EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LIE SİMETRİLERİ ÜZERİNE

Figen AÇIL KİRAZ

Matematik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu: 403.06.01

Sunuş Tarihi: 10.01.2007

Tez Danışmanı: Prof.Dr.Turgut ÖZİŞ

Bornova-İZMİR

Figen AÇIL KİRAZ tarafından Doktora tezi olarak sunulan **"Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Lie Simetrileri Üzerine"** başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **10.01.2007** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri		**İmza**
Jüri Başkanı	**:** Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ	………………
RaportörÜye	**:** Prof. Dr. Şennur SOMALI	………………
Üye	**:** Prof. Dr. Gonca ONARGAN	………………
Üye	**:** Doç. Dr. Pınar DÜNDAR	………………
Üye	**:** Doç. Dr. Emine MISIRLI	………………

ÖZET

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LIE SİMETRİLERİ ÜZERİNE

Diferansiyel denklemlerin klasik teorisinde, nokta dönüşümlerine ek olarak, değme (birinci mertebe tanjant) dönüşümleri, hareketlerin Hamilton denklemlerinin integrasyonunun Hamilton-Jacobi teorisinde kullanımı oldukça fazladır ve mekanikte kanonik dönüşümler olarak bilinir. Keyfi Hamilton-Jacobi denklemleri, uygun bir kanonik dönüşüm ile kolayca integre edilebilen daha basit kanonik biçimlere indirgenebilir. Böylece kanonik dönüşümler kümesi bir grup oluşturur, bu nedenle, Hamilton-Jacobi teorisi mekanik problemleri değme dönüşümleri altında grup teorisine indirger. Lie, diferansiyel denklemler için değme dönüşümlerini temel alan bir teori geliştirdi.

Lie'nin yaklaşımında, sürekli gruplar infinitesimal dönüşümler (üreteçler) ile belirlenir ve bir infinitesimal üreteç verildiğinde grup dönüşümleri, nokta dönüşümlerinde olduğu gibi çözümünün varlığı sadece regüler noktaların küçük komşuluklarında garanti olan Lie denklemleri ile bulunur. Bu kavram simetri grubu kavramıyla diferansiyel denklemlere genişletilebilir ve diferansiyel denklemlerin simetri grubu, verilen diferansiyel denklemin çatısını, türevlerdeki genişleme ile değişmez bırakan dönüşüm grupları olarak ele alınır.

Anahtar sözcükler: Bir-parametreli yerel Lie grupları, Infinitesimal dönüşümler, Infinitesimal Üreteç, Değişmezler, Lie cebiri, Lie simetri, Uzatım, Optimal sistem, Simetri indirgemesi, Genelleştirilmiş Boussinesq Denklemi.

ABSTRACT

ON LIE SYMMETRIES OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

In the classic theory of differential equations, contact (i.e. first order tangent) transformations, in addition to point transformations, are of considerable use in the Hamilton-Jacobi theory of integration of Hamiltonian's equations of motion anda re known in mechanics as canonical transformations. An arbitrary Hamilton-Jacobi equations can be reduced by a suitance canonical transformations to simpler canonical forms which are easily integrable. Thus, the set of all canonical transformations is agroup, therefore Hamilton-Jacobi theory reduces mechanical problems to the theory of groups under the contact transformations. Lie, for differential equations, developed a theory based on contact transformations.

In Lie's approach, continious groups are determined by infinitesimal transformations (generators), and when an infinitesimal generators are given, the group transformations are found by solving the Lie equations, which is guaranteed only in a small neighborhood of regular points as in point transformations.

This concept can be expanded to differential equations by the concept of a symmetry groyps ve treats a symmetry group of diffential equation as a group of transformations whose extention to derivatives leave invariant the frame of the differential.

Key words: One-parameter Lie groups, Infinitesimal generator, Invarinants, Lie algebra, Lie symmetry, Prolongation, Optimal system, Symmertry reduction, Generalised Boussinesq Equation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince değerli görüşlerinden faydalandığım, ilgisini esirgemeyen ve her konuda destek olan hocam sayın Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bu çalışmam boyunca bana gösterdiği sevgi, sadakat, destek, hoşgörü ve özellikle çalışmamın son zamanlarında gösterdiği sonsuz anlayıştan dolayı sevgili eşim Caner KİRAZ'a ve yedi aydır annesinden ve babasından ayrı kalmak zorunda kalan sevgili yavrumuz Doğukan KİRAZ'a çok teşekkür ederim.

Hayatımın her anında yanımda olan, bana her konuda desteklerini esirgemeyen, çocuğuma kendi çocuğu gibi sahip çıkan ve ondan ilgisini, sevgisini esirgemeyen sevgili annem Rahime AÇIL ve babam Süleyman AÇIL başta olmak üzere bütün aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (Devam)

1.GİRİŞ

Doğa, fizik ve mühendislik bilimlerinde, matematiksel modellerin lineer ya da lineer olmayan diferansiyel denklemlerinin (ya da denklem sistemlerinin) sistematik çözüm prosedürünün klasik çözüm metodları ile oluşturulması ve bunların bilgisayara aktarılması çoğu zaman mümkün olmamaktadır.

Matematiksel fizik problemlerin, uygulamalı grup analizi ile çözümünden sahip olunan tecrübe, birçok doğa olayının teorik grup terimleriyle modellenebileceğini gösterdi ve böyle bir modellemenin mutlak sonuçları olarak diferansiyel denklemlerin, korunum yasalarının, başlangıç değer problemlerinin çözümleri ve benzerleri elde edildi [17]. Örnek olarak, simetri grubu; karmaşık doğa olaylarının kavranmasında ve diferansiyel denklemlerle modellenmiş problemlerin çözümünde başarılı bir şekilde kullanılmaktadır.

1870'lerde, Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından ortaya konulan, diferansiyel denklemin simetri analizi, Lie simetri grubu adı verilen, denklemin tanımlandığı manifoldu değişmez bırakan yerel dönüşüm gruplarının bulunmasıyla, diferansiyel denklemlerin yeni çözümlerinin sistematik bir prosedürle oluşturulmasını sağlayan bir teoridir. Bu teorinin, fizikte, özellikle hidrodinamikte, mekanikte, elektrodinamikte, kuantum teorisinde, istatistiksel mekanikte, cisim teorisinde, tanecik fiziğinde, vb. uygulamaları vardır.

Lie'nin çalışmalarının sonuçlarının zenginliği uzun süre fark edilememiş ve doğa bilimlerinde, matematiksel modellerin diferansiyel denklemlerine Lie teorinin uygulanması 1960'lı yıllarda başlayabilmiştir. L.V. Ovsyannikov'un çalışmaları bu konuya ilgiyi arttırmış ve [26] yazdığı kitap modern uygulamalı grup analizinin uzun süre temel kaynağı olmuştur.

Bu teoriye, son birkaç on yılda ilginin iyice artmasıyla, önemli ilerlemeler kaydedildi ve çeşitli uygulamaları, Bluman ve Cole [1974], Clarkson ve Kruskal [1989], Bluman ve Kumei [1989], İbragimov [1985-1994,1996], Olver [1986], tarafından oluşturuldu. Daha sonra, diferansiyel cebir hesaplamaları kullanılarak bu prosedür bilgisayara aktarıldı ve bu konu ile ilgili birçok bilgisayar programı yazıldı. Mathematica programı kullanılarak bu sistematik çözüm prosedürünün bilgisayara uygulanması da Hereman [1994,1996], Baumann [2000] tarafından yapıldı. Bizde bu tezde hesaplamalarda Mathematica içindeki Baumann [2000] tarafından oluşturulan MathLie paket programını kullandık [1], [2], [3].

Günümüzde simetri analizi, tamamen algoritmik bir yolla diferansiyel denklemlerin çözümlerininin türetildiği nadir teorilerden biridir ve inverse scattering teori ve Hirota tekniği [13] gibi diğer çözüm prosedürleri arasında seçkin bir konumu vardır. Lie teorisi diferansiyel denklemlerin hemen hemen tümüne uygulanabilmesine rağmen diğer teoriler genellikle tam olarak integrallenebilir denklemlerin çözümlerinde veya diğer bazı kısıtlamalar altında sonuç verirler.

Bu açıdan Lie’nin teorisi güçlü ve çok yönlüdür. Simetri grupları yardımıyla, sınır değer problemlerinin değişmez çözümlerine götüren sistematik prosedürle yeni çözümlere ulaşılabileceği gibi, adi diferansiyel denklemin mertebesinin düşürülmesi, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin değişken sayısının azaltılması ve adi diferansiyel denkleme indirgenmesi mümkün olmaktadır.

Bu bölümün devamında, teorinin oluşturulması için kullanılan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

İkinci bölümde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin, Lie simetri grubu kullanılarak sistematik çözüm prosedürünün oluşturulması için temel tanım ve teoremler verilmiştir. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Lie grubuna karşılık gelen Lie cebirinin, bir boyutlu alt cebiri kullanılarak bulunan benzerlik dönüşümlerinin sınıflandırılmasında denklik sınıflarını bulmak için bu alt cebirlere karşılık gelen alt grupların adjoint temsilden yararlanılmıştır. Her bir denklik sınıfının bir üyesi alınarak elde edilen optimal sistem ile simetri indirgemelerin nasıl yapılacağı ayrıca örneklenmiştir.

Üçüncü bölümde, Clarkson'un [9] çalışmasının genişletilmesi bu açıdan ele alınmıştır. Genelleştirilmiş Boussinesq Denklemine

$$u_{xxxx} + p\,u_t u_{xx} + q\,u_x u_{xt} + r\,u_x^2 u_{xx} + u_{tt} = 0$$

p, q, r keyfi sabitler olmak üzere Lie grup metodu uygulanmış ve [9]'da direkt metodla verilen simetri çözümlerinin, denklemin Lie grubuna karşılık gelen Lie cebirinin bir-boyutlu alt cebirlerinin optimal sistemi kullanılarak elde edilen benzerlik çözümlerine karşılık geldiği gösterilerek bir sınıflaması elde edilmiştir. Optimal sistem kullanılarak bulunan benzerlik dönüşümleri ile denklemin adi diferansiyel denkleme indirgenmesi yapılmıştır. Ayrıca özel durum olarak denklemin son teriminin önüne a yapay katsayısı eklenerek, p=q, $r = \dfrac{q^2}{2a}$ durumu için elde edilen grubun infinitesimal üreteci genişletilmiş, denklem simetri indirgemesi yapılarak çözülmüştür.

Şimdi de Lie grubunu daha iyi açıklamak ve diferansiyel denklemlerin çözümlerine daha geniş açıdan bakabilmek için aşağıdaki sırada kısaca bilgilendirme yapmanın zorunlu olduğu düşüncesindeyiz.

1.1. Birinci Mertebe Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bilindiği gibi, birinci mertebe kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinin bilinen elemanları, Lie teorisi için ön koşul oluşturur. Bu bölümde bir bağımlı değişken içeren birinci mertebe denklemleri çözmek için kullanılan temel klasik yöntemleri özetleyeceğiz. Bu yöntemler için daha ayrıntılı bilgi, temel kısmi türevli diferansiyel denklem kitaplarında bulunabilir [14], [20], [22], [31] .

Şimdi, u tek bağımlı değişken ve **x**=$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 2)$ bağımsız değişkenler olsun ve $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ kısmi türevlerini de **p**=$(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ile gösterelim. Böylece birinci mertebe kısmi türevli diferansiyel denklem

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

ya da

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 0 \tag{1.1.1}$$

olarak yazılır.

1.1.1.Tanım $\mathbf{x}_0=(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı ve sürekli olarak diferansiyellenebilen $\phi(x)$ fonksiyonu, (1.1.1) kısmi diferansiyel denkleminin bir çözümü (integrali) ise $\mathbf{x}_0=(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$

noktasının bir komşuluğunda u=ϕ(x), $p_i = \dfrac{\partial\phi(x)}{\partial x_i}$ yer değiştirmesi ile (1.1.1) denklemi sağlanır.

