) = 0$ sonucuna ulaşılır ve Q nun asallığından bu bağıntı $q_{11} = -q_{12}c$ olmasını gerektirir. (Koşan and Lee, 2014, Theorem 2.3) gereğince, her $x \in R$ ve uygun $a, b \in Q$ elemanları için $h(x) = ax + bd(x)$ formunda $d(x) = [q_{11}, x]$ yerine yazılırsa, her $x \in R$ için $h(x) = (a + bq_{11})x - bxq_{11}$ olur. Şimdi $q_{11} = q$, $q_{12} = p$ ve $a + bq = w$ olarak seçelim. Bu durumda her $x \in R$ için $h(x) = wx - bxq$ formunda olur. Ayrıca $q_{11} = -q_{12}c$ olduğundan $q + pc = 0$ bağıntısı kolayca görülür. Diğer taraftan, h ve g nin bu yeni formları hipotezde yerine yazılırsa, her $x \in R$ için $cwx - cbxq = cbxpc$ bulunur. Son iki bağıntıyı kıyaslayarak, her $x \in R$ için $cwx = 0$ elde edilir. Teorem 2.15 den son bağıntı Q için de sağlanır. Burada $x = 1 \in Q$ alınarak $cw = 0$ bulunur. Böylece $p \in C$, $q + pc = 0$, $cw = 0$, $w = a + bq$ ve $u = cbp$ olmak üzere her $x \in R$ için $h(x) = wx - bxq$ ve $g(x) = ux$ formunda olup istenilen (iv) sonucu elde edilir.

Şimdi $b' \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $cb = 0$ ise o zaman (5.18) den her $x, y \in R$ için

$$ch(x)y - g(x)yc - b'x\delta(y)c = 0 \tag{5.24}$$

dır. Teorem 2.27 den (5.24) aynı zamanda Q için de bir özdeşliktir. (5.24) tekrar düzenlenirse, her $x, y \in Q$ için $ch(x)y.1 + (-g(x))y.c + (-b').x\delta(y)c = 0$ elde edilir. Böylece son bağıntıyı göz önüne alarak, her $x, y \in Q$ için

$$F_1(x) = ch(x), \quad F_2(x) = -g(x), \quad H_1(y) = \delta(y)c,$$
$$a_1 = 1, \quad a_2 = c, \quad c_1 = -b'$$

olsun. Bu durumda, her $x, y \in Q$ için (5.24)

$$\sum_{j=1}^{2} F_j(x)ya_j + \sum_{i=1}^{1} c_i x H_i(y) = 0$$

formunda olur. Önerme 2.2 nin ışığında, $i = 1$, $j = 1, 2$ ve her $x, y \in Q$ için

$$F_j(x) = -\sum_{i=1}^{1} c_i x q_{ij}, \quad H_i(y) = \sum_{j=1}^{2} q_{ij} y a_j$$

olacak şekilde $q_{ij} \in Q(RC)$ elemanları vardır. Böylece, her $x, y \in Q$ için

$$ch(x) = b'xq_{11}, \tag{5.25}$$

$$g(x) = -b'xq_{12}, \tag{5.26}$$

$$\delta(y)c = q_{11}y + q_{12}yc \tag{5.27}$$

bağıntıları elde edilir. (5.25) de x yerine xy alıp h nin tanımı kullanılırsa, her $x, y \in Q$ için $ch(x)y + cbxd(y) = b'xyq_{11}$ bulunur. Bu bağıntıda $cb = 0$ olduğunu ve (5.25) i kullanarak, her $x, y \in Q$ için $b'x(q_{11}y - yq_{11}) = 0$ elde edilir. Son bağıntıda $b' \neq 0$ kabulünü ve Q nun asallığını kullarak $q_{11} \in C$ bulunur. Diğer taraftan, (5.26) özdeşliğinde x yerine xy alıp g nin tanımını kullanarak, her $x, y \in Q$ için $g(x)y + b'x\delta(y) = -b'xyq_{12}$ olur. Son bağıntı ile

