EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

SAĞLAM İLETİŞİM AĞLARININ TASARIMINDA BAĞLANTILILIK VE ORTALAMA BAĞLANTILILIK ÜZERİNE

Lütfiye Alev GÜRTUNCA

Matematik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu: 619.003.03
Tezin Sunulduğu Tarih: 11.09.2007

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Pınar DÜNDAR

Bornova-İZMİR

Sayın **Lütfiye Alev GÜRTUNCA** tarafından doktora tezi olarak sunulan "**Sağlam İletişim Ağlarının Tasarımında Bağlantılılık ve Ortalama Bağlantılılık** " başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 11.09.2007 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

-

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Prof. Dr. Pınar DÜNDAR**	**...............................**
Üye	**: Prof. Dr. Urfat NURIYEV**	**................................**
Üye	**: Prof. Dr. Şennur SOMALI**	**...............................**
Üye	**: Doç. Dr. Halil ORUÇ**	**...............................**
Üye	**: Doç. Dr. Alpay KIRLANGIÇ**	**...............................**

ÖZET

SAĞLAM İLETİŞİM AĞLARININ TASARIMINDA BAĞLANTILILIK VE ORTALAMA BAĞLANTILILIK ÜZERİNE

GÜRTUNCA, Lütfiye Alev
Doktora Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Pınar Dündar
Eylül 2007, 89 sayfa

Bir ağın güvenilirliğinde, zedelenebilirlik ve ölçümü büyük önem taşır. Bu amaçla graf teoride tanımlanmış bazı zedelenebilirlik ölçümleri vardır.

Bu çalışmada Ortalama Bağlantılılık ele alındı ve tarafımızdan Bağımsız Ortalama Bağlantılılık tanımlandı, özellikleri incelendi. Çeşitli graf sınıflarının Bağımsız Ortalama Bağlantılılık, değeri üzerine teoremler ve bir algoritma verildi.

Anahtar sözcükler: Bağlantılılık, Ortalama Bağlantılılık, Bağımsız Ortalama Bağlantılılık

ABSTRACT

ON THE CONNECTIVITY AND THE AVERAGE CONNECTIVITY IN DESIGNING OF RELIABLE COMMUNICATION NETWORKS

GÜRTUNCA, Lütfiye Alev
Ph. D in Mathematics Department
Supervisors : Prof. Dr. Pınar Dündar
September 2007, 89 pages

Vulnerability and its measures have a great importance in the reliability of a communication network. By this aim there are some vulnerability measures defined in graph theory.

In this work, the average connectivity is considered and the independent average connectivity of a graph is defined and its properties are searched. We give some theorems about the independent average connectivity of various graph classes and an algorithm.

Key Words: Connectivity, Average connectivity, independent average connectivity.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince değerli görüşlerinden yararlandığım, bana her zaman destek, teşvik ve yardımını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Pınar Dündar' a, teşekkürlerimi sunarım.

Bugüne kadar hep yanımda olan ve beni destekleyen sevgili aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

İÇİNDEKİLER (devam)

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama	Sayfa No
$deg(v)$	Tepe derecesi	7
$k(G)$:	Bağlantılılık	10
$K(G)$:	Toplam Bağlantılılık	13
$\bar{k}(G)$:	Ortalama Bağlantılılık	13
$k_G(u,v)$:	u-v tepeleri arasındaki içten ayrık yol sayısı	13
$TI(G)$:	Toplam Bağımsızlık	19
$\bar{k}_{\beta}(G)$:	Bağımsız Ortalama Bağlantılılık	19
$\delta(G)$:	Minimum tepe derecesi	20
$G=(V,E)$:	V tepeler kümesi, E ayrıtlar kümesi bir G grafı	31
$\beta(G)$:	Bir G grafının Bağımsızlık sayısı	31

SİMGELER VE KISALTMALAR (Devam)

Simgeler	Açıklama	Sayfa No
P_n :	n tepeli bir yol graf	34
C_n :	n tepeli bir çevre graf	35
K_n :	n tepeli bir tam graf	36
$K_{1,n-1}$:	n tepeli bir yıldız graf	36
$K_{m,n}$:	Bipartite graf	37
$W_{1,n-1}$:	Tekerlek graf	38

1.GİRİŞ

Bir iletişim ağının bazı merkezlerinde ya da hatlarında meydana gelecek bozulmalar, ağın fonksiyonunu tam olarak gerçekleştirmesini önler. Bu nedenle iletişim ağları tasarlanırken ağ topolojileri içinden bozulmalara karşı direnci olabildiğince çok olan birinin, diğerlerine yeğlenmesi bu tip bir sorunla karşılaşılmasını baştan azaltmış olur. Her tür iletişim ağı bir graf ile modellenebilmektedir. Bir iletişim ağında zedelenebilirlik, ağın bazı merkezlerinin ya da bağlantı hatlarının bozulmasından sonra iletişim kesilene kadar geçen süredeki ağın dayanma gücüdür.

Tezin ilk bölümünde zedelenebilirlik üzerine graf teoride yapılan tanım ve çalışmalardan söz edildi.

İkinci bölümde Ortalama Bağlantılılık tanımından hareketle Bağımsız ortalama bağlantılılık bir zedelenebilirlik ölçümü olarak tarafımızdan tanımlanmıştır. Bu bölümde Bağımsız ortalama bağlantılılığın özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde graf işlemleri altında Bağımsız ortalama bağlantılılık üzerine teoremler ve sonuçları verilmiştir. Ayrıca bir grafın Bağımsız ortalama bağlantılılığını hesaplayan bir algoritma sunulmuştur.

Graf teorisi büyük matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) 'in Königsberg köprüleri problemine çözüm bulmak için geliştirdiği bir teoridir. Euler, problemi çözerken somut bir olayı modelleme yaparak soyut bir şekle dönüştürmüş ve teorinin temellerini atmış, ardından teori Hamilton, Heawood, Whitney, Tutte, Ore, Erdös, Katona, Polya, Seshu ve Frank Harary gibi matematikçilerin eşsiz katkılarıyla bugünkü durumuna gelmiştir. Graf teorisi tepeler ve bu tepeler arasındaki ilişkilerin varlığını belirten ayrıtlar şeklinde ifade edilebilen bütün günlük hayat problemlerine uygulanmaktadır. Örneğin kimyada bir molekül yapısını oluşturan atomları tepelerle, atomları bir arada tutan kimyasal bağları ayrıtlarla, bilgisayar bilimlerinde bir bilgisayar ağındaki bilgisayarları tepelerle, bilgisayarlar arasındaki iletişim kablolarını ayrıtlarla, şehir ve bölge planlamasında merkezleri tepelerle, merkezleri birbirine bağlayan yolları ayrıtlarla v.b. ifade edebiliriz. Bu örneklerin hepsi kendi alanlarında birçok önemli problem barındırmaktadır. Örneğin bilgisayar ağında en az kaç tane bilgisayar bozulursa veya benzer şekilde en az kaç tane iletişim hattı bozulursa ağ özelliğini yitirir. Eğer G grafını bir ağın modeli olarak düşünürsek, bu grafın zedelenebilirlik değerini ölçmek üzere çeşitli ölçümler tanımlanmıştır.

(Bagga, K.S.- Beineke, L. W- Pippert, R.E., 1992-1993; Mader, W, 1979; Cozzens, M. B., 1995; Dündar ,P.1999-2001; Glebov and Kostachka, 1998; Gaddart ve Swart, 1990; Beineke, L. W-Oellermann, O.R – Pippert, R.E, 2002).

Bunlar; bağlantılılık(connectivity), ayrıt bağlantılılık(edge-connectivity), dayanıklılık (toughness), bağlayıcılık(binding), bütünlük (integrity), ayrıt bütünlük(edge-integrity), sağlamlılık(tenacity), ve ortalama bağlantılılık (average connectivity) dır. Bu tanımlarda bozulan tepeler ve hatlar ağdan çıkarılmaktadır.

G grafında , u-v tepeleri arasındaki içten ayrık yolların sayısı $k_G(u,v)$ ile gösterilir ve u-v nin bağlantılılığı olarak tanımlanır.

Bir ağın zedelenebilirliğini ölçmek için $k(G)$, **bağlantılılığı**;

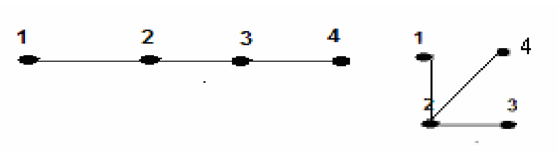
$$k(G)=min\{ k_G(u,v) : u,v \in V\} \text{ dır.}$$

Bir G g rafının $I(G)$, **bütünlüğü** (Barefoot; Entringer ;Swart, 1987);

$$I(G)=\min_{S\subseteq V(G)} \{|S|+m(G-S)\} \text{ dir.}$$

Bu tanımda , $m(G-S)$: G grafından S tepeler kümesi çıkarıldığında kalan parçalanmış grafın en büyük bileşeninin tepe sayısıdır.

Yukarda verilen tanımlar G_1 ve G_2 grafına uygulansın:



$\boldsymbol{G}_1$ $\boldsymbol{G}_2$

$\boldsymbol{G}_1$ grafının S_1={2}, S_2={3}, S_3={2,3} tepe kümeleri alınsın.

$k(\boldsymbol{G}_1)=1$ dir . $I(\boldsymbol{G}_1)=\min_{S\subseteq V(G)} \{1+2,1+2,2+1\}=\min_{S\subseteq V(G)} \{3,3,3\}=3$

$\boldsymbol{G}_2$ grafının S_1={2}, S_2={2,4} kesim tepe kümeleri alınsın.

$k(\boldsymbol{G}_2)=1$ dir . $I(\boldsymbol{G}_2)=\min_{S\subseteq V(G)} \{1+1,2+1\}=\min_{S\subseteq V(G)} \{2,3\}=2$

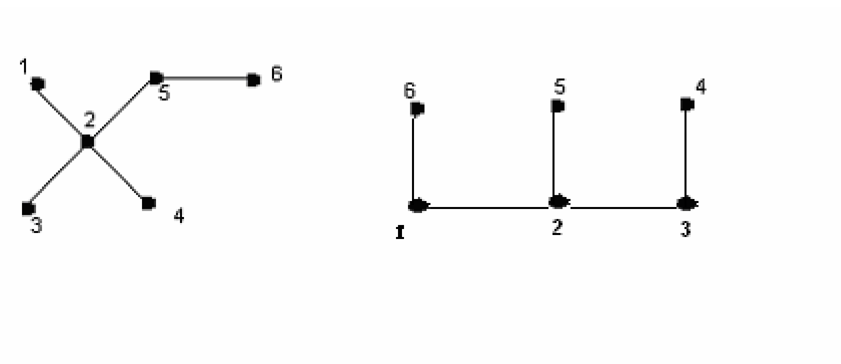
Sonuç olarak, $k(\boldsymbol{G}_1)=k(\boldsymbol{G}_2)$, $I(\boldsymbol{G}_1)\neq I(\boldsymbol{G}_2)$ dir.

Bir G grafının *T(G),* **sağlamlığı** ;

$$T(G) = \min_{S \subset V(G)} \left\{ \frac{|S| + m(G-S)}{c(G-S)} \right\} \quad \text{dır.}$$

$m(G-S)$ *;G-S* grafının ençok tepeye sahip bileşeninin tepe sayısı,

c(G-S) ; *G-S* grafının parça sayısıdır.



$\mathbf{G}_1$ $\quad\quad$ G_2

$k(G_1)=1$ $\quad\quad$ $k(G_2)=1$

$I(G_1)=3$ $\quad\quad$ $I(G_2)=3$

$\mathbf{G}_1$ grafının $S_1=\{2\}$, $S_2=\{5\}$ kesim tepe kümeleridir.

$S_1=\{2\}$ için $c(\mathbf{G}_1-S_1)=4$, $m(\mathbf{G}_1-S_1)=2$ dir.

S_2={5} için $c(\boldsymbol{G}_1$-$S_2)$= 2, $m(\boldsymbol{G}_1$-$S_2)$= 4

$T(\boldsymbol{G}_1)= \min_{S\subseteq V(G)} \{\frac{1+2}{4},\frac{1+4}{2}\}=\frac{5}{2}$ dir.

$\mathbf{G}_2$ grafının S_1={2}, S_2={5} kesim tepe kümeleridir.

S_1={2} için $c(\boldsymbol{G}_2$-$S_1)$=3, $m(\boldsymbol{G}_2$-$S_1)$= 2 dir.

$T(\boldsymbol{G}_2)= \min_{S\subseteq V(G)} \{\frac{1+2}{3}\}=1$ dir.

Sonuç olarak, $k(\boldsymbol{G}_1)= k(\boldsymbol{G}_2)$, $I(\boldsymbol{G}_1)=I(\boldsymbol{G}_2)$, $T(\boldsymbol{G}_1)\neq T(\boldsymbol{G}_2)$ dir.

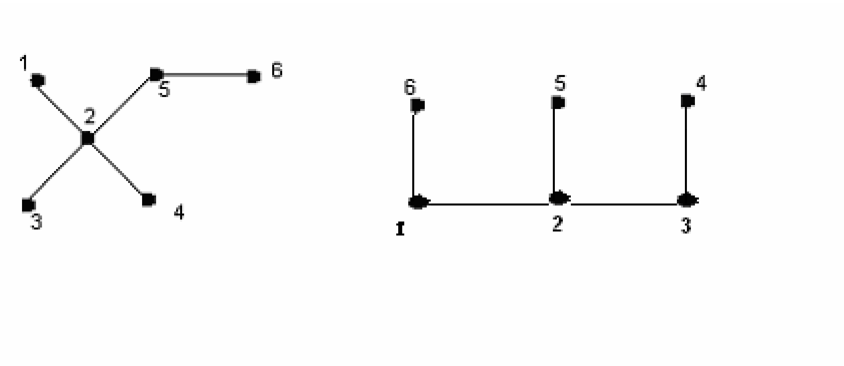
Zedelenebilirlik kavramı çalışılırken, bazı durumlarda bir tepeyi ve ona bitişik tepeleri de göz önüne alarak yeni tanımlamalar ortaya konmuştur.

Bir v tepasinin açık komşuluğu, v ye bitişik tepelerin kümesidir ve $N(v)$ ile gösterilir ve v nin kapalı komşuluğu $N[v]=\{v\cup N(v)\}$ olarak tanımlanır. $S\subseteq v$ için $N[S]$ de benzeri biçimde tanımlanmıştır. Bir S subversion stratejisi ; $N[S]$ nin G grafından çıkarılması olarak tanımlanır.