Özel durum olarak iki bağımsız değişken için aşağıdaki notasyonları kullanacağız. Bağımsız değişkenleri x,y ile bağımlı değişkeni u ile ve u'nun bağımsız değişkenlere göre birinci türevlerini de $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ ile gösterelim. Böylece (1.1.1) denklemi

$$F(x,y,u,p,q)=0 \tag{1.1.2}$$

olarak yazılır. (1.1.2) diferansiyel denkleminin u=ϕ(x,y) çözümü, x,y ve u kartezyen koordinatlı üç boyutlu uzayda yüzey tanımlar. Buna klasik literatürde integral yüzey denir.

1.1.1.Birinci Mertebe Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bu türden denklemler için ilk teori Lagrange tarafından verilmiştir.

$\xi_i(\mathbf{x})$, c($\mathbf{x}$) ve f($\mathbf{x}$) bağımsız değişkenlerin fonksiyonları olmak üzere birinci mertebe lineer kısmi türevli diferansiyel denkleminin genel biçimi

$$\xi_1(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + \xi_2(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_n} + c(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x})$$

ya da

$$\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n + c(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \tag{1.1.3}$$

şeklinde verilir. Özelikle (1.1.3) denkleminde c(x)=0 ve f(x) =0 ise

$$\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n = 0 \tag{1.1.4}$$

denklemine lineer homojen denklem denir.

1.1.1.1. Homojen Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler

(1.1.4) tipindeki denklemleri çözme yöntemi aşağıdaki teoremle verilir.

1.1.2.Ön Teorem

$$X=\xi_1(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_1}+\xi_2(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (1.1.5)$$

birinci mertebe kısmi diferansiyel operatörünü ele alalım. x_i' yeni bağımsız değişkenleri

$$x_i'=\varphi_i(\mathbf{x}), \qquad i=1,2,\ldots,n$$

tersinir dönüşümleriyle tanımlansın. Buradan

$X(\varphi_i)=\xi_1(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}+\xi_2(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}$ olmak üzere (1.1.5) operatörü yeni değişkenlerle

$$\overline{X}=X(\varphi_1)\frac{\partial}{\partial x_1'}+X(\varphi_2)\frac{\partial}{\partial x_2'}+\ldots+X(\varphi_n)\frac{\partial}{\partial x_n'}$$

biçiminde yazılır.

1.1.3.Teorem

$$X(u)\equiv \xi_1(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_1}+\xi_2(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad (1.1.6)$$

lineer homojen kısmi diferansiyel denkleminin genel çözümü, F keyfi bir fonksiyon ve (1.1.6) denkleminin

$$\frac{dx_1}{\xi_1}=\frac{dx_2}{\xi_2}=\ldots=\frac{dx_n}{\xi_n} \qquad (1.1.7)$$

karakteristik sisteminin n-1 tane bağımsız ilk integralinin bir kümesi

$$\psi_1(\mathbf{x})=C_1,\ \psi_2(\mathbf{x})=C_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1}(\mathbf{x})=C_{n-1}$$

olmak üzere

$$u=F(\psi_1(\mathbf{x}),\ldots,\psi_{n-1}(\mathbf{x}))$$

formülü ile verilir.

1.1.1.2. Homojen Olmayan Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler

Burada, (1.1.3) homojen olmayan lineer denklemlerin

$$\xi_1(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_1}+\xi_2(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_n}=f(\mathbf{x}) \qquad (1.1.8)$$

tipinin integralini ele alacağız. (1.1.5) operatörü kullanılarak (1.1.8) denklemi

$$X(u)=f(\mathbf{x})$$

olarak yazılır.

1.1.4.Teorem $X(u)=f(\mathbf{x})$ homojen olmayan denklemin bir özel çözümü $u=\varphi(\mathbf{x})$ ile verilsin. Genel çözüm, $X(u)=0$ homojen denkleme karşılık gelen homojen çözümün $\varphi(\mathbf{x})$ özel çözümüne eklenmesiyle elde edilir. Böylece 1.1.3. Teoremden, (1.1.8) denkleminin genel çözümü

$$u=\varphi(\mathbf{x})+F(\psi_1(\mathbf{x}),\ldots,\psi_{n-1}(\mathbf{x}))$$

olur.

Bu teorem, (1.1.8) homojen olmayan lineer kısmi diferansiyel denklemin $\varphi(\mathbf{x})$ gibi bir özel çözümünün bilinmesi halinde bu denklemin integrasyon problemini (1.1.7) adi diferansiyel denklem sisteminin çözümüne indirger.

1.1.2. Hemen Hemen Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler

ξ_i ve g fonksiyonları bağımlı ve bağımsız değişkenlerin fonksiyonları iseler

$$\xi_1(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\xi_2(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=g(\mathbf{x},u) \qquad (1.1.9)$$

denklemine hemen hemen (quasi) lineer denklem denir.

1.1.2.1. Laplace Metodu

Laplace, iki bağımsız değişkenli

$$\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=g(x,y,u) \qquad (1.1.10)$$

denklemini, bağımsız değişkenlerin değişimi yaklaşımını uygulayarak denklemi adi diferansiyel denkleme indirgeyerek çözdü. α ve β katsayılarının her ikiside sıfırdan farklı olsun. Aksi takdirde (1.1.10) denklemi adi diferansiyel denklem olur. (1.1.10) denklemi, $x'=x$ ve $y'=\psi(x,y)$ yeni değişkenleriyle

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x'}+(\alpha\frac{\partial \psi}{\partial x}+\beta\frac{\partial \psi}{\partial y})\frac{\partial u}{\partial y'}=g(x,y,u)$$

biçiminde yazılır. (1.1.10) ile ilişkili

$$\alpha(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial x}+\beta(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial y}=0$$

lineer homojen denklemin bir çözümü $\psi(x,y)$ olur. Böylece ($x'=x$)

$$\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}=g(x,y,u)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Burada y'ye göre $y' = \psi(x,y)$ çözülmesiyle x ve y' nin terimlerinden y ifade edilmiş olur. Böylece (1.1.10) denklemi birinci mertebe adi diferansiyel denklemine indirgenmiş olur. Laplace metodu, çok değişkenli denklemlere genişletilebilir.

1.1.2.2. Lineer Homojen Denkleme İndirgeme

n bağımsız değişkenli (1.1.9) genel hemen hemen lineer denklemi aşağıdaki gibi n+1 değişkenli homojen lineer denkleme indirgenebilir. u, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nin bir fonksiyonu olarak kapalı biçimde

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)=0$$

ile tanımlansın ve V fonksiyonu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve u n+1 değişkenli bilinmeyen bir fonksiyon olarak ele alınsın.

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial u}$$

x_i'ye göre toplam diferansiyel operatörü olsun. Bu operatörün V fonksiyonuna uygulanmasıyla

$$D_i V \equiv \frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial u} = 0$$

denklemi elde edilir. Bu yüzden i=1,2,…,n için $p_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} / \frac{\partial V}{\partial u}$ olur.

$$\xi_1(\mathbf{x},u)\, p_1 + \xi_2(\mathbf{x},u)\, p_2 + \ldots + \xi_n(\mathbf{x},u)\, p_n = g(\mathbf{x},u)$$

denkleminde $p_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} / \frac{\partial V}{\partial u}$ yerine konulursa, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, u değişkenlerinin bilinmeyen fonksiyonu olan V için

$$X(V)\equiv \xi_1(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_1}+\xi_2(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_n}+g(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial u}=0 \quad (1.1.11)$$

elde edilir. (1.1.11) lineer denklemine, 1.1.3. Teoremin uygulanmasıyla hemen hemen lineer denklemin çözümü için aşağıdaki teoreme varırız.

1.1.6.Teorem (1.1.9) hemen hemen lineer denklemin

$$\frac{dx_1}{\xi_1}=\frac{dx_2}{\xi_2}=\ldots=\frac{dx_n}{\xi_n}=\frac{du}{g} \qquad (1.1.12)$$

karakteristik sisteminin n tane bağımsız ilk integralinin bir kümesi

$$\psi_1(\mathbf{x},u)=C_1,\ \psi_2(\mathbf{x},u)=C_2,\ \ldots,\ \psi_n(\mathbf{x},u)=C_n$$

olsun. Buradan F, n değişkenli keyfi bir fonksiyon olmak üzere (1.1.11) denkleminin genel çözümü,

$$V(\mathbf{x},u)=F(\psi_1(\mathbf{x},u),\ldots,\psi_n(\mathbf{x},u))$$

ile verilir.

Sonuç olarak, (1.1.9) hemen hemen lineer denkleminin çözümü, $V(\mathbf{x},u)=0$ ile kapalı olarak tanımlanır. $\frac{\partial V}{\partial u}\neq 0$ sağlanır ve çözüm açık olarak $u=\phi(\mathbf{x})$ yazılabilir.

1.1.3. Verilen Eğriden Geçen İntegral Yüzeyleri

Bu bölümde, lineer kısmi diferansiyel denklemlerin yukarıda bulunan genel çözümünün, verilen bir eğriden geçen integral yüzeylerinin bulunmasında nasıl kullanıldığını göreceğiz. (1.1.9) denkleminin iki bağımsız değişkenli

$$P(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y,u) \qquad (1.1.13)$$

$$Pp+qQ=R$$

durumu için 1.1.6.Teoremdeki (1.1.12)

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{R}$$

yardımcı denklemlerinden

$$\psi_1(x,y,u) = c_1 \ , \quad \psi_2(x,y,u) = c_2 \qquad (1.1.14)$$

gibi iki çözümünü bulduğumuzu farzedelim. Yine 1.1.6. Teoremden (1.1.13) denkleminin herhangi bir çözümünün c_1 ile c_2 arasındaki

$$F(c_1, c_2) = 0$$

gibi bir bağıntıdan elde edilen

$$F(\psi_1, \psi_2) = 0$$

bağıntısı yapısında olduğunu gördük. Şimdiki problemimiz özel şartlar altında F fonksiyonunu belirlemeye çalışmaktır.

s parametre olmak üzere parametrik denklemleri

$$x = x(s), \ \ y = y(s), \ \ u = u(s)$$

olan bir γ eğrisinden geçen integral yüzeyini bulmak istiyorsak, (1.1.14)'deki özel çözüm

$$\psi_1(x(s),y(s),u(s)) = c_1 \ , \quad \psi_2(x(s),y(s),u(s)) = c_2$$

özelliklerini göstermektedir. Böylece $F(\psi_1, \psi_2)=0$ tipinde bir denklem elde etmek için elimizde bulunan iki denklemden s'yi yok ederiz. O zaman aradığımız çözüm $F(c_1, c_2) = 0$ ile verilir.

1.1.4. Verilen Yüzey Ailesine Dik Yüzey Ailesi

Verilen bir yüzey ailesine dik yüzey ailesinin bulunması problemi, birinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemler teorisinin ilginç bir uygulamasıdır.

$$f(x,y,z)=c \tag{1.1.15}$$

denklemi ile bir yüzey ailesi verilmiş olsun. Bu yüzeylerin hepsini dik açı ile kesen bir başka yüzey ailesini bulmak isteyelim.

(1.1.15) sisteminin (x,y,z) noktasından geçen elemanların bu noktadaki normali

$$(P,Q,R)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial u}\right) \tag{1.1.16}$$

doğrultusundadır. Denklemi $u=\phi(x,y)$ olan yüzey yukarıda verilen yüzey ailesini dik keserse (x,y,u) koordinatlı noktasının doğrultusu

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},-1\right)$$

olan normali, (1.1.15) yüzey ailesinin bu noktadan geçen elemanının bu noktadaki doğrultusu (P,Q,R) olan normaline diktir. Böylece $u=\phi(x,y)$ yüzeyini belirlemek için

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}=R \tag{1.1.17}$$

lineer kısmi diferansiyel denklemini elde ederiz. (1.1.16) daki eşitliği yerine koyarsak bu denklemin

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}$$

denklemine denk olduğunu görürüz.

Tersine (1.1.17) lineer kısmi diferansiyel denkleminin herhangi bir çözümü (1.1.15) ile verilen sistemin bütün yüzeylerine diktir. Bu yüzden (1.1.17) lineer kısmi diferansiyel denklemi (1.1.15) yüzey ailesinin elemanlarına dik olan yüzeyleri belirleyen genel diferansiyel denklemdir. Yani (1.1.15) sistemine dik yüzeyler

$$\frac{dx}{\partial f/\partial x}=\frac{dy}{\partial f/\partial y}=\frac{du}{\partial f/\partial u}$$

denklemlerinin integral eğrileri tarafından doğrulan eğrilerdir.