(5.26) kıyaslandığında, her $x, y \in Q$ için $b^{'}x(\delta(y) + yq_{12} - q_{12}y) = 0$ olduğu görülür. Üstelik $b^{'} \neq 0$ ve Q nun asallığı son bağıntının her $y \in Q$ için $\delta(y) = [q_{12}, y]$ formunu gerektirir. Ayrıca (5.25), (5.26) ve hipotez birlikte düşünülürse o zaman her $x \in Q$ için $b^{'}x(q_{11} + q_{12}c) = 0$ olur. Bu bağıntıda $b^{'} \neq 0$ ve Q nun bir asal halka olması $q_{12}c + q_{11} = 0$ bağıntısını gerektirir. (Koşan and Lee, 2014, Theorem 2.3) gereğince her $x \in R$ ve uygun $a, b, b^{'}, u \in Q$ elemanları için $h(x) = ax + bd(x)$ ve $g(x) = ux + b^{'}\delta(x)$ formundadırlar.

Şimdi $q_{11} = q$ ve $q_{12} = p$ olarak seçelim. Bu durumda her $x \in R$ için $g(x) = ux + b^{'}\delta(x) = ux + b^{'}[p, x] = (u + b^{'}p)x - b^{'}xp$ olur. Son bağıntıda $u + b^{'}p = w$ dersek, her $x \in R$ için $g(x) = wx - b^{'}xp$ olur. Sonuç olarak g nin bu formu ve (5.25) bağıntısı hipotezde yerine yazılarak, her $x \in R$ için $b^{'}xq = g(x)c = wxc - b^{'}xpc$ olur. Teorem 2.15 den son bağıntı Q için de sağlanır. $q_{11} = -q_{12}c$ olduğundan $q + pc = 0$ kolayca görülür. Böylece son iki bağıntıdan her $x \in Q$ için $0 = b^{'}x(q + pc) - wxc = wxc$ bulunur. Q nun asallığından ya $w = 0$ ya da $c = 0$ olur. Fakat $c \notin Z(R)$ olduğundan $w = 0$ olmalıdır. Bu durum g nin formunun $g(x) = -b^{'}xp$ olduğunu verir. Diğer taraftan, $h(x) = ax + bd(x)$ formunu (5.25) de kullanarak, her $x \in Q$ için $cax + cbd(x) = b^{'}xq$ bulunur. Son bağıntıda $cb = 0$ ve $q \in C$ olduğu kullanılırsa, o zaman her $x \in Q$ için $(ca - b^{'}q)x = 0$ elde edilir. Son bağıntıda $x = 1 \in Q$ alınarak $ca - b^{'}q = 0$ bulunur ve böylece (v) koşulu ispatlanmış olur.

Şimdi $cb \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\{cb, b^{'}\}$ kümesinin C-bağımsız olması ya da olmamasına göre iki ayrı durumu ele alalım. İlk olarak $\{cb, b^{'}\}$ kümesi C-bağımsız olsun. Ayrıca Teorem 2.27 den, (5.18) Q için de bir özdeşliktir. (5.18) bağıntısını göz önüne alarak, her $x, y \in Q$ için

$$F_1(x) = ch(x), \quad F_2(x) = -g(x), \quad H_1(y) = -\delta(y)c, \quad H_2(y) = d(y),$$
$$a_1 = 1, \quad a_2 = c, \quad c_1 = b^{'}, \quad c_2 = cb$$

olsun. Böylece (5.18) her $x, y \in Q$ için

$$\sum_{j=1}^{2} F_j(x)ya_j + \sum_{i=1}^{2} c_i x H_i(y) = 0$$

formunda olur. Önerme 2.2 den $i, j = 1, 2$ ve her $x, y \in Q$ için

$$F_j(x) = -\sum_{i=1}^{2} c_i x q_{ij}, \quad H_i(y) = \sum_{j=1}^{2} q_{ij} y a_j$$