$G\backslash S$ alt grafı ise, G grafından bir S subversion stratejisinin çıkarılmasından oluşan graftır. $c(G\backslash S)$, $G\backslash S$ ' nin en büyük bileşenindeki tepe sayısıdır.

Bir G grafının $NI(G)$, **komşu bütünlüğü**;

$$NI(G)= \min_{S\subseteq V(G)} \{|S|+c(G\backslash S)\} \text{ dir.}$$



$\mathbf{G}_1$ $\mathbf{G}_2$

$k(G_1)=1$ $k(G_2)=1$

$I(G_1)=3$ $I(G_2)=3$

$\mathbf{G}_1$ grafının $S_1=\{2\}$, $S_2=\{5\}$ kesim tepe kümeleridir.

$S_1=\{2\}$ için $c(G_1 \backslash S_1)=2$, $S_2=\{5\}$ için $c(G_1 \backslash S_2)=4$

$NI(G_1)=\min\limits_{S\subseteq V(G)}\{1+2,1+4\}=3$ dir.

$\mathbf{G}_2$ grafının $S_1=\{2\}$, $S_2=\{5\}$ kesim tepe kümeleridir.

$S=\{2\}$ için $NI(G_2)=\min\limits_{S\subseteq V(G)}\{1+1\}=2$ dir.

Sonuç olarak, $k(G_1)=k(G_2)$, $I(G_1)=I(G_2)$, $NI(G_1)\neq NI(G_2)$ dir.

Bu tezde amaçlanan bir grafın zedelenebilirlik değerini ölçmek amacıyla daha önce yapılmış olan bu konudaki çalışmalardan da yararlanarak yeni bir ölçüm tanımı yapmaktır.

1.1 TEMEL GRAF BİLGİLERİ

Graf teorisinde zedelenebilirlik ölçümleri öncelikle temel graf sınıfları üzerinde çalışılarak daha sonra genelleme yapılarak gerçekleştirilir. Temel graf sınıflarının belli özellikleri kullanılarak, herhangi bir graf ile bunlar arasındaki işlemsel ilişki kurulmaktadır. Bu şekilde izlenilen yöntem doğruya daha yakın sonuçlar vermekte ve işlemler kısa sürede gerçekleşmektedir.

Tanım 1.1.1 V tepeler kümesi $V \neq \varnothing$ ve $E \subseteq V \times V$ ayrıtlar kümesini oluşturmak üzere *G(V,E)* ifadesine **graf** (çizge) denir.

Tanım 1.1.2: Bir *G(V, E)* grafından, $V' \subset V$ ve $E' \subset E$ olacak biçimde tanımlanan $H(V', E')$ grafı, G'nin bir **alt grafıdır**. $H \subset G$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3:G grafında tüm tepe çiftleri için bu tepeleri birbirine birleştiren en az bir yol varsa G grafı **bağlantılılıdır**.

Bu çalışmada G, n tepeli, bağlantılı, basit ve yönlendirilmemiş bir grafı gösterir.

Tanım 1.1.4: Bir G grafında herhangi bir $v \in V$ tepesinin **derecesi**, o tepenin bitişik olduğu ayrıtların (tepelerin) sayısıdır ve *deg(v)* ile gösterilir.

Tanım 1.1.5: Bir G grafının tepe derecelerinin en küçüğünü veren tepeye **minimum dereceli** tepe denir ve δ(G), grafın minumum tepe derecesini gösterir.

Tanım 1.1.6: Bir G grafının tepe derecelerinin en büyüğünü veren tepeye **maksimum dereceli** tepe denir ve $\Delta(G)$, grafın en büyük tepe derecesini gösterir.

Tanım 1.1.7: $r \in Z^{+}$ olmak üzere bir G grafında $\forall v \in V$ için

deg(v)=r ise G grafı **r-regüler'** dir.

Tanım 1.1.8: Bir G grafının bazı tepelerinin veya bağlantı ayrıtlarının çıkarılmasıyla elde edilen graf en az iki parçadan oluşuyorsa , bu parçaların her birine grafın bir **bileşeni** adı verilir.

Tanım 1.1.9: Yalnızca bir tepe içeren, ayrıt içermeyen grafa **Aşikar** (Trivial) **graf** denir.

Tanım 1.1.10: Bir yürüyüşte her tepe birkez kullanılıyorsa bu yürüyüşe yol denir.Bir G grafının iki tepesi v_i ve v_j olsun. Bu grafta v_1 ve v_n 1 dereceli ve diğer tüm tepeler 2 dereceli ise bu grafa n tepeli bir yol grafı denir ve $\boldsymbol{P}_n$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.11: Bir G grafının tüm tepeleri 2 dereceli ise bu grafa **çevre**(cycle) **graf** denir. n tepeli bir çevre grafı $\boldsymbol{C}_n$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.12: Bir G grafının u ve v tepelerini birleştiren iki yol uç tepeleri dışında ortak bir tepeye sahip değilse bu yola **içten ayrık yol** (internally disjoint path) denir.

Tanım 1.1.13: Eğer bir G grafı bağlantılı ve hiçbir çevreye sahip değilse bu grafa **ağaç (acyclic) graf** denir .

Tanım 1.1.14: n sayıda tepeye sahip bir G grafının tüm tepeleri birbiri ile bitişik ise bu graf **tam graf**tır.K_n ile gösterilir.

Tanım 1.1.15: G nin her bir ayrıtının bir tepesi V_1 kümesinde diğer tepesi V_2 kümesinde olacak şekilde V tepeler kümesi V_1 ve V_2 alt kümelerine ayrılabiliyorsa, G grafı **iki kümeli**dir(bipartite).Burada $V= V_1 U V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olmalıdır.

Tanım 1.1.16 : Bir bipartite grafda V_1 kümesinin her bir tepesi V_2 kümesinin her bir tepesi ile komşu ise bu grafa **tam bipartite graf** denir.$K_{m,n}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.17: n tepeli bir G grafında n-1 tepe 1 dereceli, bir tepe n-1 dereceli ise bu graf **yıldız**(star) adını alır ve $K_{1,n-1}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.18: n tepeli bir G grafında, bir tepe n-1 dereceli, diğer tüm tepeler 3 dereceli ise bu graf **tekerlek** graf adını alır ve $W_{1,n-1}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.19: G grafındaki her bir ayrıtın en az bir ucu S kümesinde olacak şekilde seçilen $S \subset V$ ye bir örtü kümesi denir. G grafının bir minimal örtüsündeki tepelerin sayısı G grafının **örtü sayısı** olarak adlandırılır ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.20: G grafının bir $S \subset V$ alt kümesi için, bu kümedeki herhangi iki tepe bitişik değilse S ye bir bağımsız küme denir.G grafının bağımsız kümeleri içinden en fazla sayıda elemana sahip olanın eleman sayısına grafın **bağımsızlık sayısı** denir ve $\beta(G)$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 1.1.1: n tepeli her G grafı için $\alpha(G)+\beta(G)=n$'dir.

Tanım 1.1.21: $S \subset V$ olmak üzere G grafındaki her bir tepe ya S'deki bir tepeye bitişik ya da S kümesine ait ise, bu S kümesi G grafının bir tepe baskın kümesidir. Baskın kümeler içersinden minimum sayıda elemana sahip olan kümenin eleman sayısına G grafının **baskınlık sayısı denir** ve $\sigma(G)$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 1.1.2: Her G grafı için $\sigma(G) \leq \beta(G)$ dir.

Tanım 1.1.22:G_1 ve G_2 gibi iki grafın **toplamı** $G_1 + G_2$ ile gösterilir.

$G_1 + G_2$ nin tepe kümesi G_1 ve G_2 nin tepe kümelerinin birleşimine eşittir.

Ayrıca G_1 in her bir tepesinin G_2 nin her bir tepesine birleştirilmesiyle elde edilen ayrıtlar, $G_1 + G_2$ nin ayrıtlarını oluştururlar.

Tanım 1.1.23:G_1 ve G_2 gibi iki grafın **çarpımı** $G_1 x G_2$ ile gösterilir.

$G_1 x G_2$ grafının tepe kümesi V_1 ve V_2 nin kartezyen çarpımıdır.

G_1 in tepeler kümesi $V_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, G_2 nin tepeler kümesi

$V_2 = \{ v_1, v_2, ..., v_m \}$ olsun. G_1 ve G_2 nin kartezyen çarpımı,

$V_1 x V_2 = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), \ldots, (u_1, v_m),$
$(u_2, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_2, v_m), \ldots, (u_n, v_1), \ldots, (u_n, v_m)\}$ dır.

$G_1 x G_2$ nin ayrıtları için $u=(u_1, u_2)$, $v=(v_1, v_2)$ tepelerini ele alalım. Eğer $u_1 = v_1$ *ve* u_2 bitişik v_2 yada $u_2 = v_2$ ve u_1 bitişik v_1 ise , u ve v tepeleri $G_1 x G_2$ grafında bir ayrıtla birleştirilir.

Tanım 1.1.24: Bir grafta bitişik olmayan iki tepeyi bir ayrıtla (K_2) ile birleştirmeye ayrıt ekleme denir.

Yardımcı Teorem 1.1.3: $G_m x\, G_n$ grafında m tane G_n grafının kopyası oluşur. $m \leq$ n ve $n \geq 3$ olmak üzere K_n grafları hariç $G_m x G_n$ grafının bağımsızlık sayısı $r \in Z^+$ olup

$$\beta(\, G_m x\, G_n\,) = \left\{ \begin{array}{ll} r.\ \beta.\ \ _{n}) & m = 2.r \\ r.n + \beta(G_n) & m = 2.r + 1 \end{array} \right\} \text{ dir.}$$

Yardımcı Teorem 1.1.4: K_n *de* $\beta(\, K_n\,)=1$ olduğu için

$\beta(\, G_m x\, G_n\,) = m * \beta(\, K_n\,)$ dir.

Yardımcı Teorem 1.1.5: $G_m + G_n$ grafında $m \leq n$ olmak üzere

$\delta\,(G_m + G_n) = m + \delta(G_n)$ dir.

Yardımcı Teorem 1.1.6: $G_m x\, G_n$ grafında $m \leq n$ olmak üzere

$\delta\,(G_m x\, G_n) = \delta(G_m) + \delta(G_n)$ dir.

1.2 Graflarda Bağlantılılık ve Ortalama Bağlantılılık

Tanım 1.2.1: Bağlantılı bir G grafını bağlantısız yapmak veya tek izole tepe elde etmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın **bağlantılılığı** (connectivity) denir.

Bir G grafında , *u-v* tepeleri arasındaki içten ayrık yolların sayısı $k_G(u,v)$ ile gösterilir ve u-v nin bağlantılılığı olarak tanımlanır.

Bu tanım üzerinden $k(G)=min\{\ k_G(u,v) : u,v \in V\}$ ile grafın bağlantılılığı (**connectivity**) tanımlanır.

Tanım 1.2.2: Bir *G* grafını bağlantısız yapmak için graftan çıkarılması gereken en az ayrıt sayısına **ayrıt bağlantılılık sayısı**(Edge Connectivity Number) denir ve $k^{'}$(G) ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 1.2.1: Bir grafın bağlantılılığı minumum tepe derecesini geçmez.

$k(G) \leq k^{'}(G) \leq \delta(G)$ dir**.** (Buckley, F. And Harary, F.,1990).

Yardımcı Teorem 1.2.2: Bir G grafında , her u,v tepe çifti arasında en az k tane içten ayrık yol varsa , G grafı **k- bağlantılıdır** denir (Buckley, F. And Harary, F.,1990).

Yardımcı Teorem 1.2.3: Mengerin klasik teoremine göre en az 2n tepeli bir G grafının , k-bağlantılı olması için $V_1 \cap V_2 = \Phi$ $|V_1| = |V_2| = n$ ve bunları birleştiren k tane içten ayrık yol olması gerekir. (Buckley, F. And Harary, F.,1990).

Tanım 1.2.2: $G=(V,E)$ $\left|V\right|=n,$ $u,v \in V$ olsun. Tüm tepe çiftlerinin bağlantılılığının toplamı G'nin **Toplam Bağlantılılığı** olarak tanımlanır. (Beineke, L. W-Oellermann, O.R – Pippert, R.E, 2002).

Kısaca, toplam bağlantılılık

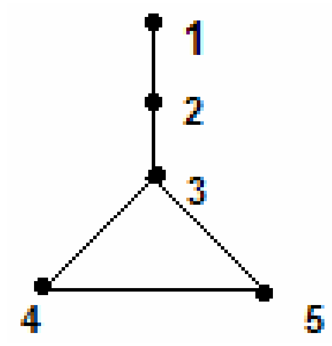
$$K(G)=\sum_{\{u,v\}\subset V} k(u,v) \text{ ile gösterilir.}$$

Tanım 1.2.3: Bir n tepeli G grafının bütün tepe çiftlerinin bağlantılılıklarının ortalaması, $\bar{k}$(G) olarak gösterilen G'nin **Ortalama Bağlantılılığıdır** (Average connectivity) (Beineke, L. W-Oellermann, O.R – Pippert, R.E, 2002).

$$\bar{k}(G)=\frac{\sum_{\{u,v\}\subset V} k_G(u,v)}{\binom{n}{2}} = \frac{K(G)}{\binom{n}{2}} \quad \text{olarak tanımlanır.}$$

Örnek1.2.1: Yukarda verilen tanımlar G grafına uygulansın:

$k(G_1)=1$ olan 5 tepeli bağlantılı bir G_1 grafı şekil 1.2.1 de verilsin.



G_1

Şekil 1.2.1

Bu grafın tüm tepe ikililerinin kümeleri ,

$V_1=\{1,2\}$, $V_2=\{1,3\}$, $V_3=\{1,4\}$, $V_4=\{1,5\}$, $V_5=\{2,3\}$, $V_6=\{2,4\}$, $V_7=\{2,5\}$, $V_8=\{3,4\}$, $V_9=\{3,5\}$, $V_{10}=\{4,5\}$ dir.

Eğer, $V_1=\{1,2\}$ alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(1,2) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(1,2)=1$,

Eğer, $V_2=\{1,3\}$ alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(1,3) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(1,3)=1$,

Eğer, $V_3=\{1,4\}$ alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(1,4) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(1,4)=1$,

Eğer, $V_4=\{1,5\}$ alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(1,5) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(1,5)=1$,

Eğer, $V_5=\{2,3\}$ alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(2,3) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(2,3)=1$,

Eğer, $V_6=\{2,4\}$ alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(2,4) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(2,4)=1$,

Eğer, $V_7=\{2,5\}$ alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(2,5) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(2,5)=1$,

Eğer, $V_8=\{3,4\}$ alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(3,4) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(3,4)=2$,

Eğer, $V_9=\{3,5\}$ alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(3,5) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(3,5)$=2 ,

Eğer, V_{10}={4,5} alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(4,5) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(4,5)$=2 dir.