1.1.5. Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler

F, p ve q nun lineer olmayan bir fonksiyonu iken (1.1.2)'deki iki bağımsız değişkenli

$$F(x,y,u,p,q)=0 \tag{1.1.18}$$

birinci mertebe denklemini düşünelim. Genelde çözümü keyfi fonksiyon içerir. Lagrangenin temel sonucu, sadece iki parametreye bağlı çözümün bilinmesi yeterli olduğunu ifade eder. (1.1.18) denkleminin diğer bütün integralleri parametrelerin yok edilmesiyle tam türevlenen böyle bir çözümden elde edilir.

1.1.5.1. Tam, Genel ve Tekil İntegraller

1.1.7.Tanım (1.1.18) denkleminin tam integrali

$$u=\phi(x,y,a,b) \tag{1.1.19}$$

şeklindeki iki keyfi sabite bağlı bir çözümdür. Bunun anlamı, $\phi_x=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ ve

$\phi_y=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$ olmak üzere u ve p,q sırasıyla $u=\phi(x,y,a,b)$ ve

$$p=\phi_x(x,y,a,b)\ ,\ q=\phi_y(x,y,a,b) \qquad (1.1.20)$$

ile yer değiştirmesiyle (1.1.18) bağıntısı x,y,a,b de özdeşlik olur. Bundan başka (1.1.19) ve (1.1.20) deki üç bağıntıdan a ve b parametrelerinin yok edildiğini farzedelim ve (1.1.20) , kesinlikle (1.1.19) denklemine gider.

1.1.8.Teorem (1.1.19) tam integrali verilsin. a ve b, $b=\sigma(a)$ keyfi bağıntısı altındaki parametreler ve

$$u=\phi(x,y,a,\sigma(a)) \qquad (1.1.21)$$

integral yüzeyinin tek parametreli ailesinin zarfı

$$u=f_\sigma(x,y) \qquad (1.1.22)$$

olsun. Buradan (1.1.22), (1.1.18) denklemi için bir integral yüzeydir. (1.1.22) deki σ alt indisi, σ fonksiyonun seçimine bağlı çözümleri gösterir.

1.1.9.Tanım Genel integral, olası bütün $b=\sigma(a)$ bağıntıları için elde edilen (1.1.21) bütün özel çözümlerinin kümesidir.

1.1.10.Tanım Tekil integral, iki parametreye bağlı (1.1.19) integral yüzeylerinin ailesinin zarfıdır. (1.1.19) denkleminden a ve b nin yok edilmesiyle elde edilir ve

$$\frac{\partial\phi(x,y,a,b)}{\partial a}=0\ ,\ \frac{\partial\phi(x,y,a,b)}{\partial b}=0$$

denklemleri bu yok etmenin mümkün olmasını sağlar.

Herhangi sayıda değişkene sahip (1.1.1) denklemi için tam integral içeren bir çözümle verilir.

1.1.11.Tanım

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n)=0$$

denkleminin tam integrali, n tane a_i keyfi parametre içeren

$$u=\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (1.1.23)$$

çözümüdür. (1.1.23) denkleminden parametrelerin yok edilmesi ve

$$p_i = \frac{\partial \phi(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_n)}{\partial x_i} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

denklemleri, kesinlikle (1.1.22) diferansiyel denkleminine götürür.

1.1.5.2. Lagrange-Charpit Metodu

Önceki bölüme göre (1.1.18) denkleminin bütün çözümleri tam integrallerinin hesaplanmasıyla bulunabilir. Bu problemi çözmek için bir metod Lagrange-Charpit tarafından verilmiştir. Bu metod, tam integrallenebilen sistemlerin aşağıdaki düşüncesine dayanır.

u, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ değişkenlerinin bilinmeyen fonksiyonu ve $f_1(\mathbf{x},u), \ldots, f_n(\mathbf{x},u)$'lerde u ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nin fonksiyonları olarak verilsin.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f_1(\mathbf{x},u), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = f_n(\mathbf{x},u) \qquad (1.1.24)$$

bir mertebeli kısmi diferansiyel denklem sistemini düşünelim ve bu denklem

$$w= f_1(\mathbf{x},u)\,dx_1 + \ldots + f_n(\mathbf{x},u)\,dx_n \qquad (1.1.25)$$

w 1-form ilişkilendirilmesiyle tanımlanır.

1.1.12.Tanım (1.1.24) nin herhangi bir u=u(x) çözümü için

$$f_1(\mathbf{x},u)\,dx_1+\ldots+\ f_n(\ \mathbf{x},u)\,dx_n=du$$

w formu tamsa (1.1.24) sistemine tam integrallenebilir denir.

w formunun tam olması için gerek ve yeterli koşul w formunun kapalı olmasıdır. Bu nedenle tam integrallenebilme şartı $dw\big|_{(1.1.20)}=0$ olur.

1.1.13.Torem (1.1.25) sisteminin tam integrallenebilir olması için ancak ve ancak aşağıdaki $\frac{n(n-1)}{2}$ denklemin,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial u}f_k=\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\frac{\partial f_k}{\partial u}f_i \qquad i,k=1,2,\ldots,n \qquad (1.1.26)$$

$x_1, x_2,\ldots, x_n$,u de aynen sağlanması ile mümkündür.

(1.1.18) kısmi diferansiyel denkleminin Lagrange ve Charpit tarafından bulunan çözüm yönteminin temel fikri

$$\phi(x,y,u,p,q)=a \quad , \quad a=sabit \qquad (1.1.27)$$

birinci mertebeden yardımcı kısmi diferansiyel denkleminin işin içine sokulmasıdır. (1.1.18) ve (1.1.27) denklemlerinden p ve q

$$p=f_1(x,yu,a),\ q=f_2(x,yu,a)$$

olarak çözülebilir. (1.1.24) tam integrallenebilen sistemi

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1(x,yu,a)\ \ ,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=f_2(x,yu,a) \qquad (1.1.28)$$

sağlar. Bu sistemin genel çözümü adi diferansiyel denklemlerin integrasyonu ile elde edilir ve b keyfi integrasyon sabiti içerir. Böylece (1.1.28) sisteminin çözümü altında (1.1.18) denkleminin u=ϕ(x,y,a,b) şeklinde tam integrali elde edilir.

Yardımcı (1.1.27) denkleminin oluşturulması aşağıdaki hesaplamaları gerektirir. $\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial u}$ kısmi türevlerinin değerleri, x ve y'ye göre türevlenmesiyle ve yok edilmesiyle (1.1.19) ve (1.1.27) den elde edilir. Tam integrallenebilirlik için test,

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial u}$$

(1.1.26) integrallenebilirlik koşulundaki bu değerlerin yerine geçmesiyle elde edilir ve x,y,u,p,q beş bağımsız değişkenli lineer kısmi diferansiyel denklem olarak aşağıdaki gibi F ve ϕ fonksiyonlarının terimleriyle açıkça yazılabilir.

$$P\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \phi}{\partial y} + (pP+qQ)\frac{\partial \phi}{\partial u} - (X+pU)\frac{\partial \phi}{\partial p} - (Y+qU)\frac{\partial \phi}{\partial q} = 0 \quad (1.1.29)$$

Burada X, Y, U, P ve Q fonksiyonları

$$X = \frac{\partial F}{\partial x},\ Y = \frac{\partial F}{\partial y},\ U = \frac{\partial F}{\partial u},\ P = \frac{\partial F}{\partial p},\ Q = \frac{\partial F}{\partial q}$$

ile tanımlanır. (1.1.29) integre etmek için

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{pP + qQ} = -\frac{dp}{X + pU} = -\frac{dq}{Y + qU} \quad (1.1.30)$$

karakteristik sisteminin ilk integrali gereklidir. Ayrıca metod, sadece (1.1.27) ilk integralinin birinin bilgisini gerektirir.

1.1.5.3. Tam İntegraller Yolu ile Cauchy Probleminin Çözümü

(1.1.18) F(x,y,u,p,q)=0 denklemi için Cauchy problemi verilen bir γ eğrisinden geçen integral yüzeyinin belirlenmesidir. Genelde Cauchy problemi adi diferansiyel denklemler durumundaki gibi sadece tek bir çözüme sahiptir.

γ başlangıç eğrisi,

$$x=x_0(s),\ \ y=y_0(s),\ \ u=u_0(s)$$

ile parametri olarak verilsin ve (1.1.18) denkleminin $u=\phi(x,y,a,b)$ tam integrali bilinsin. Biz, γ başlangıç eğrisi üzerindeki tam integrali göz önünde tutularak elde edilen

$$W(s,a,b)=u_0(s)-\phi(x_0(s),y_0(s),a,b) \qquad (1.1.31)$$

fonksiyonunu tanıtalım.

$$W(s,a,b)=0,\ \ \frac{\partial W(s,a,b)}{\partial s}=0 \qquad (1.1.32)$$

denklemlerinden s parametresinin yok edilmesiyle bir $b=\sigma(a)$ bağıntısı sağlanır. Yani, (1.1.21) integral yüzeyinin bir-parametreli ailesidir. Bu ailenin zarfı, γ eğrisinden geçer. Ayrıca 1.1.8. Teorem ile bir integral yüzeyidir. Bu nedenle sorudaki Cauchy probleminin çözümünü sağlar.

1.1.5.4. Karakteristiklerin Monge Teorisi

Monge, Lagrange teorisinin görülebilir geometrik resminin sağlanmasıyla kısmi diferansiyel denklemlerin çağdaş teorisinin temelini güçlendirdi. Monge'nin ortaya koyduğu karakteristiklerin temel kavramı, tam integrallerin çatısından doğal biçiminde açıklanabilir.

$V(x,y,u,a,b) = 0$, (1.1.18) denkleminin bir tam integralinin kapalı temsili olsun. Genel integral, $V(x,y,u,a,\sigma(a))=0$ yüzeyinin bir-parametreli ailesinin zarfıdır ve $\sigma(a)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$V(x,y,u,a,\sigma(a))=0, \quad \frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\sigma'(a)=0 \qquad (1.1.33)$$

denklemlerinden a'nın yok edilmesiyle elde edilir. Şimdi de a'nın verilen bir değeri için bu iki denklemi düşünelim. Buradan (1.1.33) denklemleri, zarflanmış yüzeyler ile zarfının değme eğrisini temsil eder. Monge buna karakteristik eğri ismini vermiştir.

Karakteristik eğrilerin yeri, genel integralde açık biçimde olan a'nın değiştirilmesiyle elde edilir. Ayrıca $\sigma(a)$ keyfi bir fonksiyon olduğundan, bu fonksiyonun değerleri ve a'nın verilen herhangi bir değerindeki $\sigma'(a)$ türevi, sırasıyla b ve c keyfi parametreleri olarak dikkate alınabilir. Böylece verilen bir (1.1.18) denkleminin bütün karakteristik eğrilerinin kümesi a, b ve c üç keyfi parametresine bağlıdır ve

$$V(x,y,u,a,b) = 0, \quad \frac{\partial V(x,y,u,a,b)}{\partial a}+\frac{\partial V(x,y,u,a,b)}{\partial b}c=0 \qquad (1.1.34)$$

denklemleriyle tanımlanır. Zarfların tanımından hareketle, zarflar ve zarflanmış yüzeyler karakteristikler boyunca ortak tanjant düzlemine sahiptir. Ortak tanjant düzlemlerde belirlenen p ve q'nun kendi değerleri, $V(x,y,u,a,\sigma(a))=0$ olmak üzere

$$\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial u}=0 \qquad (1.1.35)$$

bağıntılarından elde edilir. (1.1.33) ve (1.1.35) denklemleri, a'nın herhangi sabit değeri için, eğrinin bir tanjant düzlemini ve bir karakteristik eğri tanımlar. Karakteristik eğrilerin bu kombinasyonu ve tanjant düzlemden, birinci mertebe bir karakteristik ya da karakteristik şerit olarak bahsedilir. Bu sonuncu isim, p ve q ilk türevlerini ve x, y, u değişkenlerini içeren birince mertebenin karakteristiği olduğundan kendinden açıklamalıdır. Verilen bir (1.1.18) denklemine göre, onun bir mertebeli karakteristikleri aşağıdaki birinci mertebe adi diferansiyel denklem sistemiyle tanımlanır.