olacak şekilde $q_{ij} \in Q(RC)$ elemanları vardır. Böylece her $x, y \in Q$ için

$$ch(x) = -b^{'}xq_{11} - cbxq_{21}, \tag{5.28}$$

$$g(x) = b^{'}xq_{12} + cbxq_{22}, \tag{5.29}$$

$$-\delta(y)c = q_{11}y + q_{12}yc, \tag{5.30}$$

$$d(y) = q_{21}y + q_{22}yc \tag{5.31}$$

bağıntıları elde edilir. (5.28) de x yerine xy alıp h nin tanımını kullanılarak, her $x, y \in Q$ için $ch(x)y + cbxd(y) = -b^{'}xyq_{11} - cbxyq_{21}$ bulunur. (5.28) ve (5.31) i son bağıntıda yazarak, her $x, y \in Q$ için $cbx(q_{22}yc + yq_{21}) + b^{'}x(yq_{11} - q_{11}y) = 0$ elde edilir. $\{cb, b^{'}\}$ kümesi C-bağımsız olduğundan bu durumda son bağıntı $q_{11} \in C$ ve her $y \in Q$ için $q_{22}yc + yq_{21} = 0$ olmasını gerektirir. Böylece Yardımcı Özellik 2.5 ve Yardımcı Özellik 2.6 dan $q_{22} \in C$ ve $q_{22}c = -q_{21}$ elde edilir. (5.29) da x yerine xy alıp (5.29) kullanılırsa o zaman, her $x, y \in Q$ için $b^{'}xq_{12}y + cbxq_{22}y + b^{'}x\delta(y) - b^{'}xyq_{12} - cbxyq_{22} = 0$ bulunur. $q_{22} \in C$ olduğunu son bağıntıda dikkate alarak, her $x, y \in Q$ için $b^{'}x(q_{12}y + \delta(y) - yq_{12}) = 0$ dır. Bu durumda $b^{'} \neq 0$ ve Q asal halka olduğundan son bağıntıdan her $y \in Q$ için $\delta(y) = [y, q_{12}]$ dır. Bu (5.30) da yerine yazılırsa her $y \in Q$ için $q_{11}y + yq_{12}c = 0$ elde edilir. O zaman $q_{11} \in C$ olduğu dikkate alınarak, her $y \in Q$ için $y(q_{11} + q_{12}c) = 0$ bulunur. Q nun asallığından $q_{11} = -q_{12}c$ olduğu görülür. Ayrıca $q_{22} \in C$ ve $q_{22}c = -q_{21}$ olduğunu (5.31) de kullanarak, her $y \in Q$ için $d(y) = q_{21}y + q_{22}yc = q_{21}y + yq_{22}c = q_{21}y - yq_{21} = [q_{21}, y]$ olur. Böylece, her $y \in Q$ için $d(y) = [q_{21}, y]$ bulunur. Şimdi $-q_{12} = q$, $-q_{21} = p$ ve $q_{22} = \lambda$ olarak seçilirse o zaman, $qc \in C$ ve $p = \lambda c$ olmak üzere her $x \in Q$ için

$$d(x) = [x, p] \quad \text{ve} \quad \delta(x) = [q, x] \tag{5.32}$$

olur. Üstelik $p = \lambda c$ olduğundan (5.29) dan her $x \in Q$ için $g(x) = b^{'}xq_{12} + cbxq_{22} = -b^{'}xq + \lambda cbx = pbx - b^{'}xq$ bulunur. Böylece her $x \in Q$ için

$$g(x) = pbx - b^{'}xq \tag{5.33}$$

dır. (Koşan and Lee, 2014, Theorem 2.3) gereğince uygun $a, b \in Q$ ve her $x \in Q$ için h nin $h(x) = ax + bd(x)$ dir. Burada (5.32) yi kullanarak, her $x \in Q$ için $h(x) = ax + b[x, p] = ax + bxp - bpx = (a - bp)x + bxp$ bulunur ve olarak $a - bp = w$ denilirse o zaman her $x \in Q$ için