Yukarıdaki uygulamada elde edilen her bir içten ayrık yol sayılarının toplamı:

$$K(G)=\left\{\sum_{u,v\in s_1} k_G(u,v)\right\} = 13 \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, Toplam Bağlantılılık sayısı , $K(G)$=13, n=5 ve tüm tepe çiftleri sayısı $\binom{5}{2}=\left(\frac{5.4}{2}\right)$=10 ile

G grafının Ortalama Bağlantılılığı:

$$\bar{k}(\mathrm{G})=\frac{\sum_{\{u,v\}\subset V} k_G(u,v)}{\binom{n}{2}} = \frac{K(G)}{\binom{n}{2}} = \frac{13}{10} = 1.3 \text{ dir.}$$

Yardımcı Teorem 1.2.4: *G,* tepe dereceleri d_i, $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ yi sağlayan, tepe sayısı $n \ge 2$ olan bir graf olsun. s bir tamsayı; $1 \le s \le n-1$.

Eğer $d_k \le k + s-2 \Rightarrow d_{n-s+1} \ge n-k$ ise

$\forall k$ için, $1 \leq k \leq \lfloor (n\text{-}s+1)/2) \rfloor \Rightarrow$ G grafı s-bağlantılıdır (Buckley, F. And Harary, F.,1990).

Yardımcı Teorem 1.2.5: Bağımsız kümede her u-v çifti için;

$k_G(u,v) \leq min \{\deg(u), \deg(v)\}$ dir.

Bir grafın Ortalama Bağlantılılığı aşağıdaki özelliklere sahiptir(Beineke, L. W-Oellermann, O.R – Pippert, R.E, 2002).

Özellik 1.2.1: Bağlantılılıktan farklı olarak ortalama bağlantılılık, herhangi bir tepe çiftini ayırmak için atılması gereken tepe sayısını verir.

Özellik 1.2.2: Her G grafı için $\bar{k}$(G)$\geq$ $k(G)$ dir.

Özellik 1.2.3: $\bar{k}$(G)=0 olması için gerek ve yeter koşul G nin bir hiç ayrıtı olmayan (null) graf olmasıdır.

Özellik 1.2.4:Eğer G grafı bağlantılı ise $\bar{k}(G)=1$ olması için gerek ve yeter koşul G'nin en az iki tepeli bağlantılı ağaç graf olmasıdır.

Özellik 1.2.5:Eğer G grafı n tepeli bir graf ise o zaman $\bar{k}$(G)$\leq n$ *-1* eşitliğinin olması için gerek ve yeter koşul G nin tam graf olmasıdır.

Yardımcı Teorem 1.2.6: G , tepe dereceleri d_i, $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$ olan bir graf olsun. O zaman $\bar{k}$(G) $\leq$ $\left[\sum_i^p (i-1)d_i\right] / \binom{n}{2}$ dır. (Beineke, L. W-Oellermann, O.R – Pippert, R.E, 2002).

.

2. BAĞIMSIZ ORTALAMA BAĞLANTILILIK

Bir G grafında bağlantılılık en az bağlantılı tepeleri ayırmak için atılması gereken tepe sayısını verir. Ortalama bağlantılılık verilen herhangi tepe ikilisini ayırmak için atılması gereken tepe sayısını verir.

Bağımsız ortalama bağlantılılıkda ise bir *G* grafında bağımsız kümenin elemanlarından seçilen tepe ikililerini ayırmak için atılması gereken tepe sayısını vereceğiz.

Bu bölümde bağımsız ortalama bağlantılılık tanımını yaparak buna bağlı bulduğumuz sonuçları vereceğiz.

2.1 BAĞIMSIZ ORTALAMA BAĞLANTILILIK TANIMI VE TEOREMLERİ

Bir G grafının bağımsızlık sayısını veren kümeler $S_1, S_2, ..., S_r$ olsun.

Bu grafın **Toplam Bağımsızlık**(Total Independence) sayısı S_i ($i=\overline{1,r}$) kümeleri üzerinden

$$TI(G) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in s_i} k_G(u,v) \right\}$$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.1: Bağımsız Ortalama Bağlantılılık(Independent Average Connectivity) ,

$$\bar{k}_\beta(G) = \frac{TI(G)}{\binom{n}{2}}$$ olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.1: Bağlantılı n tepeli bir G grafının Toplam Bağımsızlık sayısı

$$TI(G) = \binom{\beta(G)}{2} * \delta(G)$$ dır.

İspat: Tanım 1.2.1 den $k(G)=min\{ k_G(u,v) : u,v \in V\}$ dir.

$$TI(G) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in s_i} k_G(u,v) \right\}$$ da $k_G(u,v)$ ler yerine $k(G)$ konursa

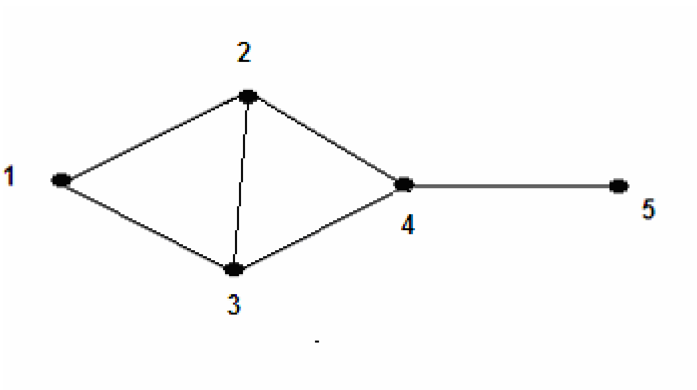
$$TI(G)=\binom{\beta(G)}{2}*k\,(G)$$

Yardımcı teorem 1.2.1 den $k\,(G)\leq \delta\,(G)$ dir.

$$TI(G)=\binom{\beta(G)}{2}*\delta(G) \qquad \text{olur.}$$

Örnek2.1.1: Yukarda verilen tanımlar G_1 grafına uygulansın:

$k(G_1)=1$ olan 5 tepeli bağlantılı bir G_1 grafı şekil 2.1.1 de verilsin.



G_1

Şekil 2.1.1

Bu grafın bağımsızlık sayısını veren S $_i$ bağımsız kümeleri,

S_1={1,4}, S_2={1,5}, S_3={2,5}, S_4={3,5} dir.

Eğer, S_1={1,4} alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(1,4) için içten ayrık yol sayısı; k_G(1,4)=2 ,

Yukarıdaki uygulamada elde edilen her bir içten ayrık yol sayılarının toplamı:

$$TI(G)=\left\{ \sum_{u,v \in s_1} k_G(u,v) \right\} =2 \text{ dir.}$$

Eğer, S_2={1,5} alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(1,5) için içten ayrık yol sayısı; k_G(1,5)=1

Yukarıdaki uygulamada elde edilen her bir içten ayrık yol sayılarının toplamı:

$$TI(G)=\left\{ \sum_{u,v \in s_2} k_G(u,v) \right\} =1 \text{ dir.}$$

Eğer, S_3={2,5} alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(2,5) için içten ayrık yol sayısı; k_G(2,5)=1 dir.

Yukarıdaki uygulamada elde edilen her bir içten ayrık yol sayılarının toplamı:

$$TI(G)=\left\{\sum_{u,v\in s_3} k_G(u,v)\right\}=1 \quad \text{dir.}$$

Eğer, S_4={3,5} alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(3,5) için içten ayrık yol sayısı; k_G(3,5)=1 dir.

Yukarıdaki uygulamada elde edilen her bir içten ayrık yol sayılarının toplamı:

$$TI(G)=\left\{\sum_{u,v\in s_6} k_G(u,v)\right\}=1 \quad \text{dir.}$$

G grafında maksimum bağımsız kümeler içinden , bağlantılılığın (connectivity) küçük olması gerektiğinden toplamları minimum olan küme alınmıştır. Bu nedenle, bağımsızlık sayısını veren küme S_3={2,5} dir.

$$TI(G) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in s_1} k_G(u,v),\ \sum_{u,v \in s_2} k_G(u,v),\ \sum_{u,v \in s_3} k_G(u,v),\ \sum_{u,v \in s_4} k_G(u,v) \right\}$$

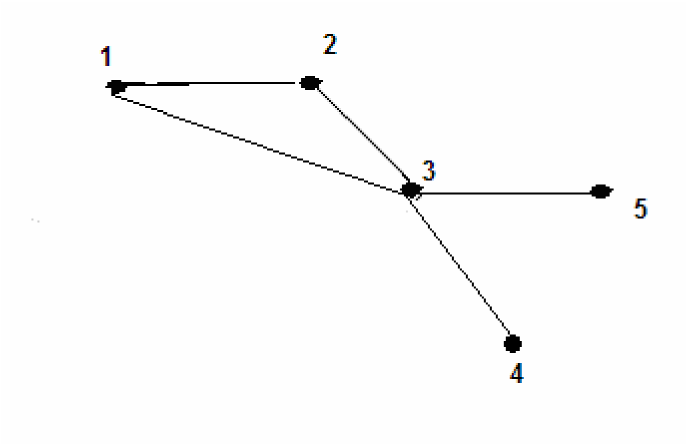
$= \min_i \{2,1,1,1\} = 1$`dir.

Sonuç olarak, Toplam Bağımsızlık sayısı , $TI(G_1) = 1$, $n = 5$ ve tüm tepe çiftleri sayısı $\binom{5}{2} = \left(\frac{5.4}{2}\right) = 10$ ile

G_1 grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı:

$$\bar{k}_{\beta}(G_1) = \frac{TI(G_1)}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10} \text{ dir.}$$

$k(G_2)$=1 olan 5 tepeli bağlantılı bir G_2 grafı da şekil 2.1.2 de verilsin.



G_2

Şekil 2.1.2

Bu grafın bağımsızlık sayısını veren S_i bağımsız kümeleri,

S_1={2,4,5}, S_2={1,4,5} dır.

Eğer, S={2,4,5} alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(2,4) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(2,4)=1$,

(2,5) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(2,5)=1$,

(4,5) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(4,5)=1$ dir.

Yukarıdaki uygulamada elde edilen her bir içten ayrık yol sayılarının toplamı:

$$TI(G)=\left\{\sum_{u,v\in s_1} k_G(u,v)\right\} =1+1+1=3 \text{ dir.}$$

Eğer, $S_2=\{1,4,5\}$ alırsak, bu kümenin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı;

(1,4) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(1,4)=1$,

(1,5) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(1,5)=1$,

(4,5) için içten ayrık yol sayısı; $k_G(4,5)=1$ dir.

Yukarıdaki uygulamada elde edilen her bir içten ayrık yol sayılarının toplamı:

$$TI(G)=\left\{\sum_{u,v\in s_3} k_G(u,v)\right\}=1+1+1=3 \text{ dir.}$$

G grafında maksimum bağımsız kümeler içinden , bağlantılılığın (connectivity) küçük olması gerektiğinden toplamları minimum olan küme alınmıştır. Bu nedenle, bağımsızlık sayısını veren küme $S_2=\{2,5,6\}$ dir.

$$TI(G) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in s_1} k_G(u,v), \sum_{u,v \in s_2} k_G(u,v) \right\} = \min_i \{3,3\} = 3\text{`dür.}$$

Sonuç olarak, Toplam Bağımsızlık sayısı , *TI(G)*=3, n=5 ve tüm tepe çiftleri sayısı $\binom{5}{2} = \left(\frac{4.5}{2}\right) = 10$ ile

G_2 grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı:

$$\bar{k}_\beta(G_2) = \frac{TI(G\ )}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10} \text{dir.}$$

G_1 *ve* G_2 graflarının $|V| = |V_1| = |V_2| = 5$ dır.

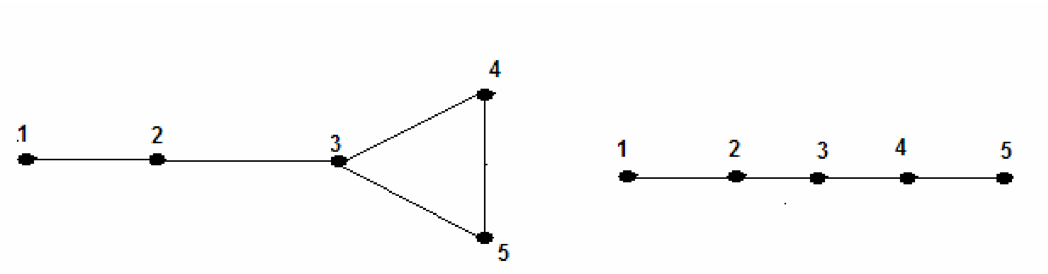
Bu iki grafın bağımsız ortalama bağlantılıkları;

$$\bar{k}_\beta(G_1) = \frac{1}{10}$$

$$\bar{k}_\beta(G_2) = \frac{3}{10} \text{dır.}$$

Sonuçta G_2 grafı bağımsız ortalama bağlantılılığa göre G_1 grafından daha kararlıdır.

Örnek 2.1.2:Şekil 2.1.3 de bağlantılılıkları 1 olan ,tepe sayısı aynı ; ayrıt sayıları farklı G_1 ve G_2 grafları için $\bar{k}_\beta(G_1)$= 0.1 iken $\bar{k}_\beta(G_2)$ =0.3 dir. Ortalama bağlantılılık ayrıt sayısına göre de değişir.



$\mathbf{G}_1$ $\mathbf{G}_2$

Şekil 2.1.3

Teorem 2.1.2: Bağlantılı *n* tepeli *bir G* grafı için

$\bar{k}(G) \geq \bar{k}_\beta(G)$ dir.

İspat : $\bar{k}$(G) **,** *G* grafının tüm tepe çiftleri üzerinde tanımlıdır .

Bir *G* grafında β(G)<*n* olup özellik (1.2.2) ve tanım (2.1.1) kullanıldığından $\bar{k}(G) \geq \bar{k}_\beta(G)$ dir.

Teorem 2.1.3: Bağlantılı her *G* grafı için $k(G) > \bar{k}_\beta(G)$ dir.

İspat: Tanım 1.2.1 de bir *G* grafının bağlantılılığında tüm tepe çiftlerini alırız. Tanım 2.1.1 de bir *G* grafının $\overline{k}_{\beta}(G)$ de bağımsız kümesinin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayılarını bulur ve bunların toplamını $\binom{n}{2}$' e böleriz.

Sonuç olarak $k(G) > \overline{k}_{\beta}(G)$ dir.

Teorem 2.1.4: Bağlantılı her *G* grafı için $\overline{k}(G) \geq k(G) > \overline{k}_{\beta}(G)$ dir.