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{pP+qQ}=-\frac{dp}{X+pU}=-\frac{dq}{Y+qU}=d\tau \qquad (1.1.36)$$

(1.1.36) denklemi,(1.1.30) sistemiyle özdeştir. τ yardımcı parametresi x, y, u, p, q değişkenlerinde sadece simetri için ortaya konmuş bir parametredir.

(1.1.18) ile verilen bir diferansiyel denklem için, X, Y, U, P, Q nicelikleri x, y, u, p, q beş değişkenin bilinen fonksiyonlarıdır. Sonuç olarak, tam integrallerden bağımsız olarak karakteristikler, (1.1.36) karakteristik denklemleriyle tanımlanır. Son yazılan x, y, u, p, q bağımlı değişkenli bir (1.1.30) sistemi olarak ele alınabilir ve

$$\frac{dx}{d\tau}=P,\quad \frac{dy}{d\tau}=Q,\quad \frac{du}{d\tau}=pP+qQ,\quad \frac{dp}{d\tau}=-(X+pU),\quad \frac{dq}{d\tau}=-(Y+qU) \qquad (1.1.37)$$

çözülebilir. Yani $\tau=0$ daki başlangıç koşulu olan x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 değerlerinin kullanılmasıyla. Çözüm, (1.1.18) denkleminin başlangıç değerlerini sağlayan bir- mertebeli bir karakteristik tanımlar.

1.1.5.5. Cauchy Metodu

Cauchy probleminin çözümüne alternatif bir yaklaşım düşünelim. Bu yaklaşım tam integrallerdeki Lagrange teorisinden bağımsızdır. Cauchy metodu (1.1.1) kısmi diferansiyel denklemi için Cauchy problemini karakteristik denklemlere indirger.

İki bağımsız değişkenli denklemleri düşünelim.

$$x = f_1(\tau; x_0, y_0, u_0, p_0, q_0),$$

$$y = f_2(\tau; x_0, y_0, u_0, p_0, q_0),$$

$$u = \phi\,(\tau; x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \qquad (1.1.38)$$

$$p = \psi_1(\tau; x_0, y_0, u_0, p_0, q_0),$$

$$q = \psi_2(\tau; x_0, y_0, u_0, p_0, q_0),$$

τ=0 da x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 başlangıç değerleri farzedilen (1.1.37) denklemlerinin çözümü olsun. γ başlangıç eğrisinin (x_0, y_0, u_0) başlangıç noktasına kısıtlaması

$$x_0 = x_0(s),\; y_0 = y_0(s),\;\; u_0 = u_0(s) \qquad (1.1.39)$$

olsun. Metodun ana fikri, p_0 ve q_0'ya s parametresinin $p_0(s)$ ve $q_0(s)$ fonksiyonlarının atanmasıdır. Bununla birlikte (1.1.39) den farklı, $p_0(s)$ ve $q_0(s)$ keyfi fonksiyonlar olamaz. F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)=0 denklemini ve $du_0 = p_0 dx_0 + q_0 dy_0$ teğetlik koşulunu sağlar. Bu son yazılan denklemin ds'ye bölünmesiyle, $p_0(s)$ ve $q_0(s)$ belirlenmesi için aşağıdaki iki denklem elde edilir.

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)=0, \quad \frac{du_0}{ds} = p_0\frac{dx_0}{ds} + q_0\frac{dy_0}{ds} \qquad (1.1.40)$$

Yukarıdakileri toparlayıp, Cauchy metodunu aşağıdaki gibi formülleştirelim.

γ , (1.1.39) ile verilen eğri olsun. F(x,y,u,p,q)=0 (1.1.18) denkleminin integral yüzeyi, γ eğrisiden geçen (1.1.39)'ün ilk üç x = f_1, y = f_2 ve u = ϕ denklemi ile tanımlanır. Burada x_0, y_0, u_0, (1.1.38) fonksiyonlarıyla yer değiştirmiştir ve $p_0(s)$ ve $q_0(s)$ ile p_0 ve q_0 (1.1.40) cebirsel denklemlerinden elde edilir.

1.1.5.6. Hamilton-Jacobi Denkleminin Karakteristikleri

Hamilton-Jacobi Denklemleri bir mertebeli linner olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çok önemli örneklerindendir. Bağımlı değişken içermeyen (1.1.1) denkleminin özel bir durumudur.

Denklem $p_i \dfrac{\partial S}{\partial x_i}$ ve $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ olmak üzere

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial x_n}) = 0 \qquad (1.1.41)$$

ya da

$$S_t + H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$$

biçimindedir. Burada bağımsız değişkenler, t zamanı ve $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koordinatlarıdır. $H(t,\mathbf{x},\mathbf{p})$ fonksiyonuna mekaniksel sistemlerin Hamiltonianı adı verilir. (1.1.41) denklemi için karakteristik denklemler

$$dt = \frac{dx_1}{\partial H / \partial p_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\partial H / \partial p_n} = \frac{dS}{S_t + \sum p_i \dfrac{\partial H}{\partial p_i}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\partial H / \partial x_n} = -\frac{dS_t}{\partial H / \partial t}$$

şeklinde yazılır.

Bu denklemler S değişkeni içermez. Bu yüzden, dS ve dS_t içermeyen denklemler bağımsız olarak integre edilebilir yani Hamilton denklemleri

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad i=1,2,\dots,n \tag{1.1.42}$$

dir. Özetlersek, mekaniklerin, (1.1.42) kanonik denklemleri Hamilton-Jacobi denklemi için karakteristik denklemler olur. Başka bir değişle bir mekanik sistem, Hamilton-Jacobi denkleminin karakteristikleri boyunca hareket eder.

Ayrıca, (1.1.41) denklemi, S değişkenini içermediğinden (1.1.23) tam integrali bir sabit ilavesi ile

$$S = \phi\,(t, \mathbf{x}, a_1, \dots, a_n) + a_{n+1}$$

biçiminde kolayca elde edilir. Sonuç olarak, tam integral genellikle $S=\phi(t,\mathbf{x}, a_1, \dots, a_n)$ ana kısmı ile özdeşleştirilir. Jacobi [31], aşağıdaki teoremle, hareketlerin Hamilton denklemlerinin genel çözümünün Hamilton-Jacobi denklemlerinin tam integralinden elde edilebileceğini ifade eder.

1.1.14.Torem (1.1.41) denkleminin, bir $S = \phi\,(t, \mathbf{x}, a_1, \dots, a_n)$ tam integrali verilsin. (1.1.42) kanonik denklemlerinin genel çözümü

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}=p_i \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial a_i}= b_i \quad i=1,2,\dots,n \tag{1.1.43}$$

bağıntılarıyla verilir. Burada a_i ve b_i, genel çözümün 2n keyfi sabitini sağlar.

1.2. Tanjant Dönüşümleri

Düzlemdeki nokta dönüşümlerine ek olarak, mekanik, optik ve geometride kullanılan, değme (contact) ya da birinci mertebe tanjant dönüşümleri bulunmuştur. Bundan başka Lie, kısmi diferansiyel denklemler teorisini kullanarak, değme dönüşümlerinin gruplarının yardımıyla diferansiyel denklemlerin mertebesini indirgedi. Buna göre (1.1.1) F($\mathbf{x}$,u,$\mathbf{p}$)=0 bir mertebeli kısmi diferansiyel denklemi, uygun bir değme dönüşümü yardımıyla H($\mathbf{x}$,u,$\mathbf{p}$)=0 şeklinde diğer bir mertebeli denkleme dönüşür.

Genelde değme dönüşümleri, keyfi sayıda bağımsız değişken ve sadece tek bir bağımlı değişken içerirler. Bu dönüşümler, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bağımsız değişkenlerini, u bağımlı değişkenini ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \dots, p_n)$, $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ kısmi türevlerini içerir. Böylece bir değme dönüşümü $(\mathbf{x},u,\mathbf{p}) \in IR^{2n+1}$ noktalarını, $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{p}) \in IR^{2n+1}$ yeni pozisyonuna götürür.

$$\overline{x} = f(\mathbf{x},u,\mathbf{p}),\quad \overline{u} = g(\mathbf{x},u,\mathbf{p}),\quad \overline{p} = (\mathbf{x},u,\mathbf{p}) \tag{1.2.1}$$

(1.2.1) dönüşümlerine maruz kalındığında

$$d\overline{u} - \overline{p}_i\, d\overline{x}_i = \lambda(\mathbf{x},u,\mathbf{p})(du - p_i\, dx_i) \tag{1.2.2}$$

değme koşuluyla kısıtlanılmış olunur. Burada $\lambda(\mathbf{x},u,\mathbf{p})$ belirsiz çarpandır.

Değme dönüşümleri; çeşitli hareketlerin Hamilton denklemlerinin integrasyonu için Hamilton-Jacobi teorisinde sıkça kullanılır ve mekanikte kanonik dönüşümler olarak bilinir [13]. Değme dönüşümlerinin belli başlı özelliklerini son terim yansıtır, mekanikte düşünüldüğünde hareket denklemlerinin (1.1.42) kanonik formu korunur. Konunun can alıcı noktası (1.1.41) keyfi bir Hamilton-Jacobi denkleminin uygun bir kanonik dönüşüm ile indigenerek basitleştirilebilmesi ve (1.1.42) ile verilen yeni kanonik denklemlerin doğrudan integre edilir olmasıdır. Kanonik dönüşümlerin tersleri ve bileşkeleri de kanonik dönüşüm olur. Böylece tüm kanonik dönüşümler kümesi bir grup oluşturur. Böylece, Hamilton-Jacobi teorisi mekanik problemleri değme dönüşümleri altında grup teorisine indirger.

Lie, kısmi türevli denklemler için yukarıda bahsedilen klasik integral metodlarına ek olarak değme dönüşümleri düşüncesini temel alan yeni bir integrasyon metodu geliştirdi. Lie'nin yaklaşımı, lineer olmayan bir mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin karakteristiklerinin Lagrange-Monge düşüncesini ve dönüşüm teorisinde tanımladığı infinitesimal dönüşümleri temel alır ve tam çözümlerin özel tipi olan kısmi diferansiyel denklemlerin değişmez (invariant) çözümlerini grup değişmezliği bakış açısından verir.

Şimdi, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin değişmez çözümlerine geçmeden önce bu teorinin temelini oluşturan tanım ve teoremleri verelim [6], [16], [24].

1.3. Bir-parametreli Yerel Lie Grupları ve Infinitesimal Dönüşümler

Lie'nin teorisinin temelini değişmezlik (invariance) kavramı oluşturur. Değişmezlik de simetrilerin varlığı ile mümkündür. Düzlemdeki nokta dönüşümlerin bir G grubunu göz önüne alalım. Düzlemde verilen bir eğri ailesinin, G grubu altında değişmez olması için ailenin eğrilerinin, G grubunun her bir dönüşümüyle kendi aralarında permute olmasıdır. Simetrilerin sürekliliği gereklidir yani grup dönüşümleriyle herhangi bir $\mathbf{x} \in IR^n$ noktası, konumu sürekli bir eğri olan ve G grubunun yol eğrisi denen $\bar{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x},\varepsilon)$ noktasına taşınır. Grup özellikleri anlamında, yol eğrisinin herhangi bir noktası aynı eğrinin noktalarına G ile taşınır. $f(\mathbf{x},\varepsilon)$ görüntülerinin yerine $\mathbf{x}$ noktasının Györüngesi adı verilir ve G(**x**) ile gösterilir. G altındaki değişmez eğriler ile G grubunun yol eğrileri çakışır. Böylece G grubu, sürekli olarak değişebilen parametrelerin kümesiyle belirtilir ve G dönüşümlerin sürekli grubu olur. Uygulamalı grup analizinde, dönüşümlerde değişmezliğinin oluşturulması bazen hesaplama problemi oluşturacağından, dönüşümlerin sürekli grupları kavramı infinitesimal dönüşümler ya da infinitesimal üreteçlerle belirtilmesi daha uygun olmuştur. Değişmezlikte infinitesimal üreteçler üzerinden verilir. Verilen bir infinitesimal üreteçden Lie denklemlerinin çözülmesiyle grup dönüşümleri bulunur. Lie denklemlerinin çözümünün varlığı sadece regüler noktaların küçük komşuluklarında garantidir. Bu da bizi bir-parametreli yerel dönüşüm grupları kavramına götürür.