$$h(x) = wx + bxp \tag{5.34}$$

olur. (5.33) ve (5.34) başlangıç hipotezinde yerine yazılırsa, her $x \in Q$ için $cwx + cbxp = pbxc - b^{'}xqc$ elde edilir. Ayrıca $p = \lambda c$ olduğundan her $x \in Q$ için $cbxp = cbx\lambda c = \lambda cbxc = pbxc$ dir. Son iki bağıntı karşılaştırıp $qc \in C$ olduğu kullanılırsa, her $x \in Q$ için $(cw + b^{'}qc)x = 0$ bulunur. Bu durumda Q nun asallığından $cw + b^{'}qc = 0$ elde edilir ve bu istenilen (iv) yi ispatlar.

Şimdi $\{cb, b^{'}\}$ kümesinin C-bağımlı olduğunu kabul edelim. (Chuang et al., 2006, Lemma 1) den $cb = \lambda b^{'}$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ elemanı vardır. $cb \neq 0$ olduğundan $\lambda \neq 0$ dır. $cb = \lambda b^{'}$ olduğu (5.18) de yerine yazılırsa o zaman, her $x, y \in R$ için $ch(x)y + b^{'}x(\lambda d(y) - \delta(y)c) - g(x)yc = 0$ bulunur. Teorem 2.27 den son bağıntı Q içinde sağlanır, böylece her $x, y \in Q$ için

$$ch(x)y + b^{'}x(\lambda d(y) - \delta(y)c) - g(x)yc = 0 \qquad (5.35)$$

bulunur. Bu bağıntıda her $x, y \in Q$ için

$$F_1(x) = ch(x), \quad F_2(x) = -g(x), \quad H_1(y) = \lambda d(y) - \delta(y)c$$
$$a_1 = 1, \quad a_2 = c, \quad c_1 = b^{'}$$

olsun. Bu durumda (5.35) den her $x, y \in Q$ için

$$\sum_{j=1}^{2} F_j(x)ya_j + \sum_{i=1}^{1} c_i x H_i(y) = 0$$

elde edilir. Önerme 2.2 den $i = 1$, $j = 1, 2$ ve her $x, y \in Q$ için

$$F_j(x) = -\sum_{i=1}^{1} c_i x q_{ij}, \quad H_i(y) = \sum_{j=1}^{2} q_{ij} y a_j$$

olacak şekilde $q_{ij} \in Q(RC)$ elemanları vardır. O zaman her $x, y \in Q$ için

$$ch(x) = -b^{'}xq_{11}, \qquad (5.36)$$

$$g(x) = b^{'}xq_{12}, \qquad (5.37)$$

$$\lambda d(y) - \delta(y)c = q_{11}y + q_{12}yc \qquad (5.38)$$

bağıntıları bulunur. (5.36) da x yerine xy alıp (5.36) yı ve h ın tanımını dikkate alarak, her $x, y \in Q$ için $-bxq_{11}y + cbxd(y) + b^{'}xyq_{11} = 0$ bulunur. $cb = \lambda b^{'}$ olduğu son bağıntıda kullanılarak, her $x, y \in Q$ için $b^{'}x(-q_{11}y + \lambda d(y) + yq_{11}) = 0$ olur. Ayrıca $b^{'} \neq 0$ ve Q asal olduğundan son bağıntı her $y \in Q$ için $\lambda d(y) = [q_{11}, y]$ olmasını gerektirir. Üstelik (5.37) de x yerine xy alıp (5.37) ve g nin tanımı kullanılırsa o zaman, her $x, y \in Q$ için $b^{'}x(\delta(y) + q_{12}y - yq_{12}) = 0$ bulunur. Q nun asallığından ve $b^{'} \neq 0$ olduğundan her $y \in Q$ için $\delta(y) = [y, q_{12}]$ elde edilir. Şimdi her $y \in Q$ için $\lambda d(y) = [q_{11}, y]$ ve $\delta(y) = [y, q_{12}]$ eşitliklerini (5.38) de yazarak her $y \in Q$ için $y(q_{11}+q_{12}c) = 0$ elde edilir. Burada $y = 1 \in Q$ alınırsa $q_{11} + q_{12}c = 0$ sonucuna ulaşılır. Şimdi $-q_{11} = p$ ve $-q_{12} = q$ olsun. O zaman $p + qc = 0$ ve $cb = \lambda b^{'}$ olmak üzere her $x \in Q$ için