İspat: Teorem 2.1.1 den $\overline{k}(G) \geq \overline{k}_{\beta}(G)$, Teorem 2.1.3 den $k(G) > \overline{k}_{\beta}(G)$ ve özellik (1.2.2) de $\overline{k}(G) \geq k(G)$ olduğundan $\overline{k}(G) \geq k(G) > \overline{k}_{\beta}(G)$ dir.

Teorem 2.1.5: Bir grafın bağımsız ortalama bağlantılılığı

$\overline{k}_{\beta}(G) < \overline{k}(G) \leq \delta(\mathrm{G})$ dir.

İspat:Y.Teorem 1.2.1 de bir grafın bağlantılılığı minumum tepe derecesini geçmediğinden $k(G) \leq k^{'}(G) \leq \delta(G)$ ve Teorem 2.1.3 $k(G) > \overline{k}_{\beta}(G)$ olduğundan $\overline{k}_{\beta}(G) < \overline{k}(G) \leq \delta(\mathrm{G})$ dir.

Teorem 2.1.6: $\overline{k}_{\beta}(G) \leq \overline{k}(G) \leq \dfrac{\left[\sum_{i}^{n}(i-1)d_i\right]}{\binom{n}{2}}$ dir.

İspat: Teorem 1.2.1 de $\bar{k}(\mathrm{G}) \leq \dfrac{\left[\sum_{i}^{n}(i-1)d_i\right]}{\binom{n}{2}}$ dir.

Teorem 2.1.2 de $\overline{k}_\beta(G) \leq \bar{k}(\mathrm{G})$ olduğundan

$$\overline{k}_\beta(G) \leq \bar{k}(G) \leq \frac{\left[\sum_{i}^{n}(i-1)d_i\right]}{\binom{n}{2}} \text{ dir.}$$

Teorem 2.1.7:$G_1=(V_1,E_1)$ ve $G_2=(V_2,E_2)$ n tepeli iki graf olsun.

Eğer G_1, G_2 nin bir alt grafı ve $\beta_1(G_1)=\beta_2(G_2)$ ise

$\bar{k}_\beta(G_1) \leq \bar{k}_\beta(G_2)$ dir.

G_1 den G_2 grafını oluştururken $\beta_1(G_1)=\beta_2(G_2)$ bozmamak için $e_0=(u,v) \in G_2$ *ve* $e=(u_0,v_0) \in E_2$ ayrıtı 2 farklı durumda olmalıdır.

Durum 1: v_0 tepesi G_1 in bir S bağımsız kümesinde olsun, u_0 tepesi G_1 in aynı S bağımsız kümesinin elemanı olmasın . O zaman ;

$\bar{k}_{\beta}(G_2) \geq \bar{k}_{\beta}(G_1)$ dir.

İspat : G_1 ve G_2 graflarının $S_i(G_1)$ ve $S_j(G_2)$ kümeleri bulunur.

$i=\overline{1,r}$, $j=\overline{1,q}$ dir.

v_0 tepesi ve G_1 in S_i kümesindeki en az bir u tepesi için;

(v_0,u) arasındaki ayrık ayrıtlı yol sayısı 1 artar.Yani

$k_{G_2}(v_0,u) > k_{G_1}(v_0,u)$ olur. Buradan

$\Sigma k_{\beta} G_2(v_0,u) > \Sigma k_{\beta} G_1(v_0,u)$ ve $TI(G_2) > TI(G_1)$ dir.

$\bar{k}_{\beta}(G_2) = \dfrac{TI(G_2)}{\binom{n}{2}}$ ve $\bar{k}_{\beta}(G_1) = \dfrac{TI(G_1)}{\binom{n}{2}}$ den

Sonuç olarak $\bar{k}_{\beta}(G_2) > \bar{k}_{\beta}(G_1)$ dir.

Durum 2: u_0, v_0 tepeleri G_1 in bağımsız kümesinde olmasın:

O zaman ,

$\bar{k}_{\beta}(G_1) = \bar{k}_{\beta}(G_2)$ dir.

İspat : G_1 ve G_2 graflarının

$S_i\ (G_1)$ ve $S_j\ (G_2)$ kümeleri bulunur. $i=\overline{1,r}$, $j=\overline{1,q}$ dir.

v_0 tepesi ile G_1in bağımsız küme tepe çiftleri arasındaki ayrık ayrıtlı yol sayısı aynı kalır.Aynı düşünce u_0 içinde geçerlidir.

$$\Sigma k_\beta G_2(v_0,u) = \Sigma k_\beta G_1(v_0,u) \quad \text{ve} \quad TI\,(G_2)=TI(G_1) \quad \text{dir.}$$

$$\bar{k}_\beta(G_2) = \frac{TI(G_2)}{\binom{n}{2}} \qquad \text{ve } \bar{k}_\beta(\mathrm{G}_1) = \frac{TI(G_1)}{\binom{n}{2}} \quad \text{den}$$

$\bar{k}_\beta(G_1) = \bar{k}_\beta(G_2)$ dir.

Teorem 2.1.8: **:**$G_1=(V_1,E_1)$ *ve* $G_2=(V_2,E_2)$ n tepeli iki graf olsun.

Eğer G_1, G_2 nin bir alt grafı ve $\beta(G_1)>\beta(G_2)$ *ise*

$\bar{k}_\beta(G_1) > \bar{k}_\beta(G_2)$ dir.

İspat *:* G_1 grafından G_2 grafını oluştururken $\beta(G_1)>\beta(G_2)$ korumak üzere $e=(u_0,v_0)$ ayrıtı G_1\`in bir S_1 bağımsız kümesindeki u_0 ve v_0 tepelerini birleştirilmelidir. Bu durumda

$\beta\ (G_1)>\beta(G_2)$ olduğundan

$$\binom{\beta(G_1)}{2} > \binom{\beta(G_2)}{2} \quad \text{dir}$$

$\Sigma\, k_\beta G_1(u_0, v) > \Sigma\, k_\beta G_2(u_0, v)$ olduğundan $TI(G_1) > TI(G_2)$ dir.

Sonuç olarak ,

$$\frac{T(G_1)}{\binom{n}{2}} > \frac{TI(G_2)}{\binom{n}{2}} \Rightarrow \bar{k}_\beta(G_1) > \bar{k}_\beta(G_2) \quad \text{dir.}$$

Teorem 2.1.9: *G* grafının bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$0 \le \bar{k}_\beta(G) \le \frac{n-2}{n} \qquad \text{dir.}$$

İspat : Bağlantılı bir *G* grafı için $\bar{k}_\beta(G)$' nin minumum değeri K_n (tam graf) dır. Çünkü $\beta(K_n)=1$ dir. Tanım bağımsız küme ikilileri üstüne kurulduğundan K_n için yazılamaz. Bu durumda $\bar{k}_\beta(K_n) = 0$ kabul edilmiştir. *TI(G)*' ler tüm bağlantılı G graflarında incelendiğinde $K_{1,n-1}$ (yıldız graf) grafında $\beta(K_{1,n-1}) = n-1$ olup ; toplam bağımsızlık maksimum değerini $K_{1,n-1}$ de alır.

$$\bar{k}_\beta(K_{1,n-1}) = \frac{TI(K_{1,n-1})}{\binom{n}{2}} = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{n-2}{n}$$

n tepeli, tüm bağlantılı G grafları içinde maksimum değerdir.

Sonuç olarak bağlantılı bir G grafı için Bağımsız Ortalama Bağlantılılık

$$0 \leq \bar{k}_{\beta}(G) \leq \frac{n-2}{n} \quad \text{dir.}$$

2.2 Özel Grafların Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

Bu bölümde özel graflar için bağımsız ortalama bağlantılılık üzerine sonuçlar verilmiştir.

Sonuç 2.2.1: P_n grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_n) = \frac{TI(Pn)}{\binom{n}{2}} = \frac{\binom{\beta(P_n)}{2}}{\binom{n}{2}}$$ ile ifade edilir.

İspat :P_n , n tepeli bir yol graf olsun. Bu grafın bağımsızlık sayısını veren S kümesinin elemanlarını belirliyelim.

P_n grafının bağımsızlık sayısını veren kümenin eleman sayısı;

$$\beta(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & n \text{ tek} \\ \frac{n}{2} & n \text{ çift} \end{cases}$$ dir.

Bağlantılı P_n grafını bağlantısız yapmak için veya bir tek izole tepe elde etmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısı S ‘nin elemanlarından seçilir.

$\beta(P_n)$ sayısını veren küme, birden fazla S kümesinde olabilir.

Bu nedenle , $\beta(P_n)$ sayısını veren kümelerin tüm tepe çiftlerinin içten ayrık yol sayısı; $TI(P_n) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_{P_n}(u,v) \right\} = \binom{\beta(P_n)}{2}$ dir.

Toplam bağımsızlık kümesinin tüm tepe çiftleri sayısına bölümünden elde edilen sonuç bize, P_n 'nin bağımsız ortalama bağlantılılık sayısını verecektir.

P_n grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_n) = \frac{TI(Pn)}{\binom{n}{2}} = \frac{\binom{\beta(P_n)}{2}}{\binom{n}{2}}$$ dır.

Sonuç 2.2.2: C_n çevre grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_n) = \frac{TI(Cn)}{\binom{n}{2}} = \frac{\binom{\beta(C_n)}{2} * 2}{\binom{n}{2}}$$ ifade edilir.

İspat : C_n n tepeli bir çevre graf olsun. Bu grafın bağımsızlık sayısını veren S kümesinin elemanlarını belirliyelim.

C_n grafının bağımsızlık sayısını veren kümenin eleman sayısı;

$\beta(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dir.

Bağlantılı C_n grafını bağlantısız yapmak için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısı graf çevre içerdiğinden daima 2 dir.

Bağımsız kümenin elemanlarından seçilen bu tepe çiftleri için

$$TI(C_n) = \min\left\{\sum k_\beta(C_n(u,v))\right\} = \binom{\beta(C_n)}{2} * 2 \qquad \text{dir.}$$

Sonuç olarak , C_n grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(C_n) = \frac{TI(C_n)}{\binom{n}{2}} = \frac{\binom{\beta(C_n)}{2} * 2}{\binom{n}{2}} \quad \text{dir .}$$

Sonuç 2.2.3: K_n , Tam grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$\bar{k}_\beta(K_n)=0$ kabul edilmiştir.

Sonuç 2.2.4:$K_{1,n-1}$, Yıldız grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılık sayısı

$$\bar{k}_\beta(K_{1,n-1}) = \frac{TI(K_{1,n-1})}{\binom{n}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2}}{\binom{n}{2}} \quad \text{dir.}$$

İspat: $K_{1,n-1}$ *n* tepeli bir yıldız graf olsun. Bu grafın önce *S* Bağımsız kümesinin elemanlarını belirliyelim. Bağlantılı $K_{1,n-1}$ grafını bağlantısız yapmak için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısı $\beta(K_{1,n-1})=n-1$ dir.

Bağımsız kümenin elemanlarından seçilen ikililerin içten ayrık yol sayılarının toplamı

$$TI(K_{1,n-1}) = \min_i \left\{ \sum k_\beta(K_{1,n-1}(u,v)) \right\} = \binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} \text{ dır.}$$

Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(K_{1,n-1}) = \frac{TI(K_{1,n-1})}{\binom{n}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2}}{\binom{n}{2}} = = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{n-2}{n} \text{ dir.}$$

Ayrıca; $K_{1,n-1}$ 'in makimum tepe derecesi $\Delta(K_{1,n-1})=n-1$, minumum tepe derecesi $\delta(K_{1,n-1})=1$ dir.

Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı,

$$\bar{k}_\beta(K_{1,n-1}) = \frac{n-2}{n} = \frac{n-1-1}{n} = \frac{\Delta(K_{1,n-1}) - \delta(K_{1,n-1})}{n} \text{ dır.}$$

Sonuç 2.2.5: $K_{m,n}$ (bipartite graph) $m \leq n$ grafı için

Bağımsız Ortalama Bağlantılılık

$$\bar{k}_\beta(K_{m,n}) = \frac{TI(K_{m,n})}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{m,n})}{2} * \delta(K_{m,n})}{\binom{m+n}{2}} \text{ dır.}$$

İspat : $K_{m,n}$ bipartite graf graf olsun. Bu grafın önce S Bağımsız kümesinin elemanlarını belirliyelim. $K_{m,n}$ nin V tepeler kümesi $|v_1| = m$ ve $|v_2| = n$ olmak üzere iki alt kümeye ayrılır.

$m \le n$ ise bu grafın $\beta(K_{m,n})=m$ olur. $K_{m,n}$ grafını bağlantısız yapmak için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısı bipartite grafın bağımsız kümesi olan $\beta(K_{m,n})$=m dir .

Bağımsız kümenin elemanlarından seçilen tüm tepe çiftlerinin, $|V_2|=m$ tane tepesinin, $\delta(K_{m,n})$ min tepe derecesi kadar katının toplamı, toplam bağlantılılığı

$$TI(K_{m,n}) = \min_i \left\{\sum k_\beta (K_{m,n}(u,v))\right\} = \binom{\beta(K_{m,n})}{2} * \delta(K_{m,n}) \text{ dır.}$$

Grafın Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(K_{m,n}) = \frac{TI(K_{m,n})}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{m,n})}{2} * \delta(K_{m,n})}{\binom{m+n}{2}} \quad \text{dır.}$$

Sonuç 2.2.6: $W_{1,n}$ (wheel graph), Tekerlek grafının

Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(W_{1,n}) = \frac{TI(W_{1,n})}{\binom{n+1}{2}} = \frac{\binom{\beta(W_{1,n})}{2} * 3}{\binom{n+1}{2}} \quad \text{dır.}$$

İspat : $W_{1,n}$ $n \geq 3$ tepeli bir tekerlek graf olsun. Bu grafın önce Bağımsız kümesinin elemanlarını belirliyelim. $W_{1,n}$ bir tepe n dereceli, diğer tüm tepeler 3 derecelidir. $W_{1,n} = K_1 + C_n$ olduğundan bağımsız kümesinin elemanlarını C_n grafından alalım. $W_{1,n}$ grafının bağımsızlık sayısı $\beta(W_{1,n}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dir .

Bağımsızlık sayısını veren kümenin elemanlarından seçilen tüm tepe çiftlerinin 3 katı Toplam Bağımsızlık

$$TI(W_{1,n}) = \min_i \left\{ \sum k_\beta (W_{1,n}(u,v)) \right\} *3 \qquad \text{dır.}$$

Grafın Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(W_{1,n-1}) = \frac{TI(W_{1,n-1})}{\binom{n+1}{2}} = \frac{\binom{\beta(W_{1,n-1})}{2} * 3}{\binom{n+1}{2}} \qquad \text{dır.}$$

3.GRAF İŞLEMLERİ ALTINDA BAĞIMSIZ ORTALAMA BAĞLANTILILIK

3.1 Toplama işleminde Bağımsız Ortalama Bağlantılılık

Bu bölümde iki grafın toplanması işlemi ile bağımsız ortalama bağlantılılık değerinde ortaya çıkan sonuçlar, teoremler olarak sunulmuştur.