1.3.1 Bir-Parametreli Yerel Dönüşüm Grupları

$\mathbf{x} \in \mathrm{IR}^n$ üzere, ε parametresine bağlı

$$\bar{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x},\varepsilon) \tag{1.3.1}$$

şeklindeki dönüşümleri ele alalım. Bu dönüşümlerden birim dönüşüm ya da özdeşlik dönüşümü elde etmek için, parametrenin belli değeri için

$$f(\mathbf{x},\varepsilon_0) = \mathbf{x} \tag{1.3.2}$$

koşulunu koyalım ve ε_0 civarında ε'nun hiçbir değerinin bulunmamasıyla, (1.3.1) dönüşümü özdeşlik dönüşümüne indirgenir.

(1.3.1) ve (1.3.2) denklemleri x_i koordinatlarında

$$\bar{x}_i = f_i(\mathbf{x},\varepsilon), \quad f_i(\mathbf{x},\varepsilon_0) = x_i \qquad i=1,2,...,n \tag{1.3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Pratik uygulamalarda bu dönüşümler, sadece ε parametresinin sayısal olarak yeteri kadar küçük değerlere kısıtlanmasıyla grup özelliklerini sağlar. Bu da yerel dönüşüm grubu kavramıyla verilir.

1.3.1. Tanım $U \subset IR$ parametrelerin kümesi olmak üzere, (1.3.3) ile tanımlı bir-parametreli dönüşümlerin G kümesini alalım. Eğer aşağıdaki özellikleri sağlayan ve ε_0 içeren $U' \subset U$ alt aralığı varsa G kümesine bir-parametreli yerel grup denir.

(i) $\forall\ \varepsilon,\delta \in U'$ için $\overline{x}_i = f_i(\mathbf{x},\varepsilon)$, $\overline{\overline{x}}_i = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n; \delta)$ ise

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n; \delta) = f_i(\mathbf{x}, \varphi(\varepsilon,\delta)) \tag{1.3.4}$$

olacak şekilde parametreler arasındaki bileşim kuralıyla tanımlı bir φ fonksiyonu vardır.

(ii) $\forall\ \varepsilon,\delta,\beta \in U'$ için $\varphi(\varepsilon, \varphi(\delta,\beta)) = \varphi(\varphi(\varepsilon,\delta),\beta)$

(iii) Herhangi $\varepsilon \in U'$ değeri için $\varphi(\varepsilon,\delta) = \varepsilon_0$ denklemi $\delta = \varepsilon^{-1}$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

(iv) $\varphi(\varepsilon,\delta) \in U'$, $\varepsilon,\delta \in U'$ değişkenleri için üç defa sürekli olarak diferansiyellenebilen fonksiyondur.

Böylece

$$\varphi(\varepsilon,\delta) \tag{1.3.5}$$

fonksiyonuna grubun bileşim kuralı adı verilir. Ayrıca $f_i(\mathbf{x}, \varepsilon_0) = x_i$ başlangıç koşulları ve (1.3.4) den

$$\varphi(\varepsilon, \varepsilon_0) = \varepsilon \ , \quad \varphi(\varepsilon_0, \delta) = \delta$$

olur.

Ters dönüşüm de

$$f_i(\overline{\mathbf{x}}, \varepsilon^{-1}) = x_i \qquad i=1,2,...,n$$

ile verilir.

IR^n de dönüşümlerin bir G grubunu alalım. Eğer $T_1, T_2 \in G$ gibi herhangi iki dönüşüm, grubun içindeki elemanların sürekli bir kümesiyle bağlanabiliyorsa, G grubuna süreklidir denir. Yani, T_1, G grubu içindeki T_2 ye sürekli olarak dönüşür.

Bir-parametreli bir G grubunun sürekliliği yukarıdaki düşünce ile açıktır. Sürekli r-parametreli G_r grupları durumunda, $G_r(\mathbf{x})$ yörüngeleri, sürekli r-boyutlu manifoldlardır. Böylece manifold üzerinde tanımlanan Lie gruplarına geçilir.

1.3.2. Bir-Parametreli Yerel Lie Grupları

Dönüşümlerin bir-parametreli yerel Lie grubunu vermeden önce Lie grubunun genel tanımını verelim.[8]

1.3.2 Tanım Lie gruplar, grup özelliklerinden başka ek özelliklere sahip olan özel gruplardır. Temel grup özelliklerine ek olarak bir Lie grup, düzgün manifold yapısını da taşımaktadır. Bunun anlamı, Bir G Lie grubu üzerindeki grup işlemi

$$m: G\times G \rightarrow G \ , \ m(g,h)=g.h \qquad g,h\in G$$

ve g^{-1}, g elemanının grup işlemine göre tersi olmak üzere, ters dönüşüm (inversion)

$$i: G\rightarrow G \ , \ i(g)=g^{-1} \qquad g\in G$$

manifoldlar arasındaki düzgün dönüşümlerdir.

1.3.3. Tanım Dönüşümlerin bir-parametreli yerel grubu, 1.3.1. Tanımda verilen (i)-(iv) aksiyomlarına ek olarak aşağıdakileri şartları sağlıyorsa dönüşümlerin bir-parametreli yerel Lie grubunu tanımlar.

(i) ε sürekli parametre yani, S, IR'nin bir aralığıdır. Genelliği kaybetmeden $\varepsilon_0=0$ birim elemana karşılık gelir.

(ii) $\overline{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x},\varepsilon)$, $\mathbf{x}$'e göre sonsuz olarak diferansiyellenebilir ve $\varepsilon\in U$ nun analitik fonsiyonu.

(iii) $\varepsilon,\delta\in U$ için, $\varphi(\varepsilon,\delta)$ analitik fonksiyondur.

1.3.3. Infinitesimal Dönüşümler

Şimdi de infinitesimal (sonsuz küçük) dönüşümlerin nasıl oluşturulduğunu inceleyelim. (1.3.5) bileşke kuralı grup parametrelerinin seçimine bağlıdır. Genelliği bozmadan (1.3.5) bileşke kuralınının $\varphi(\varepsilon,\delta)=\varepsilon+\delta$ seçilmesiyle, $\varepsilon^{-1}=-\varepsilon$ olur. Böylece bir-parametreli dönüşümlerin Lie grubunu parametreleştirmiş oluruz. Buradan da dönüşümlerin bir-parametreli Lie grubu

$$\overline{x}_i = f_i(\mathbf{x},\varepsilon), \quad f_i(\mathbf{x},0)= x_i \qquad i=1,2,...,n \qquad (1.3.6)$$

ile verilir. Şimdi de (1.3.6) dönüşümlerini $\varepsilon=0$ komşuluğunda Taylor serisine açarak genişletelim. Böylece

$$\overline{x}_i = f_i(x_1, x_2,..., x_n;0) + \varepsilon\left(\frac{\partial f_i}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{x}=(x_1, x_2,..., x_n)$ olmak üzere,

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \xi_i(\mathbf{x})$$

diyelim. Buradan da (1.3.6)'nın başlangıç koşulu altında

$$\overline{x}_i \cong x_i + \varepsilon\,\xi_i(\mathbf{x}) \qquad (1.3.7)$$

bulunur.

1.3.4. Tanım i=1,…,n olmak üzere, $x_i + \varepsilon\,\xi_i(\mathbf{x})$ dönüşümlerine (1.3.6) Lie grubunun infinitesimal dönüşümleri ve $\xi_i(\mathbf{x})$'e de (1.3.6) grubunun infitesimalleri denir.

1.3.5. Örnek Düzlemde

$$\overline{x} = x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon \;\;,\;\; \overline{y} = y \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon$$

şeklindeki dönmelerin grubu

$$\xi_1(x,y) = \frac{\partial \overline{x}}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = y \;\;,\;\; \xi_2(x,y) = \frac{\partial \overline{y}}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = -x$$

infinitesimallerine sahiptir.

(1.3.6) ile verilen dönüşüm grubunun infinitesimallerini elde ettik. Aşağıdaki teoremle de infinitesimallerin bilinmesi halinde grup dönüşümünü elde edebiliriz.

1.3.6. Teorem (Birinci Temel Lie Teoremi) (1.3.7) infinitesimal dönüşümler verilsin. $\overline{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n; \varepsilon)$ fonksiyonları Lie denklemleri olarak da bilinen aşağıdaki birinci mertebe adi diferansiyel denklem sisteminin çözülmesiyle bulunur. i= 1,2,…,n $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ olmak üzere

$$\frac{d\overline{x}_i}{d\varepsilon} = \xi_i(\overline{\mathbf{x}}) \qquad \overline{x}_i\Big|_{\varepsilon=0} = x_i\,. \qquad (1.3.8)$$

Lie'nin Birinci Temel Teoremi, (1.3.6) ile verilen dönüşümlerin bir-parametreli Lie grubunun kendi infinitesimal dönüşümleriyle belirlenebileceğini ifade eder.

1.3.4. Infinitesimal Üreteç

ξ_i infinitesimalleri, birinci mertebe lineer operatör olarak yazılır.

1.3.7. Tanım

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.3.9}$$

operatörüne (1.3.6) dönüşümlerinin bir parametreli Lie grubunun infinitesimal üreteci denir.

Böylece Lie'nin Birinci Temel Teoreminden (1.3.6) ile verilen dönüşümlerin bir-parametreli Lie grubu kendi infinitesimal üreteçleriyle de belirlenir.

1.3.8. Örnek 1.1.5. Örnekteki dönmelerin bir-parametreli grubu

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

infinitesimal üretecine sahiptir.

(1.3.8) Lie denklemlerinden ve ξ_i analitik fonksiyonuyla verilen (1.3.9) üretecinden, (1.3.6) grup dönüşümlerini üstel fonksiyonu kullanarak sonsuz seriye açabiliriz.

1.3.9. Teorem $\bar{\mathbf{x}}=(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve X de 1.3.7. Tanımla verilen üreteç olmak üzere, (1.3.6) ile verilen dönüşümlerinin bir parametreli Lie grubu,

$$\bar{\mathbf{x}}=e^{\varepsilon X}\,\mathbf{x}= \left(1+\frac{\varepsilon}{1!}X+\frac{\varepsilon^2}{2!}X^2+...+\frac{\varepsilon^n}{n!}X^n+...\right)(\mathbf{x}) \tag{1.3.10}$$

denktir.

1.3.10. Sonuç F(**x**) sonsuz kez türevlenebilin bir fonksiyon olsun. X infinitesimal üretecine sahip (1.3.6) dönüşümlerinin bir-parametreli Lie grubu için,

$$F(\bar{\mathbf{x}})=F(e^{\varepsilon X}\ \mathbf{x})=e^{\varepsilon X}F(\mathbf{x})$$

olur.

Böylece infinitesimallerin bilinmesi halinde grup dönüşümünün bulunması için bir yöntem daha elde edilmiş olur.

1.3.5. Değişmezler

1.3.11. Tanım F(**x**) sonsuz kez türevlenebilen bir fonksiyon olsun. F(**x**) fonksiyonu (1.3.6) ile verilen dönüşümleri Lie grubunun değişmez (invariant) fonksiyonu olması için gerek ve yeterli koşul (1.3.6) ile verilen grup dönüşümlerinin herhangi biri için

$$F(\bar{\mathbf{x}})=F(\mathbf{x})$$

olmasıdır.

Eğer F(**x**), (1.3.6)'nın değişmez fonksiyonu ise F(**x**)'e (1.3.6)'nın değişmezi denir.

1.3.12.Teorem F(**x**) fonksiyonunun (1.3.6) dönüşümlerinin Lie grubu altında değişmezi (invariant) olması için gerek ve yeterli koşul grubun X üreteci için

$$XF(\mathbf{x})\equiv \xi_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}=0 \qquad (1.3.11)$$

lineer homojen kısmi türevli diferansiyel denklemin çözülmesidir.