$$d(x) = \lambda^{-1}[x, p], \quad \delta(x) = [q, x], \quad g(x) = -b^{'}xq \tag{5.39}$$

bulunur. (Koşan and Lee, 2014, Theorem 2.3) gereğince her $x \in R$ ve uygun $a, b \in Q$ elemanları için $h(x) = ax + bd(x)$ dir. Burada $d(x) = \lambda^{-1}[x, p]$ olduğunu yerine yazarak, her $x \in Q$ için $h(x) = ax + bd(x) = ax + b\lambda^{-1}[x, p] = (a - \lambda^{-1}bp)x + \lambda^{-1}bxp$ elde edilir. Burada $a - \lambda^{-1}bp = w$ olarak adlandırıp, her $x \in Q$ için

$$h(x) = wx + \lambda^{-1}bxp \tag{5.40}$$

bağıntısına ulaşılır. (5.36) ve (5.40) bağıntıları kıyaslandığında, her $x \in Q$ için $cwx + \lambda^{-1}cbxp = b^{'}xp$ bulunur. $cb = \lambda b^{'}$ olduğu kullanılarak, her $x \in Q$ için $cwx = 0$ olduğu görülür. Şimdi $x = 1 \in Q$ alalım. O zaman $cw = 0$ dır. Böylece (vii) elde edilir.

6 SONUÇ

Bu çalışmanın ana bölümlerini oluşturan 3-5. bölümlerde asal halkaların σ-türevlerini (skew türevlerini) ve b-genelleştirilmiş türevlerini içeren birbirinden bağımsız birçok özdeşlik ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde değişmeli olmayan ve karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka üzerinde σ-türev (skew türev) içeren bir özdeşlik ele alınmıştır. Daha açık bir ifadeyle değişmeli olmayan asal halkalarda halkanın elemanlarının sabit bir tamsayı kuvveti üzerinde Engel şartını sağlayan σ-türevleri (skew türevleri) içeren bir özdeşliğin sıfırlayan koşulu incelenmiştir. Bunun sonucunda, halkanın karakteristiğinin ikiden farklı olması durumunda sıfırlayan elemanın sıfır olduğu bulunmuştur.

Dördüncü bölümde ilk olarak asal halkalarda b-genelleştirilmiş türevleri ihtiva eden birçok özdeşlik çalışılmıştır. Her bir durumda ele alınan özdeşliklerin içerdiği b-genelleştirilmiş türevlerin formu veya halkanın yapısı karakterize edilmiştir. Daha sonra bir asal halkanın bir b-genelleştirilmiş türevinin o halka üzerinde homomorfizma veya ters-homomorfizma olarak hareket ettiği durumlarda b-genelleştirilmiş türevlerinin formlarının daha önce farklı türev kavramları ele alınarak yapılan çalışmaların sonuçlarıyla bazı farklılıklar gösterdiği görülmüştür.