Teorem 3.1.1: $m \leq n$ olmak üzere bağlantılı m tepeli bir G_m grafına bir n tepeli G_n grafı topladığımızda oluşan grafın bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(G_m + G_n) = \frac{\binom{\beta(G_n)}{2} * \delta\delta(_m + G_n)}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(G_n)}{2} * (m + \delta(G_n))}{\binom{m+n}{2}} \quad \text{dir.}$$

İspat : *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

G_m ile G_n topladığımzda *S;* G_n grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan G_m nin tepeleri $\forall\, v \in V(G_n)$ ile bağlantılı ve $\forall\, v$ tepesinin derecesi $\delta(G_n)$ kadar artacağından

$\delta(G_m + G_n) = m + \delta(G_n)$ dir.

G_m ve G_n graflarının $TI(G_m + G_n)$ nin de minumum olması için *S*; grafın minimum dereceli tepelerinden seçilir.

Bu nedenle grafın toplam bağımsızlığıda artar.

Teorem 2.1.1 de tanımladığımız Toplam Bağımsızlık

$$TI(G_m + G_n) = \min\left\{ \sum_{u,v\in S_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(G_n)}{2} * \delta(G_m + G_n) \text{ dır.}$$

Sonuç olarak , $G_m + G_n$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(G_m + G_n) = \frac{\binom{\beta(G_n)}{2} * \delta(G_m + G_n)}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(G_n)}{2} * (m + \delta(G_n))}{\binom{m+n}{2}} \quad \text{dir.}$$

G_1; m tepeli ve G_2; n tepeli bağlantılı iki özel graf olsun. Bu iki graf için toplama işlemi sonunda elde ettiğimiz sonuçlar aşağıda verilmiştir:

Teorem 3.1.2: Bağlantılı n tepeli bir G grafına bir u tepesi topladığımızda oluşan grafın bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(G+u)=\frac{\binom{\beta(G)}{2}*(\delta(G)+1)}{\binom{n+1}{2}} \text{ dir.}$$

İspat :S, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

Eklenen u tepesi $\forall\, v \in V$ ile bağlantılı olduğu için $u \notin S$ dir.

S deki $\beta(G+u)=\beta(G)$ dir.

Eklenen u tepesi $\forall\, v \in V$ ile bağlantılı olduğundan

bağımsız kümedeki her tepe çifti için birinden başlayıp u tepesi ile devam eden ve diğer tepede biten yeni bir içten ayrık ayrıtlı yol oluşur.

Sonuç olarak

$$TI(G+u) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v)) \right\} = \binom{\beta(G)}{2} * (\delta(G)+1) \text{ elde edilir.}$$

G grafının bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}\ (G+u)= \frac{\binom{\beta(G)}{2} * (\delta(G)+1)}{\binom{n+1}{2}} \quad \text{dır.}$$

Teorem 3.1.3:K_2 grafı ile bağlantılı n tepeli bir G grafı toplandığında bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(\ K_2 + G)= \frac{\binom{\beta(G)}{2} * [\delta(G)+2]}{\binom{n+2}{2}} \text{ dir.}$$

İspat : S, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

G ile K_2 topladığımzda, K_2 nin tepeleri: $\forall\ v \in V$ ile bağlantılı olduğu için bunlar S nin elemanı değildir.S için β (K_2 +G)= β (G) dir. Toplanan e ayrıtının tepeleri $\forall\ v \in V$ ile bağlantılı ve tepe sayısı 2 olduğu için :

$\forall\ v$ tepesinin derecesi 2 artacağından

$\delta\,(G + K_2) = \delta\,(G) + 2$ dir.

Bu nedenle grafın Toplam bağımsızlılığı da artar.

$$TI(G)= \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v)) \right\} = \binom{\beta(\mathrm{G})}{2} * [\delta(G)+2] \text{ dir.}$$

Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_2+G)=\frac{\binom{\beta(G)}{2}*[\delta(G)+2]}{\binom{n+2}{2}} \quad \text{dır.}$$

G_1 ve G_2 bağlantılı , m ve n tepeli iki özel graf olsun. Bu iki grafın toplama işlemi sonunda elde ettiğimiz sonuçlar:

Sonuç 3.1.1: P_m, P_n *m* ve *n* tepeli iki yol graf olsun .$m\geq 3$, $n\geq 3$ olmak üzere, $m\leq n$ olmak koşuluyla , (G_1+G_2) nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_m+P_n)=\frac{\binom{\beta(P_n)}{2}*\delta(P_m+P_n)}{\binom{m+n}{2}}=\frac{\binom{\beta(P_n)}{2}*(m+1)}{\binom{m+n}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

P_m ve P_n topladığımızda *S;* P_n grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan P_m nin tepeleri $\forall$ v$\in V(P_n)$ ile bağlantılı ve $\forall\, v$ tepesinin derecesi 1 artacağından

$\delta(P_m+P_n)=m+\delta(P_n)=m+1$ dir.

Toplam Bağımsızlık

$$TI(P_m+P_n)=\min_i\left\{\sum_{u,v\in S_i}k_G(u,v))\right\}=\binom{\beta(P_n)}{2}*\delta(P_m+P_n) \quad \text{dır.}$$

Sonuç olarak , $P_m + P_n$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_m + P_n) = \frac{\binom{\beta(P_n)}{2} * \delta(P_m + P_n)}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(P_n)}{2} * (m+1)}{\binom{m+n}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.1.2: $G_1 = P_m$ m tepeli bir yol graf ve $G_2 = K_n$ n tepeli bir tam graf olsun . $m \geq 3$, $n \geq 3$ olmak üzere, $m \leq n$ olmak koşuluyla, $(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_m + K_n) = \frac{\binom{\beta(P_m)}{2} * \delta(P_m + K_n)}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(P_m)}{2} * (m+n-1)}{\binom{m+n}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

P_m ile K_n topladığımızda *S;* P_m grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan P_m nin tepeleri $\forall v \in V(K_n)$ ile bağlantılı ve tepe sayısı m olduğu için :

$\forall v$ tepesinin derecesi $n\text{-}1$ artacağından

$\delta(P_m + K_n) = \delta(P_m) + \delta(K_n) = m+n-1$ dir.

$$TI(P_m + K_n) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(P_m)}{2} * \delta(P_m + K_n) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak , $P_m + K_n$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}\,(P_m + K_n) = \frac{\binom{\beta(P_m)}{2} * \delta(P_m + K_n)}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(P_m)}{2} * (m+n-1)}{\binom{m+n}{2}}$$ dır.

Sonuç 3.1.3: $G_1 = P_m$ m tepeli bir yol graf olsun, $G_2 = C_n$ n tepeli bir çevre graf olsun. $m \geq 3,\ n \geq 3$ olmak üzere,

$m \leq n$ olmak koşuluyla, $(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_m + C_n) = \frac{\binom{\beta(C_n)}{2} . \delta(P_m + C_n)}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(C_n)}{2} . (m+2)}{\binom{m+n}{2}}$$ dır.

İspat: S, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

P_m ile C_n topladığımzda S; C_n grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan C_n nin tepeleri $\forall\, v \in V(P_m)$ ile bağlantılı ve $\forall\, v$ tepesinin derecesi 2 artacağından

$\delta(P_m + C_n) = m + \delta(C_n) = m+2$ dir.

Toplam Bağımsızlık

$$TI(P_m + C_n) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v)) \right\} = \binom{\beta(P_m)}{2} * \ \delta(P_m + C_n) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak , $P_m + C_n$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_m + C_n) = \frac{\binom{\beta(C_n)}{2} . \delta(P_m + C_n)}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(C_n)}{2} . (m+2)}{\binom{m+n}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.1.4: $G_1 = P_m$ m tepeli bir yol graf olsun, $G_2 = K_{1,n-1}$ n tepeli bir yıldız graf olsun . $m \geq 3$, $n \geq 3$ olmak üzere

$m \leq n$ olmak koşuluyla , $(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_m + K_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{1,n-1})}{2} . * \delta(P_m + \mathrm{K}_{1,n-1})}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{1,n-1})}{2} . * (m+1)}{\binom{m+n}{2}} \quad \text{dır.}$$

İspat: S, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

P_m *ile* $K_{1,n-1}$ topladığımzda S; $K_{1,n-1}$ grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan P_m nin tepeleri $\forall\, v \in V(K_{1,n-1})$ ile bağlantılı ve $\forall\, v$ tepesinin derecesi 1 artacağından

$\delta(P_m + K_{1,n-1}) = m + \delta(K_{1,n-1}) = m+1$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(P_m + K_{1,n-1}) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v)) \right\} = \binom{\beta(P_m)}{2} * \ \delta(P_m + K_{1,n-1}) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak , $P_m + K_{1,n-1}$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(P_m + K_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} .*\delta(P_m + K_{1,n-1})}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} .*(m+1)}{\binom{m+n}{2}} \text{dır.}$$

Sonuç 3.1.5: $G_1 = P_m$ m tepeli bir yol graf ve $G_2 = K_{n,q}$ tepeli bir bipartite graf olsun .

a) $P_m + K_{n,q}$ de $m \leq n + q$ ise $\begin{cases} n \leq q \\ n > q \end{cases}$ olmak üzere

$(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(P_m + K_{n,q}) = \frac{\binom{\beta(K_{n,q})}{2} * \delta.(P_m + K_{n,q})}{\binom{m+n+q}{2}} = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{\mathrm{n,q}})}{2} * .(m+n)}{\binom{m+n+q}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: S, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

P_m ile $K_{n,q}$ topladığımzda *S; m≤n +q* ise $\begin{cases} n \le q \\ n > q \end{cases}$ olduğu için $K_{n,q}$ grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan P_m nin tepeleri $\forall\, v \in V(K_{n,q})$ ile bağlantılı ve $\forall\, v$ tepesinin derecesi *n* artacağından

$\delta(P_m + K_{n,q}) = m + \delta(K_{n,q}) = m + n$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(P_m + K_{n,q}) = \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v)) \right\} = \binom{\beta(K_{n,q})}{2} * \delta(P_m + K_{n,q}) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak , $P_m + K_{n,q}$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(P_m + K_{n,q}) = \frac{\binom{\beta(K_{n,q})}{2} * \delta.(P_m + K_{n,q})}{\binom{m+n+q}{2}} = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{n,q})}{2} * .(m+n)}{\binom{m+n+q}{2}} \text{ dır.}$$

b) $P_m + K_{n,q}$ de *m>n+q* ve $\begin{cases} n \le q \\ n > q \end{cases}$ olmak üzere $(G_1 + G_2)$ nin

Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(P_m + K_{n,q}) = \frac{\binom{\beta(P_m)}{2} * \delta.(P_m + K_{n,q})}{\binom{m+n+q}{2}} = \frac{\binom{\beta(P_m)}{2} * .(m+n+1)}{\binom{m+n+q}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S*, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

P_m ve $K_{n,q}$ topladığımzda $S;$ $m>n+q$ ve $\begin{cases} n \le q \\ n > q \end{cases}$ olduğu için P_m tepelerinden seçildiğinde toplanan P_m nin tepeleri $\forall\, v \in V(K_{n,q})$ ile bağlantılı ve $\forall\, v$ tepesinin derecesi 1 artacağından

$\delta(P_m + K_{n,q}) = m+n+1$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(P_m + K_{n,q}) = \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v)) \right\} = \binom{\beta(\mathrm{P_m})}{2} * \ \delta(\mathrm{P_m} + \mathrm{K_{n,q}}) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak , $\mathrm{P}_m + \mathrm{K}_{n,q}$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(\mathrm{P}_m + \mathrm{K}_{n,q}) = \frac{\binom{\beta(P_m)}{2} * \delta.(P_m + K_{n,q})}{\binom{m+n+q}{2}} = \frac{\binom{\beta(\mathrm{P_m})}{2} * .(m+n+1)}{\binom{m+n+q}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.1.6: $G_1 = C_n$ n tepeli bir çevre graf ve $G_2 = K_m$ m tepeli bir tam graf olsun . $m \ge 3,\ n \ge 3$ ve $m \le n$ olmak üzere,

$(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(C_n + K_m) = \frac{\binom{\beta(C_n)}{2} * \delta(C_n + K_m)}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(C_n)}{2} * (m+2)}{\binom{m+n}{2}} \qquad \text{dır.}$$

İspat: *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

C_n ve K_m topladığımzda *S;* C_n grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan K_m nin tepeleri $\forall$ v $\in V(C_n)$ ile bağlantılı ve $\forall v$ tepesinin derecesi 2 artacağından

$\delta(C_n + K_m) = m + \delta(C_n) = m+2$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(C_n + K_m) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v)) \right\} = \binom{\beta(C_n)}{2} * \delta(C_n + K_m) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak , $C_n + K_m$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(C_n + K_m) = \frac{\binom{\beta(C_n)}{2} * \delta(C_n + K_m)}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(C_n)}{2} * (m+2)}{\binom{m+n}{2}} \quad \text{dır.}$$

Sonuç 3.1.7: $G_1 = C_m$ *n* tepeli bir çevre graf ve $G_2 = K_{1,n-1}$ *n* tepeli bir yıldız graf olsun . $m \geq 3$, $n \geq 3$ olmak üzere ,

a) $m \leq n$ ise , $(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_m + K_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} * \delta(C_m + K_{1,n-1})}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} * (m+1)}{\binom{m+n}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: S, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

C_m ile $K_{1,n-1}$ topladığımzda S; $K_{1,n-1}$ grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan C_m nin tepeleri $\forall\, v \in V(K_{1,n-1})$ ile bağlantılı ve $\delta(K_{1,n-1})=1$ olduğu için :

$\forall\, v$ tepesinin derecesi 1 artacağından

$\delta(C_m + K_{1,n-1}) = m + \delta(K_{1,n-1}) = m+1$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(C_m + K_{1,n-1}) = \min_i \left\{ \sum_{u,v\in S_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} * \delta(C_m + K_{1,n-1}) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak , $C_m + K_{1,n-1}$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_m + K_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} * \delta(C_m + K_{1,n-1})}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} * (m+1)}{\binom{m+n}{2}} \text{ dır.}$$

b) $m \geq n$ ise $(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_m + K_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(C_m)}{2} * \delta(C_m + K_{1,n-1})}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(C_m)}{2} * .(n+2)}{\binom{m+n}{2}} \quad \text{dır.}$$

İspat: *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

C_m *ve* $K_{1,n-1}$ topladığımzda *S;* C_m grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan $K_{1,n-1}$ nin tepeleri $\forall$ v $\in$ $V(C_m)$ ile bağlantılı ve $\forall$ v tepesinin derecesi 2 artacağından $\delta(C_m + K_{1,n-1}) = n + \delta(C_m) = n+2$ dir.