1.3.13.Teorem IR^n de dönüşümlerin bir-parametreli Lie grubu tam olarak n-1 tane fonksiyonel bağımsız değişmezi vardır. Bağımsız değişmezlerin herhangi bir kümesine $\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots, \psi_{n-1}(\mathbf{x})$, grubun değişmezlerinin bir bazı adı verilir. Bu baz tek değildir. Bunlar (1.3.11) denkleminin karakteristik sisteminin

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} \tag{1.3.12}$$

n-1 tane ilk integralinden

$$\psi_1(\mathbf{x}) = C_1, \psi_2(\mathbf{x}) = C_2, \ldots, \psi_{n-1}(\mathbf{x}) = C_n$$

olarak elde edilir. Grubun herhangi keyfi değişmezi

$$F(\mathbf{x}) = \phi(\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots, \psi_{n-1}(\mathbf{x}))$$

formülü ile verilir.

1.3.6. Kanonik Değişkenler

(1.3.6) ile verilen dönüşümlerin Lie grubunun 1.1.13. Teorem ile verilen değişmezleri yeni değişkenler olur.

1.3.15.Teorem (1.3.6) ile verilen dönüşümlerin bir-parametreli Lie grubu, $\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots, \psi_{n-1}(\mathbf{x})$, grubun değişmezlerinin bir bazı ve $\varphi(\mathbf{x})$,

$$X(\varphi) \equiv \xi_i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = 1 \tag{1.3.13}$$

homojen olmayan lineer denkleminin herhengi bir çözümü ise

$$x_1' = \psi_1(\mathbf{x}),\ x_2' = \psi_2(\mathbf{x}), \ldots,\ x_{n-1}' = \psi_{n-1}(\mathbf{x}),\ x_n' = \varphi(\mathbf{x})$$

kanonik değişkenlerine sahiptir.

Verilen bir üreteçden grup dönüşümünü bulmak için Lie denklemlerin çözülmesi, üstel fonksiyonun kullanılması ve kanonik değişkenlerin kullanılması olmak üzere üç metod kullanılır. Bu üç metodu için aşağıdaki örneği verelim.

1.3.16. Örnek $X= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$

infinitesimal üretecine sahip grubu bulalım.

(i) *Lie denklemlerin çözülmesiyle:* X üretecinin,(1.3.8)'den Lie denklemleri

$$\frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} = \bar{x}^2, \quad \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} = \bar{x}\,\bar{y}$$

ve başlangıç koşulları

$$\bar{x}\big|_{\varepsilon=0} = x\,,\ \bar{y}\big|_{\varepsilon=0} = y$$

olarak yazılır. Denklemlerin integrasyonundan

$$\bar{x} = \frac{1}{C_1 - \varepsilon}\ ,\ \bar{y} = \frac{C_2}{C_1 - \varepsilon}$$

elde edilir. Başlangıç koşullarının yerine konulmasıyla da

$$x = \frac{1}{C_1},\ y = \frac{C_2}{C_1}$$

olur ve buradan integrasyon sabitleri $C_1 = \frac{1}{x},\ C_2 = \frac{y}{x}$ olarak bulunur.

Böylece X operatörü,

$$\bar{x} = \frac{x}{1-\varepsilon x}\ ,\ \bar{y} = \frac{y}{1-\varepsilon x}$$

özel projektif dönüşümlerin bir-parametreli grubunu üretir.

(ii) *Üstel dönüşümün kullanılmasıyla:* (1.3.10) denklemlerinden

$$\bar{x} = e^{\varepsilon X} x = (1+ \frac{\varepsilon}{1!}X + \frac{\varepsilon^2}{2!}X^2 + ... + \frac{\varepsilon^n}{n!}X^n + ...)\,(x)$$

$$\bar{y} = e^{\varepsilon X} y = (1+ \frac{\varepsilon}{1!}X + \frac{\varepsilon^2}{2!}X^2 + ... + \frac{\varepsilon^n}{n!}X^n + ...)\,(y)$$

yazılır. Burada n=1,2,... için $X^n(x)$ ve $X^n(y)$ bulunması gerekli. Bunun için önce birkaç terimi hesaplayalım.

$$X(x)=x^2,\ X^2(x) = X(X(x))= X(x^2)= 2!\,x^3,\ X^3(x) = X(2!\,x^3)= 3!\,x^4$$

Böylece $X^n(x)=n!\,x^{n+1}$ olmalı. Bunu tümevarımla ispatlayalım.

$$X^{n+1}(x)=X(X^n(x))=X(n!\ x^{n+1})= n!(n+1)\,x^2\ x^n=(n+1)!\,x^{n+2}\,.$$

Benzer şekilde $X^n(y)=n!y\,x^n$ bulunur. Böylece $|x\ \varepsilon| < 1$ için

$$\bar{x}=e^{\varepsilon X}x = x + \varepsilon\ x^2+\ldots+\varepsilon^n\ x^{n+1}+\ldots=x(1 + \varepsilon\, x + \ldots +\varepsilon^n\ x^n+\ldots) =\frac{x}{1-\varepsilon x}$$

$$\bar{y}=e^{\varepsilon X}y = y + \varepsilon\, yx +\ldots+\varepsilon^n y\ x^n+\ldots=y(1 + \varepsilon\, x + \ldots +\varepsilon^n\ x^n+\ldots) =\frac{y}{1-\varepsilon x}$$

aynı grup elde edilir.

(iii) *Kanonik değişkenlerin kullanılmasıyla:* X üreteci için (1.3.12) denklemleri

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

yazılır ve $C=\frac{x}{y}$ birinci integrali sağlanır. Böylece değişmez $u=\frac{x}{y}$ olarak bulunur. (1.3.13) denkleminden X(t)=1. $t=-\frac{1}{x}$ elde edilir. Böylece kanonik koordinatlar

$$u=\frac{x}{y},\quad t=-\frac{1}{x}$$

Sonuç olarak grup dönüşümleri $\bar{u}=u$, $\bar{t} = t +\varepsilon$ ya da

$$-\frac{1}{\bar{x}}=-\frac{1}{x}+\varepsilon\ ,\quad \frac{\bar{x}}{\bar{y}}=\frac{x}{y}$$

olarak yazılır. Son yazılan denklemlerin çözülmesiyle

$$\overline{x}=\frac{x}{1-\varepsilon x}\ ,\ \overline{y}=\frac{y}{1-\varepsilon x}$$

dönüşümleri elde edilir.

1.4. Değişmez Denklemler

Kanonik formun yapısından görülebileceği gibi verilen bir denklem sistemi için bütün çözümlerin elde edilmesi mümkün olamayacaktır. Bunun aşılması için denklem sistemlerinde bu grupların etkisinin nasıl olduğu aşağıdaki tanım ve teoremle kısaca verilmeye çalışılmıştır. Bunun için

$\mathbf{x}\in IR^n$ ve s< n olmak üzere, IR^n de s tane denklemden oluşan

$$F_\sigma(\mathbf{x})=0,\ \ \sigma=1,2,\dots,s \qquad (1.4.1)$$

denklem sistemini düşünelim. (1.4.1) denklemleri sağlayan tüm **x** noktalarında $\|\partial F/\partial x\|$ Jacobiyen matrisinin

$$\text{rank}\left\|\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_i}\right\|=s$$

s ranklı olma şartını koyalım. (1.4.1) denklem sisteminin x çözümlerinin yeri (n-s)-boyutlu bir $M\subset IR^n$ manifoldudur.

1.4.1. Tanım $\overline{\mathbf{x}}$=f(**x**,ε) dönüşümlerin bir G grubunu alalım. (1.4.1) denklemlerinin **x** çözümü için,

$$F_\sigma(\overline{\mathbf{x}})=0,\ \ \sigma=1,2,\dots,s$$

oluyorsa (1.4.1) sistemi, G grubu ile ilgili olarak değişmez yada (1.4.1) denklemleri G grubunu kabul eder denir.

Bunun geometrik olarak anlamı, herhangi bir $x \in M$ noktasından geçen G grubunun yol eğrisi, M üzerinde yatar. Sonuç olarak M manifolduna G için değişmez bir manifold denir.

X üreteçli (1.3.6) dönüşümlerin bir-parametreli bir G Lie grubunu alalım. (1.4.1) sisteminin G grubu altındaki değişmezliğin infinitesimal testi aşağıdaki teorem ile verilir.

1.4.2. Teorem (1.4.1) sisteminin, X infinitesimal üretecine sahip G grubu altında değişmez olması için gerek ve yeterli koşul

$$X F_\sigma(\bar{\mathbf{x}})\Big|_{(1.4.1)} = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, s$$

denkleminin sağlanmasıdır. Buradaki $\Big|_{(1.4.1)}$ sembolünün anlamı, (1.4.1) M çözüm manifoldu üzerinde değerlendirilmiştir.

1.5. Lie Cebiri

1.3. Bölümde gördük ki, her bir parametreli grup bir X infinitesimal üreteci ile belirlenir. Multi-parametreli local grup teorisi bizi Lie Cebirlere götürür. r-parametreli sürekli grupların infinitesimal üreteçleri r-boyutlu bir Lie Cebiri üretir.

Lie Cebiri teorisi modern matematiğin iyi gelişmiş cisimlerinden biridir. Bu kavramın önemli işleyişi özel literatürde bulunabilir.

Şimdi de (1.3.9) operatörlerinin Lie cebirini oluşturalım. Geometrik olarak, (1.3.7) ile verilen infinitesimal dönüşümler, $\mathbf{x}$ noktasındaki $\xi(\mathbf{x}) = (\xi_1(\mathbf{x}), \xi_2(\mathbf{x}), \ldots \xi_n(\mathbf{x}))$ tanjant vektörüyle tanımlanır. Böylece $\xi(\mathbf{x})$ ye (1.3.6) grubunun tanjant vektör cismi denir. Tanjant vektör cismi, genellikle $\xi(\mathbf{x})$ ile gösterilir ve

$$X=\xi(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}$$

birinci mertebe lineer diferansiyel operatör olarak yazılır. Birinci mertebe lineer diferansiyel operatörlerin bir Lie cebirini yani tanjant vektör cisimlerinin vektör uzayını oluşturalım. $\alpha=1,\ldots,r$ olmak üzere, lineer bağımsız tanjant vektör cisimleri

$$X_\alpha=\xi_\alpha(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}$$

olsun. Bu r tane lineer bağımsız vektörle üretilmiş lineer uzay, reel sayılar cismi üzerinde r-boyutlu bir vektör uzayı olur. Bu lineer uzay üzerinde aşağıdaki işlemi tanımlayalım.

$$[X_i,X_j]=X_i\, X_j-X_j\, X_i=(X_i\,(\xi_j)-\,X_j(\xi_i))\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Bu ikili işlem

- $[aX_i+bX_j\;,X_k]=a[X_i,X_k]+b[X_j,X_k]$ (bilinear)

  $[X_i,aX_j+bX_k]=a[X_i,X_j]+b[X_i,X_k]$
- $[X_i,X_j]=-[X_j,X_i]$ (anti simetrik, skew-simetrik)
- $[X_i,[X_j,X_k]]+[X_j,[X_k,X_i]]+[X_k,[X_i,X_j]]=0$ (Jacobi özelliği)

özelliklerini sağlar.

1.5.1.Tanım Bu vektör uzayı yukarıda tanımlı ikili işleme göre kapalı ise r-boyutlu Lie cebiri denir ve L_r ile gösterilir.

[,] operatörü, cebirin çarpım bağıntısıdır ve Lie çarpım veya Lie parantez denir. Lie çarpımı genelde birleşmeli değildir. Eğer herhangi $v,w \in L_r$ için [v,w]=0 ise Lie cebirine değişmeli denir.

1.5.2.Teorem X_α operatörleriyle üretilen r-boyutlu vektör uzayı L_r olmak üzere Lie denklemlerinin çözülmesiyle X_α baz operatörlerinin her birinden elde edilen tek parametreli grup dönüşümlerinin $T_a = T_{a^r} T_{a^{r-1}} ... T_{a^1}$ bileşkesinin oluşturduğu grubun r-parametreli bir local grup olması ancak ve ancak L_r 'nin Lie cebiri olması ile mümkündür.