Beşinci bölümde asal halkalar üzerinde b-genelleştirilmiş türevleri ihtiva eden bir dizi özdeşlik incelenmiştir. Bu özdeşliklerden ilki bir asal halkanın bir b-genelleştirilmiş türevinin halkanın merkezine ait olması durumudur. Bunun sonucunda halka değişmeli olmadıkça b-genelleştirilmiş türevinin sıfır türev olduğu görülmüştür. Bir diğer özdeşlik de bir asal halkanın bir b-genelleştirilmiş türevinin sağ (sol) sıfırlayan koşulu ele alınıp b-genelleştirilmiş türevinin formu belirlenmiştir ya da sıfırlayan elemanın sıfır olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Son olarak bir asal halkada iki farklı b-genelleştirilmiş türevi ihtiva eden bir özdeşlik ele alınarak bahsedilen b-genelleştirilmiş türevlerin biçimi karakterize edilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde ele alınan problemin incelemesi yapılırken çoğunlukla genelleştirilmiş polinom özdeşliği teorisinin araçları kullanılırken, dördüncü ve beşinci bölümde ise genelleştirilmiş polinom özdeşliği teorisinin yanı sıra ihtiyaç duyulduğunda fonksiyonel özdeşlik teorisinden de yararlanılmıştır. Tezin ana bölümlerinde elde edilen sonuçlar literatürde konu ile ilgili var olan sonuçların bir genellemesi olarak değerlendirebilinir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Albaş, E. and **Argaç, N.**, 2004, Generalized derivations of prime rings, *Algebra Colloq.*, 11(3) 399–410 pp.

Amitsur, S.A., 1965, Generalized polynomial identities and pivotal monomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114: 210–226 pp.

Argaç, N., 2006, On prime and semiprime rings with derivations, *Algebra Colloq.*, 13(3): 371–380 pp.

Ashraf, M., **Ali, A.**, and **Ali, S.**, 2007, Some commutativity theorems for rings with generalized derivations, *Southeast Asian Bull. Math.*, 31(3): 415–421 pp.

Asma, A., **Rehman, N.**, and **Shakir, A.**, 2003, On Lie ideals with derivations as homomorphisms and anti-homomorphisms, *Acta Math. Hungar.*, 101(1-2): 79–82 pp.

Beidar, K.I., **Martindale, III, W.S.**, and **Mikhalev, A.V.**, 1996, *Rings with generalized identities*, volume 196: xiv+522 pp of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker, Inc., New York, ISBN 0-8247-9325-0.

Bell, H.E. and **Kappe, L.C.**, 1989, Rings in which derivations satisfy certain algebraic conditions, *Acta Math. Hungar.*, 53(3-4): 339–346 pp.

Brešar, M., 1995, Functional identities of degree two, *J. Algebra*, 172(3): 690–720 pp.

Chang, J.C., 2009, Right generalized $(\alpha\beta)$-derivations having power central values, *Taiwanese J. Math.*, 13(4): 1111–1120 pp.

Chou, M.C. and **Liu, C.K.**, 2016, Annihilators of skew derivations with Engel conditions on Lie ideals, *Comm. Algebra*, 44(2): 898–911 pp.

Chuang, C.L., 1988, GPIs having coefficients in Utumi quotient rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 103(3): 723–728 pp.

Chuang, C.L., 1992, Differential identities with automorphisms and antiautomorphisms. I, *J. Algebra*, 149(2): 371–404 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Chuang, C.L., 1993, Differential identities with automorphisms and antiautomorphisms. II, *J. Algebra*, 160(1): 130–171 pp.

Chuang, C.L., **Chou, M.C.**, and **Liu, C.K.**, 2006, Skew derivations with annihilating Engel conditions, *Publ. Math. Debrecen*, 68(1-2): 161–170.

Chuang, C.L. and **Lee, T.K.**, 2005, Identities with a single skew derivation, *J. Algebra*, 288(1): 59–77 pp.

Chuang, C.L. and **Liu, C.K.**, 2007, Extended Jacobson density theorem for rings with skew derivations, *Comm. Algebra*, 35(4): 1391–1413.

De Filippis, V., 2000, On the annihilator of commutators with derivation in prime rings, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 49(2): 343–352 pp.

De Filippis, V., **Scudo, G.**, and **Tammam El-Sayiad, M.S.**, 2012, An identity with generalized derivations on Lie ideals, right ideals and Banach algebras, *Czechoslovak Math. J.*, 62(137)(2): 453–468 pp.