Bu nedenle Toplam Bağımsızlılığıda artar.

$$TI(C_m + K_{1,n-1}) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(C_m)}{2} * \delta(C_m + K_{1,n-1}) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak , $C_m + K_{1,n-1}$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_m + K_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(C_m)}{2} * \delta(C_m + K_{1,n-1})}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(C_m)}{2} * (n+2)}{\binom{m+n}{2}} \quad \text{dır.}$$

Sonuç 3.1.8: $G_1 = K_{1,n-1}$ n tepeli bir yıldız graf ve $G_2 = K_{m,n}$ tepeli bir bipartite graf olsun .

a) $m \leq q \leq n$, $q=n-1$ olmak üzere $(G_1 + G_2)$ nin

Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_{1,q} + K_{m,n}) = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{m,n})}{2} * \delta(K_{1,q} + K_{m,n})}{\binom{m+n+q}{2}} = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{m,n})}{2} * .(m+q)}{\binom{m+n+q}{2}}$$

İspat: S, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$K_{1,q}$ ve $K_{m,n}$ topladığımzda S; $K_{m,n}$ grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan $K_{1,q}$ tepeleri $\forall\, v \in V(K_{1,q})$ ile bağlantılı ve $\forall\, v$ tepesinin derecesi q artacağından

$\delta(K_{1,q} + K_{m,n}) = m+q$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(K_{1,q} + K_{m,n}) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v)) \right\} = \binom{\beta(K_{m,n})}{2} * \ \delta(K_{1,q} + K_{m,n}) \text{ dir.}$$

Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_{1,q}+K_{m,n})= \frac{\binom{\beta(K_{m,n})}{2} * \delta(K_{1,q}+K_{m,n})}{\binom{m+n+q}{2}} = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{\mathrm{m,n}})}{2} * .(m+q)}{\binom{m+n+q}{2}}$$

dır.

b) $q \geq n \geq m$, $q=n-1$ Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_{1,q}+K_{m,n})= \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{1,\mathrm{q}})}{2} * \delta(K_{1,q}+K_{m,n})}{\binom{m+n+q}{2}} = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{1,\mathrm{q}})}{2} * (m+n+1)}{\binom{m+n+q}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$K_{1,q}$ ve $K_{m,n}$ topladığımzda *S;* $K_{1,q}$ grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan $K_{1,q}$ tepeleri $\forall\, v \in V(K_{m,n})$ ile bağlantılı ve $\forall\, v$ tepesinin derecesi 1 artacağından

$\delta(K_{1,q}+K_{m,n})=m+n+\delta(K_{1,q})=m+n+1$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(K_{1,q}+K_{m,n})=\min_i\left\{\sum_{u,v\in S_i} k_G(u,v))\right\}=\binom{\beta(K_{1,q})}{2}*\ \delta(K_{1,q}+K_{m,n}\ )\ \text{dir.}$$

Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(K_{1,q}+K_{m,n})=\frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{1,q})}{2}*\delta(K_{1,q}+K_{m,n})}{\binom{m+n+q}{2}}=\frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{1,q})}{2}*(m+n+1)}{\binom{m+n+q}{2}}\ \text{dır}$$

Sonuç 3.1.9: $G_1=C_m$ m tepeli ve $G_2=C_n$ n tepeli bir çevre graf olsun . $m\geq 3,\ n\geq 3$ *ve* $m\leq n$ olmak üzere ,

(G_1+G_2) nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(C_m+C_n)=\frac{\binom{\beta(\mathrm{C_n})}{2}*\delta(\mathrm{C_m}+C_n)}{\binom{m+n}{2}}=\frac{\binom{\beta(\mathrm{C_n})}{2}*(m+2)}{\binom{m+n}{2}}\ \text{dır.}$$

İspat: S, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

C_m ve C_n topladığımzda S; C_n grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan C_m nin tepeleri $\forall\, v\in V(C_n)$ ile bağlantılı ve $\forall\, v$ tepesinin derecesi 2 artacağından

$\delta(C_m+C_n)=m+\delta(C_n)=m+2$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(C_m + C_n) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v)) \right\} = \binom{\beta(\mathrm{C_n})}{2} * \ \delta(C_m + C_n) \text{ dir.}$$

$C_m + C_n$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(C_m + C_n) = \frac{\binom{\beta(\mathrm{C_n})}{2} * \delta(\mathrm{C_m} + C_n)}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(\mathrm{C_n})}{2} * (m+2)}{\binom{m+n}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.1.10: $G_1 = K_m$ *m* tepeli ve $G_2 = K_n$ *n* tepeli bir tam graf olsun .$m \geq 3$, $n \geq 3$ *ve* $m \leq n$ olmak üzere, $(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(K_m + K_n) = 1 \qquad \text{dir.}$$

Sonuç 3.1.11:$G_1 = K_m$ *m* tepeli bir tam graf ve $G_2 = K_{1,n-1}$ *n* tepeli bir yıldız graf olsun .

$m \leq n$ *ve* $q = n-1$ olmak üzere , $(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_m + K_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} * \delta(K_m + K_{1,n-1})}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} * (m+1)}{\binom{m+n}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

K_m ve $K_{1,n-1}$ topladığımzda *S;* $K_{1,n-1}$ grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan K_m tepeleri $\forall\ v \in V(K_{1,n-1})$ ile bağlantılı ve $\forall\ v$ tepesinin derecesi 1 artacağından

$\delta(K_m + K_{1,n-1}) = m + \delta(K_{1,n-1}) = m+1$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(K_m + K_{1,n-1}) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} * \ \delta(K_m + K_{1,n-1}) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, $K_m + K_{1,n-1}$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_m + K_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} * \delta(K_m + K_{1,n-1})}{\binom{m+n}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2} * (m+1)}{\binom{m+n}{2}} \quad \text{dır.}$$

Sonuç 3.1.12: $G_1 = K_{1,m-1}$ ve $G_2 = K_{1,n-1}$ *m, n* tepeli iki yıldız graf olsun . $m \le n$ *ve* $m \ge 3,\ n \ge 3$ olmak üzere, $(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı,

$$\bar{k}_{\beta}(K_{1,m-1}+K_{1,n-1})=\frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{1,n-1})}{2}*\delta(K_{1,m-1}+K_{1,n-1})}{\binom{m+n}{2}}=\frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{1,n-1})}{2}*(m+1)}{\binom{m+n}{2}}$$ dır.

İspat: *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$K_{1,m-1}$ *ve* $K_{1,n-1}$ topladığımzda *S;* $K_{1,n-1}$ grafnın tepelerinden seçildiğinde toplanan $K_{1,m-1}$ tepeleri $\forall$ v $\in V(K_{1,n-1})$ ile bağlantılı ve $\forall v$ tepesinin derecesi 1 artacağından

$\delta(K_{1,m-1}+K_{1,n-1})=m+\delta(K_{1,n-1})=m+1$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(K_{1,m-1}+K_{1,n-1})=\min_i\left\{\sum_{u,v\in S_i}k_G(u,v))\right\}=\binom{\beta(K_{1,n-1})}{2}*\ \delta(K_{1,m-1}+K_{1,n-1})$$ dir.

Sonuç olarak, $K_m+K_{1,n-1}$ *nin* Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_{1,m-1}+K_{1,n-1})=\frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{1,n-1})}{2}*\delta(K_{1,m-1}+K_{1,n-1})}{\binom{m+n}{2}}=\frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{1,n-1})}{2}*(m+1)}{\binom{m+n}{2}}$$ dır.

Sonuç 3.1.13: $G_1=K_m$ *m* tepeli bir tam graf ve $G_2=K_{n,q}$ bir bipartite graf olsun . $n\le q$, $m\le n$ ve $\beta(K_{n,q})=q$ alınır.

$(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(K_m + K_{n,q}) = \frac{\binom{\beta(K_{n,q})}{2} * \delta(K_m + K_{n,q})}{\binom{m+n+q}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{n,q})}{2} * (m+n)}{\binom{m+n+q}{2}} = \quad \text{dır.}$$

İspat: S, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

K_m ve $K_{n,q}$ topladığımzda S; $K_{n,q}$ grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan K_m nin tepeleri $\forall v \in V(K_{n,q})$ ile bağlantılı ve $\forall v$ tepesinin derecesi n artacağından

$\delta(K_m + K_{n,q}) = m + \delta(K_{n,q}) = m+n$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(K_m + K_{n,q}) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v)) \right\} = \binom{\beta(K_{n,q})}{2} * \delta(K_m + K_{n,q}) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, $K_m + K_{n,q}$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(K_m + K_{n,q}) = \frac{\binom{\beta(K_{n,q})}{2} * \delta(K_m + K_{n,q})}{\binom{m+n+q}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{n,q})}{2} * (m+n)}{\binom{m+n+q}{2}} \quad \text{dır.}$$

Sonuç 3.1.14: $G_1 = K_{m,n}$ *ve* $G_2 = K_{r,q}$ iki bipartite graf olsun .

$n \le q$ ve $\beta(K_{r,q}) = q$ olmak üzere, $(G_1 + G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_{m,n} + K_{r,q}) = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{r,q})}{2} * \delta(K_{m,n} + K_{r,q})}{\binom{m+n+q+r}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{r,q})}{2} * (m+n+r)}{\binom{m+n+q+r}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$K_{m,n}$ ve $K_{r,q}$ topladığımzda *S;* $K_{r,q}$ grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan $K_{m,n}$ nin tepeleri $\forall\, v \in V\,(K_{r,q})$ ile bağlantılı ve $\forall\, v$ tepesinin derecesi n artacağından

$\delta\,(K_{m,n} + K_{r,q}) = m+n+r$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(K_{m,n} + K_{r,q}) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v)) \right\} = \binom{\beta(K_{r,q})}{2} * \ \delta(K_{m,n} + K_{r,q}) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, $K_{m,n}$ *ile* $K_{r,q}$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_{m,n} + K_{r,q}) = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{r,q})}{2} * \delta(K_{m,n} + K_{r,q})}{\binom{m+n+q+r}{2}} = \frac{\binom{\beta(K_{r,q})}{2} * (m+n+r)}{\binom{m+n+q+r}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.1.15: $G_1 = C_m$ m tepeli bir çevre graf ve $G_2 = K_{n,q}$ bir bipartite graf olsun . $n \leq q$, $m>q$ ve $\beta(K_{n,q}) = q$ olmak üzere , $(G_1 + G_2)$ nin

Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_m + K_{n,q}) = \frac{\binom{\beta(C_m)}{2} * \delta(C_m + K_{n,q})}{\binom{m+n+q}{2}} = \frac{\binom{\beta(C_m)}{2} * (m+n+2)}{\binom{m+n+q}{2}}$$ dır.

İspat: S, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

C_m ve $K_{n,q}$ topladığımzda S; C_m grafının tepelerinden seçildiğinde toplanan $K_{n,q}$ nin tepeleri $\forall v \in V(C_m)$ ile bağlantılı ve $\forall v$ tepesinin derecesi n artacağından

$\delta(C_m + K_{n,q}) = m+n+2$ dir.

Bu nedenle Toplam bağımsızlılığıda artar.

$$TI(C_m + K_{n,q}) = \min_i \left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(C_m)}{2} * \ \delta(C_m + K_{n,q}) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, C_m *ile* $K_{n,q}$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_m + K_{n,q}) = \frac{\binom{\beta(C_m)}{2} * \delta(C_m + K_{n,q})}{\binom{m+n+q}{2}} = \frac{\binom{\beta(C_m)}{2} * (m+n+2)}{\binom{m+n+q}{2}}$$ dır.

3.2 Çarpma işleminde Bağımsız Ortalama Bağlantılılık

Bu bölümde iki grafın çarpılması işlemi ile bağımsız ortalama bağlantılılık değerinde ortaya çıkan sonuçlar, teoremler olarak sunulmuştur.

Teorem 3.2.1: m tepeli G_m ve n tepeli G_n grafı için *($m \leq n$ ve $n>2$),*

$$\bar{k}_{\beta}(G_m x G_n) = \frac{\binom{\beta(G_m x G_n}{2} * \delta(G_m x G_n)}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\binom{m*\beta(G_n)}{2} * (\delta(G_m) + \delta(G_n))}{\binom{m*n}{2}} \quad \text{dir.}$$

($K_{n,q}$ bipartite graf hariç)

İspat : S grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$G_m x\ G_n$ grafında m tane G_n grafının kopyası oluştuğundan *S;* G_n nin tepelerinden Y.Teorem 1.1.3 ve Y.Teorem 1.1.4 den seçildiğinde ve tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayısı :

$$\delta(G_m x G_n) = \delta(G_m) + \delta(G_n) \quad \text{dir.}$$

Bölüm 2.1 de tanımladığımız Toplam Bağımsızlık

$$TI(G_m x G_n) = \min\left\{ \sum_{u,v \in S_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(G_m x G_n\,)}{2} * \delta(G_m x G_n) \quad \text{dır.}$$

Sonuç olarak , $G_m x\, G_n$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(G_m x G_n)=\frac{\binom{\beta(\mathrm{G_m} xG_n}{2} * \delta(G_m xG_n)}{\binom{m*n}{2}}=\frac{\binom{m*\beta(G_n)}{2} * (\delta(G_m)+\delta(G_n))}{\binom{m*n}{2}}$$ dır.

G_1 *; m* tepeli ve G_2 *; n* tepeli bağlantılı iki özel graf olsun. Bu iki graf için çarpma işlemi sonunda elde ettiğimiz sonuçlar aşağıda verilmiştir:

Sonuç 3.2.1: P_m m tepeli bir yol graf , P_n n tepeli bir yol graf olsun .

$m \leq n$ olmak koşuluyla*;* $(G_1 x\, G_2)$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_m x\, P_n)=\frac{TI(P_m xP_n)}{\binom{m*n}{2}}=\frac{\left\{\sum_{u,v\in S_i}\min\{\deg(u_i v_j),\deg(u_k v_t)\}\right\}}{\binom{m*n}{2}}$$ dır.

İspat: *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$P_m x\, P_n$ grafında m tane P_n grafının kopyası oluştuğundan *S;* P_n nin tepelerinden seçilir ve (Y.Teorem 1.1.3) bağımsızlık sayısı elde edilir.$(r\in Z^+)$

$$\beta(P_m xP_n)=\begin{cases} r.n & m=2r \\ r.(n+1)+1 & m=2r+1 \end{cases}$$ dir.