Şimdi de Lie grup ile Lie cebir arasındaki ilişkiyi verelim. Bir G Lie grubu verilsin. $g \in G$ noktasına ait G'deki tanjant uzay $T_g G$ olmak üzere, G'deki tüm elemanlara ait tanjant uzayların birleşimi olan tanjant demetini (tangent bundle) de TG ile gösterelim. Yani,

$$TG = \bigcup_{g \in G} T_y \, G$$

Burada e birim elemanına ait tanjant uzay ile özellikle ilgilenilir. Buna G Lie Grubunun Lie cebiri denir ve $L_r = T_e G$ ile gösterilir.

2. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LİE SİMETRİLERİ

Bu bölümde Lie tarafından oluşturulan sistematik çözüm prosedürün kısmi diferansiyel denklemlerde nasıl uygulandığını vereceğiz [1], [5], [6], [24], [25], [28]. Verilen kısmi türevli diferansiyel denklem, dönüşümlerin Lie grupları altında değişmez kalıyorsa bu gruba kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Lie simetri grubu ya da Lie simetrisi denir. Bir Lie simetri grubu, tüm bağımlı ve bağımsız değişkenlere bağlı olarak verilen dönüşümler altında diferansiyel denklemi değişmez bırakan bir infinitesimal üreteçle tanımlanır. Bu infinitesimal üreteç, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Lie grubuna karşılık gelen Lie cebirini üreten bir bazının lineer kombinasyonudur. Bu baz kullanılarak bulunan benzerlik dönüşümlerden grup-değişmez çözümleri elde edilir. Bu benzerlik çözümü, aynı boyutlu alt cebirler ile oluşturulan tüm benzerlik çözümleri ailesi kümesindeki başka bir benzerlik çözümüne herhangi bir dönüşüm ile karşılık gelebilir. Böylece bu benzerlik çözümlerinin sınıflandırılması için bu alt cebirlere karşılık gelen alt grupların adjoint temsili kullanılarak alt cebirlerin adjoint temsili bulunur ve buradan benzerlik dönüşümlerin denklik sınıfları oluşturulur [4], [24]. Her bir denklik sınıfından bir üye alınarak elde edilen optimal sistem oluşturulmuş ve bu optimal sistem kullanılarak simetri indirgemeleri yapılmıştır [1], [28].

Simetri gruplarının kullanıldığı herhangi bir uygulamada, ilk olarak verilen denklemin simetrilerini bulmamız gerekir.

2.1. Klasik Simetrilerin Elde Edilmesi

Kısmi diferansiyel denklem sisteminin en genel halini ele alalım. p,q,k,m keyfi pozitif tam sayılar olmak üzere, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ p tane bağımsız değişkeni, $u=(u_1, u_2, ..., u_q)$ q tane bağımlı değişkeni ve $u^{(k)}$, bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre k-ıncı mertebeye kadar tüm kısmi türevlerini göstersin. Buradan da k-ıncı mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi

$$\Delta^i(x, u^{(k)})=0 \quad i=1,2,\ldots,m \qquad (2.1.1)$$

ile verilsin. Buradaki $\Delta=(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_l)$, $\Delta : J^{(k)} \to IR^m$ fonksiyonu düzgün bir fonksiyondur.

Şimdi de 1.1.3. tanımla verilen

$$\overline{x}=\Psi(x,u,\varepsilon) \qquad (2.1.2)$$

$$\overline{u}=\Phi(x,u,\varepsilon) \qquad (2.1..3)$$

şeklindeki ε sürekli parametresine bağlı dönüşümlerin bir-parametreli Lie grubunu alalım. (2.1.1) denklem sistemi bu dönüşümler altında değişmez ise (2.1.2) ve (2.1.3) ile verilen dönüşüm grubuna denklem sisteminin simetri grubu ya da Lie simetrisi denir. Bunun anlamı, dönüşüm grubu, denklem sisteminin $u=\theta(x)$ şeklindeki bir çözümünü, başka bir $v=\Psi(x,\varepsilon)$ çözümüne götürür. $u=\theta(x)$, (2.1.1) sisteminin bir çözümü olsun. Eğer u ve x bağımlı ve bağımsız değişkenlerini v ve $\overline{x}$ ile değiştirirsek (2.1.1) denklemleri

$$\Delta^i(\overline{x}, v^{(k)})=0 \quad i=1,2,\ldots,m \qquad (2.1.4)$$

olur. Buradan $v=\theta(\overline{x})$, (2.1.4) denklem sisteminin çözümüdür. Bu da gösterir ki (2.1.1) ve (2.1.4) denklemleri tek çözüme sahipseler

$$\theta(\overline{x})=\Phi(x,\theta(x),\varepsilon)$$

olur. Bu nedenle θ,

$$\theta(\Psi'(x,\varepsilon))=\Phi(x,\theta,\varepsilon)$$

bir-parametreli fonksiyonel denklemini sağlar.

(2.1.2) ve (2.1.3) denklemlerini $\varepsilon=0$ civarında genişletelim.

$$\overline{x}_i = x_i + \varepsilon\, \xi_i(x,u) + O(\varepsilon^2) \qquad i=1, 2, \ldots, p$$

$$\overline{u}_\alpha = u_\alpha + \varepsilon\, \eta_\alpha(x,u) + O(\varepsilon^2) \qquad \alpha=1, 2, \ldots, q$$

Buradan 1.1.4. Tanımla verilen $\overline{x}_i \cong x_i + \varepsilon\, \xi_i(x,u)$ ve $\overline{u}_\alpha \cong u_\alpha + \varepsilon\, \eta_\alpha(x,u)$ infinitesimal dönüşümlerini elde ederiz. Buradaki ξ_i ve η_α fonksiyonlarına denklemin infinitesimalleri denir. Infinitesimal yaklaşımında, 1.2. Bölümde tanımlanan G Lie grubuna karşılık gelen Lie cebiri göz önüne alalım. Değişmezliğin cebirsel tanımlamasında yukarıdaki infinitesimal üreteçler

$$X=\sum_{i=1}^{p}\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\eta_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u_\alpha} \qquad (2.1.5)$$

vektör cismiyle ilişkilendirilir. Bu vektör cismi, Lie cebirini üreten vektör cisminin bir bazının lineer kombinasyonunu gösterir ve (2.1.1) ile verilen diferansiyel denklem sisteminin Lie simetri üreteci denir.

Buradaki bilinmeyen ξ_i, η_α infinitesimallerini bulmak ve 1.1.5. Bölümde verilen değişmezlik şartı için türevlerin özelliklerini içeren dönüşüm grubunun uzatımı (prolongation) bulmamız gereklidir. Bunun için aşağıdaki tanımları verelim.

2.1.1.Tanım: $J=(j_1,...,j_m)$, $1\le j_m \le p$, $1\le m\le k$ için $u_{\alpha,J,i}=\dfrac{\partial u_{\alpha,J}}{\partial x_i}=\dfrac{\partial^{m+1}u_\alpha}{\partial x_i \partial x_{j_1}...\partial x_{j_m}}$ olmak üzere i-inci toplam türevin genel biçimi aşağıdaki gibi verilir.

$$D_{x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{q}\sum_J u_{\alpha,J,i}\frac{\partial}{\partial u_{\alpha,J}}$$

Buradan da denklem k-ncı mertebeden olduğu için (2.1.5) ile verilen vektör cisminin k-ncı uzatımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

2.1.2. Tanım : (2.1.5) ile verilen vektör cisminin k-ıncı uzatımı

$$pr^{(k)}X = X + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J \eta_{\alpha,J}(x,u^{(k)})\frac{\partial}{\partial u_{\alpha,J}} \qquad (2.1.6)$$

şeklinde hesaplanan vektör cismidir. Buradaki $\eta_{\alpha,J}$ katsayı fonksiyonları,

$$j_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{\alpha,J}= D_{x_i}\,\eta_{\alpha,J-i} - \sum_{m=1}^{p}u_{\alpha,(J-i)+m}D_{x_i}\xi_m$$

$$J=0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{\alpha,J}=\eta_\alpha$$

formülüyle hesaplanır.

Yukarıdaki tanım kullanılarak, (2.1.2) ve (2.1.3) grubu altında (2.1.1) denkleminin değişmezliği için infinitesimal kriteri aşağıdaki teoremle verilir.

2.1.3. Teorem : (2.1.5) ile verilen X vektör cisminin, (2.1.1) ile verilen kısmi diferansiyel denklem sisteminin bir simetri üreteci olması için gerek ve yeter koşul

$$pr^{(k)}X\Delta_{|\Delta=0}=0 \qquad (2.1.7)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

(2.1.1) ile verilen sistemin Lie simetrileri üretecinin bulunması için (2.1.6) formülü kullanılarak vektör alanının uzatımı bulunur. Bu uzatım formülünde denklem yerine konularak (2.1.7) eşitliği sağlanır. Elde edilen eşitliğin Δ=0 manifolduna kısıtlaması alınır. Bu eşitliğinin sol tarafı, bağımlı ve bağımsız değişkenlerin tüm kısmi türevlerinin sıfır polinomu olarak düşünülüp, türevlere ait her bir katsayı sıfıra eşitlenerek belirleyici denklemlere ulaşılır. Elde edilen belirleyici denklemler her zaman doğrusaldır ve denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazladır. Belirleyici denklemler çözülerek bilinmeyen ξ_i, η_α infinitesimalleri bulunur. Böylece, verilen denklemin Lie simetri üreteci hesaplanmış olur.

Belirleyici denklemlerin çözümü sonucu aşağıdaki durumlarla karşılaşılabilir:

(a) Açık çözüm: $\xi_i=\eta^\alpha=0$ Bu durumda (2.1.1) sisteminin simetri grubu yoktur ve yöntem uygulanamaz.

(b) Belirleyici denklemler, r$\in$IN sayıda integrasyon sabitine bağlı olarak çözülür. Bu durumda denklemin simetri cebirinin boyutu r'dir.

(c) Genel çözüm keyfi fonksiyonları içerir. Bu durumda simetri grubu sonsuz boyutludur([1]).

Şimdi de simetri üreteci yukarıdaki prosedür ile hesaplanan denklemin, bu simetri üretecini kullanılarak grup-değişmez çözümlerini elde edelim.

2.2. Simetri İndirgemesi

Simetri indirgemesi kısmi türevli diferansiyel denklemin bir adi diferansiyel denkleme ya da daha az bağımsız değişken içeren bir kısmi türevli diferansiyel denkleme indirgenmesini sağlar.

Benzerlik indirgemesi denklemin değişmezliği ile yakından ilgilidir. Çünkü buradan benzerlik dönüşümlerini elde ederiz. İndirgeme prosedürü denklemin bir benzerlik temsilini oluşturur. Değişken sayısının bir azaltılması orijinal denkleme kıyasla bazı avantajlara sahip bir temsil elde edilmesini sağlar. Bu prosedür lineer yada lineer olmayan denklemin doğasından bağımsız çalışır. Ayrıca denklemin mertebesinden bağımsızdır ve sınır koşullarındaki bilgiye ihtiyaç duymaz. İndirgemenin faydası, analitik ya da nümerik çözümü bulunabilecek basit bir denklem elde edilebilmesidir.

2.2.1.Teorem. $u=\theta(x)$, (2.1.1) denklem sisteminin değişmez çözümü olması için gerek ve yeterli koşul (2.1.4) eşitliğine ek olarak , (2.1.5) denklemin infinitesimal üreteci için $X(u-\theta(x))=0$ iken

$$\xi_i(x,\theta(x))\frac{\partial\theta(x)}{\partial x_i}=\eta_\alpha(x,\theta(x))$$

değişmez yüzey koşulu denen birinci mertebe kısmi türevli diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

Buradan değişmez yüzey koşulunun çözümüne karşılık gelen

$$\frac{dx_1}{\xi_1(x,u)}=\dots=\frac{dx_p}{\xi_p(x,u)}=\frac{du_1}{\eta_1(x,u)}=\dots=\frac{du_q}{\eta_q(x,u)}$$

karakteristik denklemlerinin çözümüyle denklemin

$$\varphi_1(x,u),\ldots,\varphi_{p-1}(x,u),v_1(x,u),\ldots,v_q(x,u)$$

şeklindeki fonksiyonel bağımsız değişmez çözümleri bulunur. Bunlara benzerlik değişkenleri denir ve denkleme uygulanmasıyla v=($v_1(x,u),\ldots,v_q(x,u)$) olmak üzere

$$\Delta^i(\varphi_1(x,u),\varphi_2(x,u),\ldots,\varphi_{p-1}(x,u),v^{(k)})=0$$

bağımsız değişken sayısı bir azaltılmış olur.