Dhara, B., 2012, Generalized derivations acting as a homomorphism or anti-homomorphism in semiprime rings, *Beitr. Algebra Geom.*, 53(1): 203–209 pp.

Dhara, B., **Kar, S.**, and **Pradhan, K.G.**, 2016, An Engel condition of generalized derivations with annihilator on Lie ideal in prime rings, *Mat. Vesnik*, 68(3): 164–174 pp.

Erickson, T.S., **Martindale, 3rd, W.S.**, and **Osborn, J.M.**, 1975, Prime nonassociative algebras, *Pacific J. Math.*, 60(1): 49–63 pp.

Hungerford, T.W., 1974, *Algebra*, volume 73: xxiii+502 pp of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York-Berlin, reprint of the 1974 original.

Hvala, B., 1998, Generalized derivations in rings, *Comm. Algebra*, 26(4): 1147–1166 pp.

Jacobson, N., 1964, *Structure of rings*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 37. Revised edition, American Mathematical Society, Providence, R.I., ix+299 pages.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Kharchenko, V.K. and **Popov, A.Z.**, 1992, Skew derivations of prime rings, *Comm. Algebra*, 20(11): 3321–3345 pp.

Kharčenko, V.K., 1975, Generalized identities with automorphisms, *Algebra i Logika*, 14(2): 215–237 pp.

Koşan, M.T. and **Lee, T.K.**, 2014, b-generalized derivations of semiprime rings having nilpotent values, *J. Aust. Math. Soc.*, 96(3): 326–337 pp.

Lam, T.Y., 1991, *A first course in noncommutative rings*, volume 131: xvi+397 pp of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York.

Lanski, C., 1997, An Engel condition with derivation for left ideals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(2): 339–345 pp.

Lanski, C., 2014, Skew derivations and Engel conditions, *Comm. Algebra*, 42(1): 139–152 pp.

Lee, T.K., 1992, Semiprime rings with differential identities, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 20(1): 27–38 pp.

Lee, T.K., 1999, Generalized derivations of left faithful rings, *Comm. Algebra*, 27(8): 4057–4073 pp.

Martindale, III, W.S., 1969, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, *J. Algebra*, 12: 576–584 pp.

Mayne, J.H., 1976, Centralizing automorphisms of prime rings, *Canad. Math. Bull.*, 19(1): 113–115 pp.

Mayne, J.H., 1984, Centralizing mappings of prime rings, *Canad. Math. Bull.*, 27(1): 122–126 pp.

Pehlivan, T. and **Albaş, E.**, 2020, Annihilators of skew derivations with Engel conditions on prime rings, *Czechoslovak Math. J.*, First Online: 1–17 pp.

Posner, E.C., 1957, Derivations in prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8: 1093–1100 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Rowen, L.H., 1988, *Ring theory. Vol. I*, volume 127: xxiv+538 pp of *Pure and Applied Mathematics*, Academic Press, Inc., Boston, MA, ISBN 0-12-599841-4.

Rowen, L.H., 1980, *Polynomial identities in ring theory*, volume 84: xx+365 p of *Pure and Applied Mathematics*, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London.

Shiue, W.K., 2003, Annihilators of derivations with Engel conditions on one-sided ideals, *Publ. Math. Debrecen*, 62(1-2): 237–243 pp.

Wang, Y. and **You, H.**, 2007, Derivations as homomorphisms or anti-homomorphisms on Lie ideals, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 23(6): 1149–1152 pp.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması aşamasında engin bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşmaktan hiçbir zaman çekinmeyen ve lisansüstü eğitimimin en başından itibaren ilgisini ve desteğini esirgemeyen, inancını daima hissettiğim, yaptığı eleştirilerle her geçen gün akademik olarak ilerlememi sağlayan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Emine ALBAŞ' a, düzenlediğimiz seminerlerde bilgi, görüş ve önerilerini her zaman benimle paylaşan başta hocalarım Sayın Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ ve Sayın Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ olmak üzere çalışmamı titizlikle inceleyen, değerli görüş ve önerileriyle bu tezin gelişimine katkı sağlayan hocam Sayın Prof. Dr. Hatice KANDAMAR' a, ihtiyaç duyduğum her noktada yardım etmekten kaçınmayan ve tüm sorularıma cevap veren hocam Sayın Doç. Dr. Çağrı DEMİR' e teşekkür ederim.