S' nin tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayılarının toplamı : $\forall\ u_i v_j, u_k v_t \in S_i$ ve $u_i v_j \neq u_k v_t$ olmak üzere Toplam Bağımsızlık

$$TI(P_m x P_n) = min \left\{ \sum_{u,v \in s_i} k_G(u,v) \right\} = \left\{ \sum_{u,v \in s_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\} \right\} \text{ dır.}$$

Sonuç olarak , $P_m x P_n$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(P_m x P_n) = \frac{TI(P_m x P_n)}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\left\{ \sum_{u,v \in S_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\} \right\}}{\binom{m*n}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.2.2: $G_1 = P_m$ *m* tepeli bir yol graf olsun, $G_2 = K_n$ *n* tepeli bir tam graf olsun .

$m \leq n$ olmak koşuluyla; $(G_1 x\, G_2)$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(P_m x K_n) = \frac{\binom{\beta(\mathrm{P_m} x K_n)}{2} * \delta(P_m x K_n)}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\binom{m*\beta(K_n)}{2} * n}{\binom{m*n}{2}} \text{ dır.}$$

İspat*:* *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$P_m x\ K_n$ grafında m tane K_n grafının kopyası oluştuğundan $S;\ K_n$ grafının tepelerinden seçildiğinde ve tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayısı n olduğundan

$P_m x\ K_n$ de $\delta(P_m x K_n) = \delta(P_m) + \delta(K_n) = 1 + n - 1 = n$ dir.

Toplam bağımsızlık

$$TI(\mathrm{P_m}x\mathrm{K_n}) = \min \left\{ \sum_{u,v \in \beta_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(P_m * K_n)}{2} * \delta\delta(_m * K_n) \quad \text{dır.}$$

Sonuç olarak , $P_m x\ K_n$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(P_m x K_n) = \frac{\binom{\beta(\mathrm{P_m} x K_n)}{2} * \delta(P_m x K_n)}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\binom{m * \beta(K_n)}{2} * n}{\binom{m*n}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.2.3: $G_1 = P_m$ m tepeli bir yol graf , $G_2 = C_n$ n tepeli bir çevre graf olsun .

$m \le n$ olmak koşuluyla ; $(G_1 x\ G_2)$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_m x\, C_n) = \frac{TI(P_m x C_n)}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\left\{ \sum_{u,v\in S_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\} \right\}}{\binom{m*n}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$P_m x\, C_n$ grafında m tane C_n grafının kopyası oluştuğunda *S;* C_n nin tepelerinden seçilir.

S' nin tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayılarının toplamı : $\forall\ u_i v_j, u_k v_t \in S_i$ ve $u_i v_j \neq u_k v_t$ olmak üzere Toplam Bağımsızlık,

$$TI(P_m x C_n) = \min \left\{ \sum_{u,v\in s_i} k_G(u,v) \right\} = \left\{ \sum_{u,v\in s_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\} \right\} \text{ dır.}$$

Sonuç olarak, $P_m x\, C_n$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_m x\, C_n) = \frac{TI(P_m x C_n)}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\left\{ \sum_{u,v\in S_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\} \right\}}{\binom{m*n}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.2.4:$G_1 = P_m$ m tepeli bir yol graf, $G_2 = W_{1,n}$ $n+1$ tepeli bir tekerlek graf olsun .

$m \leq n$ olmak koşuluyla; $(G_1 x\, G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(P_m x W_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(\mathrm{P_m} x W_{1,n-1})}{2} * \delta(P_m x W_{1,n-1})}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\binom{m * \beta(W_{1,n-1})}{2} * 4}{\binom{m*n}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$P_m x\ W_{1,n-1}$ grafında m tane $W_{1,n-1}$ grafının kopyası oluştuğunda *S;* $W_{1,n-1}$ nin tepelerinden seçildiğinde ve tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayısı 4 olduğundan

$\delta(P_m x W_{1,n-1}) = \delta(P_m) + \delta(W_{1,n-1})$=1+3=4 dir.

Toplam Bağımsızlık ,

$$TI(P_m x W_{1,n-1}) = \min \left\{ \sum_{u,v \in \beta_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(P_m x W_{1,n-1})}{2} * \delta(P_m x W_{1,n-1}) \text{ dır.}$$

Sonuç olarak , $P_m x\ W_{1,n-1}$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

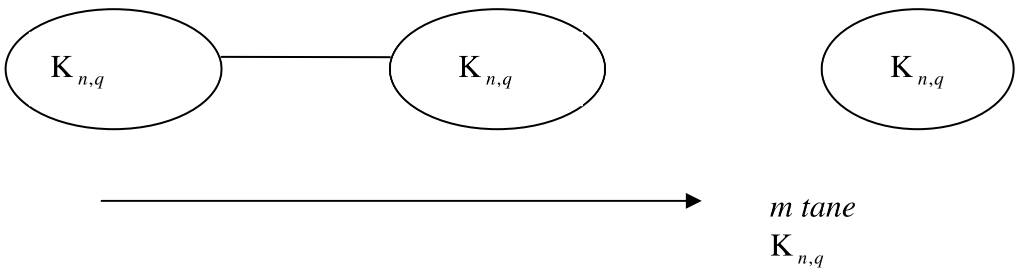
$$\bar{k}_{\beta}(P_m x W_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(\mathrm{P_m} x W_{1,n-1})}{2} * \delta(P_m x W_{1,n-1})}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\binom{m * \beta(W_{1,n-1})}{2} * 4}{\binom{m*n}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.2.5: $G_1 = P_m$ m tepeli bir yol graf, $G_2 = K_{n,q}$ n, q tepeli bir bipartite graf, $m \leq$ n ve $q \geq$ n olmak koşuluyla; $(G_1 x\, G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(P_m x\, K_{n,q}) = \frac{TI(P_m x K_{n,q})}{\binom{m*(q+n)}{2}} = \frac{\left\{ \sum_{u,v\in S_i} \min\left\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\right\} \right\}}{\binom{m*(q+n)}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: S grafın maximal bağımsız kümesi olsun .

$P_{\mathrm{m}} x\, K_{n,q}$ grafında m tane $K_{n,q}$ grafının kopyası elde edilir.



Şekil 3.2.1

$P_m x K_{n,q}$ de $S;$ $K_{n,q}$ grafından q tepe alınırken, ardışık gelen $K_{n,q}$ grafından alınmamış olan (komşu olmayan) n tepe seçildiğinde bağımsız küme sayısı($r \in Z^+$)

$$\beta(P_m x K_{n,q}) = \begin{cases} r(n+q) & m = 2r \\ r(n+q)+q & m = 2r+1 \end{cases}$$ dır.

S' nin tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayılarının toplamı: $\forall\ u_i v_j, u_k v_t \in S_i$ ve $u_i v_j \neq u_k v_t$ olmak üzere Toplam Bağımsızlık,

$$TI(P_m x K_{n,q}) = \min \left\{ \sum_{u,v \in s_i} k_G(u,v) \right\} = \left\{ \sum_{u,v \in s_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\} \right\}$$ dır.

Sonuç olarak , $P_m x\, K_{n,q}$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(P_m x\, K_{n,q}) = \frac{TI(P_m x K_{n,q})}{\binom{m*(q+n)}{2}} = \frac{\left\{ \sum_{u,v \in S_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\} \right\}}{\binom{m*(q+n)}{2}}$$ dır.

Sonuç 3.2.6: $G_1 = C_m$ m tepeli ve $G_2 = C_n$ n tepeli iki çevre graf olsun . $m \leq n$ olmak koşuluyla ; $(G_1 x\, G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_m x C_n) = \frac{\binom{\beta(C_m x C_n)}{2} * \delta(C_m x C_n)}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\binom{m*\beta(C_n)}{2} * 4}{\binom{m*n}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$C_m x\, C_n$ grafında *m* tane C_n grafının kopyası oluştuğunda *S;* C_n nin tepelerinden seçildiğinde ve tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayısı 4 olduğundan

$\delta(C_m x\, C_n) = \delta(C_m) + \delta(C_n) = 2+2=4$ dir.

Toplam Bağımsızlık ,

$$TI(C_m x C_n) = \min \left\{ \sum_{u,v \in \beta_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(C_m x C_n)}{2} * \delta(C_m x\, C_n) \text{ dır.}$$

Sonuç olarak , $C_m x\, C_n$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_m x C_n) = \frac{\binom{\beta(C_m x C_n)}{2} * \delta(C_m x C_n)}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\binom{m*\beta(C_n)}{2} * 4}{\binom{m*n}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.2.7: $G_1 = C_m$ *m* tepeli bir çevre graf, $G_2 = K_n$ *n* tepeli bir tam graf ve $m \leq n$ olmak koşuluyla; $(G_1 x\, G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(\mathrm{C}_m \mathrm{xK}_n) = \frac{\binom{\beta(C_m{*}K_n)}{2} * \delta\delta(_m{*}K_n)}{\binom{m{*}n}{2}} = \frac{\binom{m*\beta(K_n)}{2} * (n+1)}{\binom{m{*}n}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$C_m x\ K_n$ grafında m tane K_n grafının kopyası oluştuğunda *S;* K_n nin tepelerinden seçildiğinde ve tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayısı *n+1* olduğundan

$C_m x\ K_n$ de $\delta(C_m xK_n) = \delta(C_m) + \delta(K_n)$ *=2+n-1=n+1* dir.

Toplam Bağımsızlık ,

$$TI(C_m xK_n) = \min\left\{\sum_{u,v\in\beta_i} k_G(u,v)\right\} = \binom{\beta(C_m xK_n)}{2} * \delta(C_m{*}K_n) \quad \text{dır.}$$.

Sonuç olarak , $C_m x\ K_n$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_m xK_n) = \frac{\binom{\beta(C_m{*}K_n)}{2} * \delta(C_m{*}K_n)}{\binom{m{*}n}{2}} = \frac{\binom{m*\beta(K_n)}{2} * (n+1)}{\binom{m{*}n}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.2.8: $G_1 = C_m$ m tepeli bir yol graf , $G_2 = W_{1,n-1}$ bir tekerlek graf olsun .

$m \leq n$ olmak koşuluyla ; $(G_1 x\, G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta\,(C_m x W_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(C_m x W_{1,n-1})}{2} * \delta(C_m x W_{1,n-1})}{\binom{m*n}{2}} \; \frac{\binom{m*\beta(\mathrm{W}_{1,n-1})}{2} * 5}{\binom{m*n}{2}} \text{ dir.}$$

İspat: *S* grafın makimal bağımsız kümesi olsun.

$C_m x\, W_{1,n}$ grafında m tane $W_{1,n-1}$ grafının kopyası oluştuğunda *S;* $W_{1,n-1}$ nin tepelerinden seçildiğinde ve tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayısı

$$\delta(C_m x W_{1,n-1}) = \delta(C_m) + \delta(W_{1,n-1}) = 2+3=5 \text{ dir.}$$

Toplam Bağımsızlık

$$TI(C_m x W_{1,n-1}) = \min \left\{ \sum_{u,v\in\beta_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(C_m x W_{1,n-1})}{2} * \delta(C_m x W_{1,n-1}) \text{ dır.}$$

Sonuç olarak, $C_m x\, W_{1,n-1}$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta\,(C_m x W_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(C_m x W_{1,n-1})}{2} * \delta(C_m x W_{1,n-1})}{\binom{m*n}{2}} \; \frac{\binom{m*\beta(\mathrm{W}_{1,n-1})}{2} * 5}{\binom{m*n}{2}}$$

Sonuç 3.2.9: $G_1 = C_m$ m tepeli bir çevre graf, $G_2 = K_{n,q}$ tepeli bir bipartite graf, $m \leq$ n *ve* $q \geq$ n olmak koşuluyla; $(G_1 x\, G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_m x\, K_{n,q}) = \frac{TI(C_m x K_{n,q})}{\binom{m*(q+n)}{2}} = \frac{\left\{ \sum_{u,v \in S_i} \min\left\{ \deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t) \right\} \right\}}{\binom{m*(q+n)}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$C_m x\, K_{n,q}$ grafında $K_{n,q}$ grafından m tane kopyası elde edilir.

S; $C_m x K_{n,q}$ de $K_{n,q}$ q tepe alınırken ardışık gelen $K_{n,q}$ grafından alınmamış olan (komşu olmayan) n tepeden seçildiğinde *n+q* tepe elde edilir. $(r \in Z^{+})$

$$\beta(C_m x K_{n,q}) = \begin{cases} r(n+q) & m = 2r \\ r(n+q)+q & m = 2r+1 \end{cases}$$

S' nin tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayılarının toplamı : $\forall\, u_i v_j, u_k v_t \in S_i$ ve $u_i v_j \neq u_k v_t$ olmak üzere Toplam Bağımsızlık,

$$TI(C_m x K_{n,q}) = \min \left\{ \sum_{u,v \in s_i} k_G(u,v) \right\} = \left\{ \sum_{u,v \in s_i} \min\left\{ \deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t) \right\} \right\} \text{ dır.}$$

Sonuç olarak, $C_m x\, K_{n,q}$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(C_m x K_{n,q}) = \frac{TI(C_m x K_{n,q})}{\binom{m*(q+n)}{2}} = \frac{\left\{ \sum_{u,v \in S_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\} \right\}}{\binom{m*(q+n)}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.2.10: $G_1 = K_m$ m tepeli ve $G_2 = K_n$ n tepeli bir tam graf olsun . $m \leq n$ olmak koşuluyla ; $(G_1 x G_2)$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_m x K_n) = \frac{\binom{\beta(K_m x K_n)}{2} * \delta\delta(_m x K_n)}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\binom{m*\beta*\beta_n)}{2} *(m+n-2)}{\binom{m*n}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$K_m x K_n$ grafında m tane K_n grafının kopyası oluştuğunda *S;* K_n nin tepelerinden seçildiğinde ve tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayısı *2*(n-1)* olduğundan

$$\delta(K_m x K_n) = \delta(K_m) + \delta(K_n) = (m-1)+(n-1) = m+n-2 \text{ dir.}$$

Toplam Bağımsızlık ,

$$TI(K_m x K_n) = \min \left\{ \sum_{u,v \in \beta_i} k_G(u,v) \right\} = \binom{\beta(K_m x K_n)}{2} * \delta(K_m x K_n) \text{ dır.}$$

Sonuç olarak , $K_m x\, K_n$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_m x\, K_n) = \frac{\binom{\beta(K_m x K_n)}{2} * \delta(K_m x K_n)}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\binom{m*\beta*\beta_n}{2} *(m+n\text{-}2)}{\binom{m*n}{2}} \text{ dır.}$$

Sonuç 3.2.11: $G_1 = K_m$ m tepeli bir tam graf , $G_2 = W_{1,n-1}$ n tepeli bir tekerlek graf olsun .

$m \le n$ olmak koşuluyla ; $(G_1 x\, G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_m x W_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K_m} x W_{1,n-1})}{2} * \delta(K_m x W_{1,n-1})}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\binom{m * \beta(W_{1,n-1})}{2} * (m+3)}{\binom{m*n}{2}} \text{dir.}$$

İspat: : *S* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$K_m x\; W_{1,n-1}$ grafında m tane $W_{1,n-1}$ grafının kopyası oluştuğunda *S;* $W_{1,n-1}$ nin tepelerinden seçildiğinde ve tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayısı *m+3* olduğundan

$\delta(K_m x W_{1,n-1}) = \delta(K_m) + \delta(W_{1,n-1}) = m+3$ dir.

Toplam Bağımsızlık

$$TI(\mathrm{K}_{\mathrm{m}}x\mathrm{W}_{1,\mathrm{n}}) = \min\left\{\sum_{u,v\in\beta_i} k_G(u,v)\right\} = \binom{\beta(K_m x W_{1,n})}{2} * \delta(K_m x W_{1,n}) \text{ dır.}$$

Sonuç olarak , $K_m x\ W_{1,n}$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_m x W_{1,n-1}) = \frac{\binom{\beta(\mathrm{K}_{\mathrm{m}} x W_{1,n-1})}{2} * \delta(K_m x W_{1,n-1})}{\binom{m*n}{2}} = \frac{\binom{m*\beta(W_{1,n-1})}{2} * (m+3)}{\binom{m*n}{2}} \text{ dir.}$$

Sonuç 3.2.12:$G_1 = K_m$ m tepeli bir tam graf, $G_2 = K_{n,q}$ bir bipartite graf ve $m \leq \mathrm{n}$, $q \geq \mathrm{n}$ olmak koşuluyla; $(G_1 x\ G_2)$ nin Bağımsız ortalama bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(K_m x\ K_{n,q}) = \frac{TI(K_m x K_{n,q})}{\binom{m*(q+n)}{2}} = \frac{\left\{\sum_{u,v\in S_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\}\right\}}{\binom{m*(q+n)}{2}} \text{ dır.}$$

İspat: *S,* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$K_m x\ K_{n,q}$ grafında $K_{n,q}$ grafının m tane kopyası elde edilir. *S*; $K_{n,q}$ grafından q *t*epe alınırken ardışık gelen $K_{n,q}$ grafından alınmamış olan (komşu olmayan) n tepe seçildiğinde bağımsız küme sayısı $(r \in Z^+)$

$$\beta(K_m x K_{n,q}) = \begin{cases} r(n+q) & m = 2r \\ r(n+q)+q & m = 2r+1 \end{cases}$$ dır.

S' nin tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayılarının toplamı : $\forall\ u_i v_j, u_k v_t \in S_i$ ve $u_i v_j \neq u_k v_t$ olmak üzere Toplam Bağımsızlık,

$$TI(\mathrm{K}_m x \mathrm{K}_{n,q}) = \min\left\{\sum_{u,v\in s_i} k_G(u,v)\right\} = \left\{\sum_{u,v\in s_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\}\right\}$$ dır.

Sonuç olarak , $K_m x\ K_{n,q}$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(K_m x\ K_{n,q}) = \frac{TI(K_m x K_{n,q})}{\binom{m*(q+n)}{2}} = \frac{\left\{\sum_{u,v\in S_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\ \}\right\}}{\binom{m*(q+n)}{2}}$$ dır.

Sonuç 3.2.13: $G_1 = W_{1,m}$ $m+1$ tepeli ve $G_2 = W_{1,n}$ de $n+1$ tepeli tekerlek graf olsun . $m \leq$ n olmak koşuluyla; $(G_1 x\ G_2)$ nin Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_\beta(W_{1,m} x W_{1,n}) = \frac{\binom{\beta(W_{1,m} x W_{1,n})}{2} * \delta((W_{1,m} x W_{1,n})}{\binom{(m+1)*(n+1)}{2}} = \frac{\binom{m*\delta(W_{1,n})}{2} * 6}{\binom{(m+1)*(n+1)}{2}}$$ dir.

İspat: *S* grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$W_{1,m}\, x\, W_{1,n}$ grafında *m* tane $W_{1,n}$ grafının kopyası oluştuğunda *S;* $W_{1,n}$ nin tepelerinden seçildiğinde ve tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayısı 6 olduğundan

$$\delta\,(W_{1,m}\, x\, W_{1,n}\,) = \delta(W_{1,m}) + \delta(W_{1,n}) = 3+3=6 \text{ dır.}$$

Toplam Bağımsızlık ,

$$TI(\,W_{1,m} x W_{1,n}) = \min\left\{ \sum_{u,v\in\beta_i} k_G\,(u,v) \right\} = \binom{\beta(W_{1,m} x W_{1,n})}{2} * \delta(\mathrm{W}_{1,\mathrm{m}} x \mathrm{W}_{1,\mathrm{n}}) \text{ dır.}$$

Sonuç olarak , $W_{1,m}\, x\, W_{1,n}$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı ,

$$\bar{k}_{\beta}\,(W_{1,m} x W_{1,n}) = \frac{\binom{\beta(W_{1,m} x W_{1,n})}{2} * \delta\delta(\,_{1,m} x W_{1,n})}{\binom{(m+1)*(n+1)}{2}} = \frac{\binom{m*\beta*\beta_{1,n}}{2} * 6}{\binom{(m+1)*(n+1)}{2}} \text{ dir.}$$

Sonuç 3.2.14: $G_1 = W_{1,m-}$ bir tekerlek graf, $G_2 = K_{n,q}$ bir bipartite graf ve $m \leq$ n , $q \geq$ n olmak koşuluyla ;

$$\bar{k}_{\beta}(W_{1,m-1} x K_{n,q}) = \frac{TI(W_{1,m\text{-}1} x K_{n,q})}{\binom{(m+1)*(q+n)}{2}} = \frac{\left\{ \sum_{u,v \in S_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\} \right\}}{\binom{(m+1)*(q+n)}{2}}$$

İspat: S, grafın maximal bağımsız kümesi olsun.

$W_{1,m-1} x\, K_{n,q}$ grafında $K_{n,q}$ grafından $m+1$ tane kopya elde edilir.

S; ilk $K_{n,q}$ grafından q tepe alınırken ardışık gelen $K_{n,q}$ grafından alınmamış olan (komşu olmayan) n tepe seçildiğinde

$$\beta(W_{1,m-1} x K_{n,q}) = \begin{cases} r(n+q) & m = 2r \\ r(n+q)+q & m = 2r+1 \end{cases}$$

dır.

S' nin tüm tepe çiftleri arasındaki içten ayrık yol sayılarının toplamı : $\forall\, u_i v_j, u_k v_t \in S_i$ ve $u_i v_j \neq u_k v_t$ olmak üzere Toplam Bağımsızlık,

$$TI(W_{1,m-1} x K_{n,q}) = \min \left\{ \sum_{u,v \in s_i} k_G(u,v) \right\} = \left\{ \sum_{u,v \in s_i} \min\{\deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t)\} \right\}$$

dır.

Sonuç olarak , $W_{1,m-1} x\, K_{n,q}$ grafının Bağımsız Ortalama Bağlantılılığı

$$\bar{k}_{\beta}(W_{1,m-1} x K_{n,q}) = \frac{TI(W_{1,m-1} x K_{n,q})}{\binom{(m+1)*(q+n)}{2}} = \frac{\left\{ \sum_{u,v \in S_i} \min\left\{ \deg(u_i v_j), \deg(u_k v_t) \right\} \right\}}{\binom{(m+1)*(q+n)}{2}}$$ dır.

Bağımsız Ortalama Bağlantılılığın Algoritması

Aşağıdaki algoritma n tepeli bir grafın $A(n,n)$ bitişiklik matrisinden hareketle *Paul -Unger* algoritması (Prather, Ronold E,,1976) yardımıyla tüm maximal bağımsız kümelerini bulur. Her bir bağımsız kümenin tepe çiftleri için $k_G(u,v)$ değerlerini bir maximal flow algoritması ile hesaplayıp grafın bağımsız ortalama bağlantılılığını hesaplar.

A1: Tepe sayısı n yi ve bitişiklik matrisi $A(n,n)$ i gir.

A2: Paul -Unger algoritmasını kullanarak grafın tüm maximal bağımsız *(BS)* kümelerini bul. Bağımsızlık sayısını β ile işaretle.

A3: *BS* nin her bir elemanı için aşağıdaki işlemleri yap.

i) Toplamı 0 la

ii) Tüm tepe çiftleri arasındaki $k_G(u,v)$ değerlerini bul ve toplama ekle.

($k_G(u,v)$ değerleri bir maximal flow algoritması kullanılarak bulunur)

iii) Bu toplam değerlerini *EKG( )* adlı bir diziye taşı.

A4: *EKG( )* dizisinin minimumunu *TI* ile işaretle.

A5: $\dfrac{TI}{\binom{n}{2}}$ hesapla.Bu değer bağımsız ortalama bağlantılılık sayısıdır.

A6: bitir.

Input : $G(V, E)$
Output : $\bar{k}_{\beta}(G)$

BEGIN

read n

read V(n) , A(n,n)

PV(n) {PV : Power Set of V}

$\beta = \max_{i-0.2^x-1} \{ \mid \text{PV(i)} \mid \}$ { $\beta S = \bigcup_{i-0.2^x-1} \text{PV(i)} \mid \mid \text{PV(i)} \mid = \beta$ }

for each k do {k ; |PV(k)|=β}

EkG(k)←0

for each pair (i,j)∈PV(k) do

EkG(k)←EkG(k)+max_flow(i,j)

repeat

repeat

$TI \leftarrow \min_k \{EkG(k)\}$

$$\bar{k}_{\beta}(G) = \frac{TI}{\binom{n}{2}}$$

END

4.SONUÇ

Bir ağın güvenilrliğinde zedelenebilirlik ve ölçümü büyük önem taşımaktadır. Bu yüzden 1992 yılından itibaren çeşitli ölçümler tanımlanmıştır.

Bu tezde günümüze kadar yapılan bu ölçümlerden yararlanılarak 2002 yılında Beineke nin tanımladığı Ortalama Bağlantılılık kavramı incelenerek Bağımsız Ortalama Bağlantılılık kavramı ve bazı özellikleri verilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1]. Buckley, F. and Harary, F. (1990) : *Distance in Graphs*, Addison Wesley Pub., California.

[2]. Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California.

[3]. Kumar, V.- Grama, A.- Gupta, A.- Karpis, G.,(1994): *Introduction To Parallel Computing*. The Benjamin Cummings Pub. California.

[4].Bagga, K.S. - Beineke, L.W. - Pippert, R. E., (1992): Survey of Integrity, *Discrete Applied Math*. Vol.37/38, pp.13- 28

[5]. Barefoot, C. A.- Entringer, R.- Swart, H., (1987): Vulnerability in Graphs-A Comparative Survey, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, pp. 113-22.

[6]. Beineke,L.W-Oellermann, O.R – Pippert, R.E, (2002): The Average Connectivity of a Graph, , *Discrete Math* No.252, pp.31-45.

[7]. Dankelmann P., Oellermann, O.R, (2003): Bounds on the average connectivity of a graph, *Discrete Applied Math*. (2-3), pp.305-318

[8].Bagga, K. S.- Beineke, L.W. - Pippert, R. E-Lipman, M. J. (1993): A Classification scheme for vulnerability and reliability parameters of graphs, *Math. Comput. Modelling* 17, pp. 13-16

[9]. Chartrand, G.- Oellermann, O.R, (1992): *Applied and Algorithmic Graph Theory*, McGraw-Hill, New York.

[10]. Chung, F. R. K, (1989): The Average distance and independence number, *J. Graph theory* 12, pp.229-235.

[11]. Harary, F. (1962):The maximum connectivity of a graph, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 48, pp.1142-1146.

[12]. Mader, W. (1979): Connectivity and edge-connectivity in finite graphs, Surveys in Combinatorics, *London mathematical Society Lecture Notes Series,* Vol.38, *Cambridge University Press,* Cambridge, pp. 66-95.

[13]. Oellermann, O.R, (1996): Connectivity and edge-connectivity in graphs*, a survey, Congr. Numer,* 116, pp. 231-252.

[14]. J. Plesnik, (1984): On the sum of all distances in a graph or digraph, *J. Graph Theory ,*8 ,pp.1-21.

[15]. Cozzens, M. B., (1994): Stability Measures and Data Fusion Networks, *Graph Theory Notes of Newyork* XXVI, pp.8-14.

[16]. Dündar, P.,(2001): Stability Measures of Some Static Interconnection Networks, *Int.J. Comput. Math.,* Vol.76 No.4, pp.455-462.

[17].Dündar, P , (1999): New Notions In Network Reliability: Stability Numbers of Sequential Joined Graphs, *Neural Networks World*,Vol.5, pp.403-411.

[18]. Peled,U.N-Wu, J(1999):Restricted Unimodular Chordal Graphs , Journal of Graph Theory, pp.121-136

[19]. C.M. Mynehardt, "Total Domination Edge Critical Graphs with Maximum Diameter", 2001, *Discuss.Math Graph Theory*, Vol. 21-2,pp.187-205

[20]. C.M. Mynehardt, "Vertices contained in all or in no minimum total dominating set of a tree", 2003, *Discrete Mathematics* ,Vol. 260, pp.37-44

[21]. Peled,U.N-Wu, J(1999):Restricted Unimodular Chordal Graphs , Journal of Graph Theory, pp.121-136

[22]. Prather, Ronold E, Discrete Mathematical Structers for computer Science, Hougton Mıfflın Company Boston, 1976

ÖZGEÇMİŞ

06.06.1962 yılında İzmir'de doğdu. Orta-Lise öğrenimini İzmir Özel Türk Koleji'nde tamamladı. 1986 yılında Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Uygulamalı Matematik Bölümü Lisans öğretim programından mezun oldu. 1987-1992 tarihlerinde Özel Bilset Bilgisayar Şirketinde bilgisayar öğretmeni olarak çalıştı. 1992-1997 yılında Dokuz Eylül Üniversitesinde Meslek Yüksek Okulu Teknik Programlar Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak çalıştı. !997-1999 yıllarında Prof.Dr. Pınar DÜNDAR ile "Dikenli Graflarda Komşu Bütünlük" adlı Yüksek Lisans tezini tamamladı.

1997 tarihinden itibaren Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölüm Bilgisayar ABD da Öğretim Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.