Aldığım her kararın arkasında kararlılıkla duran, aşılamayacağını düşündüğüm sıkıntıları aşılabilir kılan ve bana koşulsuzca güvenen başta artık aramızda olmayan fakat her zaman yanımda hissettiğim babam **Salim PEHLİVAN** olmak üzere sevgili annem Emine PEHLİVAN ve kardeşim Tolga PEHLİVAN' a, gerek akademik çalışmalarımda gerek hayatımla ilgili aldığım kararlarda bana destek olan arkadaşlarım Hatice Sevde DENİZALTI ve Nefise CEZAYİRLİOĞLU' na yürekten teşekkür ederim.

Ayrıca, BİDEB 2211/A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sunduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a ve 20-FEN-621 numaralı projeye desteklerinden dolayı Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğüne teşekkürü bir borç bilirim.

06.01.2020

Taylan PEHLİVAN

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

Ad-Soyad: Taylan PEHLİVAN

Adres: Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü 35100, Bornova, İzmir

Doğum Tarihi: 18.09.1990

Doğum Yeri: Çorlu/ Tekirdağ

Öğrenim Durumu

Eylül 2015-Ocak 2020 : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Matematik Doktora Programı (GNO: 3.76/4.00)

Eylül 2013-Haziran 2015 : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Cebir ve Sayılar Teorisi Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı (GNO: 3.71/4.00)

Eylül 2008-Haziran 2013 : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü Lisans Programı (GNO: 3.37/4.00)

Eylül 2004-Haziran 2008 : Çorlu Mehmet Akif Ersoy Anadolu Lisesi

Eylül 1997-Haziran 2004 : Özel Trakya Koleji

SCI, SCI-E İndekslerine Giren Dergilerde Yayınlanan Makaleler

1. Pehlivan, T. and Albaş, E., Annihilators of Skew Derivations with Engel Conditions on Prime Rings, *Czechoslovak Mathematical Journal*, in press DOI: 10.21136/CMJ.2019.0412-18.

Uluslararası Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. **Taylan Pehlivan**, Emine Albaş, A Certain Identity of Skew Derivations in Prime Rings, New Trends in Rings and Modules I, Gebze, Turkey, June 20-23, 2018 (sözlü).

2. **Taylan Pehlivan**, Emine Albaş, Some Identities Related to b-generalized Derivations in Prime Ring, Antalya Algebra Days XXI, Izmir, Turkey, May 15-19, 2019 (sözlü).

3. **Taylan Pehlivan**, Emine Albaş, A note on b-generalized derivations on prime rings, International Conference on Mathematics and Mathematics Education(ICMME), Konya, Turkey, July 11-13, 2019 (sözlü).

Katıldığı Seminerler

1. 3rd Workshop on Rings, Modules and Algebras, Izmir, Turkey, June 23-27, 2014.

2. Antalya Algebra Days XVII, Izmir, Turkey, May 20-24, 2015.

3. 6. Halka, Modül ve Cebir Çalıştayı, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, Türkiye, 3-7 Temmuz, 2017.

4. 8. Halka, Modül ve Cebir Çalıştayı, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon, Türkiye, 24-28 Haziran, 2019.

Görev Aldığı Projeler

Albaş, E., Pehlivan, T., Genelleştirilmiş Skew Türevler ve b-genelleştirilmiş Türevler, Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü, Doktora Tez Projesi, No: 20-FEN-621, Araştırmacı, *Mayıs 2019-*

Ödüller

TÜBİTAK 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı Bursiyerliği, *Eylül* 2016