Kısmi türevli diferansiyel denklemin kabul ettiği simetri grubunun X üretecinin, bu simetri grubuna karşılık gelen Lie cebirini üreten vektör cisminin bir bazının lineer kombinasyonu olduğundan ve bu üreteç k sayıda keyfi sabit içeren infinitesimaller ile belirlendiğinde, k sabitin seçimi ile Lie cebirinin bir $X_1, X_2,..., X_k$ bazını alalım. Böylece Lie cebirinin bu bazı kullanılarak, s > k olmak üzere, elde edilen s-boyutlu L_s alt cebirleri ile yapılan simetri indirgemeleri oluşturabiliriz.

$L_s=\{X_1, X_2,..., X_s\}$ s-boyutlu alt cebirine karşılık gelen simetri indirgemesinin yapılabilmesi için

$$\varphi_1(x,u),\varphi_2(x,u),\ldots,\varphi_{p+q-s}(x,u)$$

şeklindeki fonksiyonel bağımsız çözümler bulunur.

Eğer $\varphi_j(x,u)$ fonksiyonları arasından $\hat{\varphi}_j(x,u)$ şeklindeki q tanesi bağımlı değişkenlere tersinir bir tasvir tanımlayacak şekilde seçilebiliyorsa, bir başka deyişle

$$J\equiv\left(\frac{\partial(\hat{\varphi}_1,...,\hat{\varphi}_q)}{\partial(u_1,...,u_q)}\right), \qquad \det J\neq 0$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde q tane $\hat{\varphi}_j(x,u)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, bunlar yeni bağımlı değişkenlerin bulunmasında kullanılır. $\hat{\varphi}_j(x,u)$ fonksiyonlarından geri kalan p-s tanesi ise

$$\zeta_1(x,u), \zeta_2(x,u), \ldots, \zeta_{p-s}(x,u)$$

şeklindeki yeni bağımsız değişkenler olarak seçilir.

$$\varphi_j = \psi_j(\zeta_1,...,\zeta_k), \qquad j=1,2,\ldots,q$$

eşitliklerinden u_j bağımlı değişkenleri

$$u_j(x)=v_j(x, \psi_j(\zeta_1,...,\zeta_k)), \quad j=1,2,\ldots,q$$

şeklinde çözülüp ilk denklemde yerine konularak indirgenmiş denklem bulunur. Bu denklem çözülerek L_s alt cebirine karşı gelen tam çözümlere ulaşılmış olur.

Şimdi de bu L_s alt cebirleriyle elde edilen grup-değişmez çözümlerinin bir sınıflamasını optimal sistem bularak oluşturalım.

2.3. Optimal Sistemin Bulunması

2.2. Bölümde oluşturulan simetri üretecinin bir bazının ürettiği r>1 boyutlu L_r Lie cebirinin s-boyutlu alt cebiri için benzerlik çözümlerinin ailesi bulunabilir. Bazı durumlarda böyle alt cebirler sonsuz sayıda olduğundan benzerlik çözümlerinin hepsini hesaplamak imkansızdır. Simetri grubunun bu kümede, dönüşüm uygulanmasıyla aynı kümedeki diğer benzerlik dönüşümlerinden elde edilen benzerlik çözümleri vardır. Bu benzerlik çözümlerinin sınıflandırılması için minimal listeye sahip olmaları faydalı olacaktır. Öyleki, bu elemanların her biri, dönüşüm yolu ile diğer benzerlik çözümlerinin hepsini versin. Böyle bir listeye optimal sistem denir.

[4] ve [24]'de anlatıldığı gibi bu optimal sistemi bulmak için alt cebirleri arasında bir denklik bağıntısı tanımlamak için adjoint temsilini oluşturalım.

2.3.1.Tanım $V \in L_r$, H=exp(εV) bir-parametreli alt grubunu üretiyor ise, $g \in G$ olmak üzere,

$$Ad\, g(V) \equiv d K_g (V), \qquad V \in L_r$$

olarak tanımlanan adjoint temsil $K_g(H) = gHg^{-1}$ bir-parametreli eşlenik (conjugate) alt grubunu üretir.

Lie cebirinin adjoint temsili ile Lie grubunun adjoint temsili arasında ilişki vardır. Bu ilişki aşağıdaki teoremle verilir.

2.3.2. Teorem : L_r Lie cebirinin, s-boyutlu iki Lie alt cebiri L_s, $\tilde{L}_s$ ve bu alt Lie cebirlerine karşılık gelen, G Lie grubunun iki Lie alt grubu H_s, $\tilde{H}_s$ olsun.

H_s ve $\tilde{H}_s$, eşlenik alt gruplarıdır. $\Leftrightarrow$ L_s ve $\tilde{L}_s$ eşlenik alt cebirlerdir.

Yani,

$$\tilde{H}_s = gHg^{-1} \Leftrightarrow \tilde{L}_s = Adg(L_s).$$

Buradan adjoint temsili, infinitesimal üreteçler üzerinden oluşturmak istersek, X, exp(εX) bir-parametreli alt grubunu üretiyor ise biz, Ad(X)'i eşlenik dönüşümlerin bir-parametreli grubuna karşılık gelen Lie cebirin üreteçleri üzerinde vektör cismi olarak alırız. Böylece

$$Ad(X)\big|_V = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} Ad(\exp(\varepsilon X))V \qquad V \in L_r$$

olur. Buradan da $V(0) = V_0$ olmak üzere

$$\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon X))\,V_0 = \varepsilon^{\varepsilon \mathrm{ad}(X)}(V_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!}(\mathrm{ad}(X))^j (V_0)$$

$$= V_0 - \varepsilon[X, V_0] + \frac{\varepsilon^2}{2}[X,[X, V_0]] - \ldots \qquad (2.3.1)$$

elde edilir.

Şimdi de L_r cebirinin, bir-boyutlu alt cebirleri arasında yukarıda tanımlanan adjoint temsili kullanarak bir denklik bağıntısı tanımlayalım.

2.3.3.Tanım : L_r cebirinin $L_{1,1}$ ve $L_{1,2}$ bir boyutlu alt cebirlerine karşı gelen indirgenmiş çözümlerin birbirine denk olması için gerek ve yeter koşul

$$L_{1,2} = \mathrm{Adg}(L_{1,1})$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $g \in G$ bulunmasıdır.

Bu şekilde tanımlanan bir denklik bağıntısıyla denklik sınıfları bulunduktan sonra, bu sınıfların herbirinden bir temsilci alınarak, bu temsilciye karşı gelen değişmez çözümlerin bulunması yeterlidir. Bu denklik sınıflarından birer temsilci alınarak L_r cebirinin optimal sistemi oluşturulur.

Şimdi de buraya kadar anlatılan konunun daha iyi anlaşılması için aşağıdaki örneği verelim.

2.4. Örnek:

$$u_x u_{tt} - 2u_{xt} + u_x u_{xx} = 0 \qquad (2.4.1)$$

kısmi türevli diferansiyel denkleminin Lie simetri analizini yapacağız. Buradan Lie simetrilerinin optimal sistemini oluşturup, bu optimal sisteme göre denklemin simetri indirgemelerini elde edeceğiz.

$$\bar{x} = x + \varepsilon\,\xi_1(x,t,u)$$

$$\bar{t} = t + \varepsilon\,\xi_2(x,t,u)$$

$$\bar{u} = u + \varepsilon\,\eta(x,t,u)$$

infinitesimal dönüşümlerin bir parametreli (ε) Lie grubunu düşünelim.

Yukarıdaki dönüşüm grubuna karşılık gelen vektör cismi

$$\mathbf{X} = \xi_1(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \qquad (2.4.2)$$

olarak yazılabilir. **X** vektör cisminin, (2.4.1) denkleminin simetri üreteci olması için, denklem 2. mertebe olduğundan bu vektör cisminin 2-inci uzatımı gereklidir. Bu uzatım, denklem u_t terimi içermediğinden 2.1.2. Tanımdan

$$pr^{(2)}X = X + \eta_{10}\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_{11}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \eta_{20}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta_{02}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} \qquad (2.4.3)$$

şeklinde elde edilir. Burada 2.1.1. Tanımdan D_x, D_t toplam türevleri

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t} + \ldots$$

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + \ldots$$

olmak üzere, (2.4.3)'deki

$$\eta_{10} = D_x(\eta) - u_x D_x(\xi_1) - u_t D_x(\xi_2)$$

$$\eta_{11} = D_x(\eta_{10}) - u_{xx} D_t(\xi_1) - u_{xt} D_t(\xi_2)$$

$$\eta_{20} = D_x(\eta_{10}) - u_{xx} D_x(\xi_1) - u_{tx} D_x(\xi_2)$$

$$\eta_{02} = D_t(\eta_{01}) - u_{xt} D_t(\xi_1) - u_{tt} D_t(\xi_2)$$

eşitlikleri,

$$\eta_{10} = \eta_x + u_x\, \eta_u - u_x\, (\xi_1)_x - (u_x)^2\, (\xi_1)_u - u_t\, (\xi_2)_x - u_x\, u_t\, (\xi_2)_u \quad (2.4.4\text{-a})$$

$$\begin{aligned}\eta_{11} =& \eta_{xt} + u_t\, \eta_{xu} - u_x\, \eta_{tu} + \eta_{xt}\, \eta_u - u_x\, u_t\, \eta_{uu} - u_{xt}((\xi_1)_x + (\xi_2)_t) - \\ & u_x\, (\xi_1)_{xt} - u_{xx}\, (\xi_1)_t - u_x\, u_t((\xi_1)_{xu} + (\xi_2)_{tu}) - (u_x)^2\, (\xi_1)_{tu} - \\ & (2u_x\, u_{xt} + u_t\, u_{xx})(\xi_1)_u - (u_x)^2\, u_t\, (\xi_1)_{uu} - u_t\, (\xi_2)_{xt} - u_{tt}\, (\xi_2)_x \qquad (2.4.4\text{-b}) \\ & (u_t)^2\, (\xi_2)_{xu} - (u_t\, u_{xt} + u_x\, u_{tt})(\xi_2)_u - u_x\, (u_t)^2\, (\xi_2)_{uu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{20} =& \eta_{xx} + 2u_x\, \eta_{xu} + u_{xx}\, \eta_u + (u_x)^2\, \eta_{uu} - 2u_{xx}\, (\xi_1)_x - u_x\, (\xi_1)_{xx} - \\ & 2(u_x)^2\, (\xi_1)_{xu} - 3u_x\, u_{xx}\, (\xi_1)_u - (u_x)^3\, (\xi_1)_{uu} - 2u_{xt}\, (\xi_2)_x \qquad (2.4.4\text{-c}) \\ & - u_t\, (\xi_2)_{xx} - 2u_x\, u_t\, (\xi_2)_{xu} - (u_t\, u_{xx} + 2u_x\, u_{xt})(\xi_2)_u - (u_x)^2\, u_t\, (\xi_2)_{uu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{02} =& \eta_{tt} + 2u_t\, \eta_{tu} + u_{tt}\, \eta_u + (u_t)^2\, \eta_{uu} - 2u_{tt}\, (\xi_2)_t - u_t\, (\xi_1)_{xx} - \\ & 2(u_t)^2\, (\xi_1)_{tu} - 3u_t\, u_{tt}\, (\xi_2)_u - (u_t)^3\, (\xi_2)_{uu} - 2u_{xt}\, (\xi_1)_t - u_x\, (\xi_1)_{tt} \qquad (2.4.4\text{-d}) \\ & -2u_x\, u_t\, (\xi_1)_{tu} - (u_x\, u_{tt} + 2u_t\, u_{xt})(\xi_1)_u - (u_t)^2\, u_x\, (\xi_1)_{uu}\end{aligned}$$

olur.

Denklemin 2.1.3. Teoremdeki simetri koşulu için, $pr^{(2)}X$ ’in (2.4.1) denklemine uygulanmasıyla,

$$u_x(\eta_{02} + \eta_{20}) + \eta_{10}\, u_{tt} - 2\eta_{11} + \eta_{10}\, u_{xx} = 0$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. 2.4.4 eşitlikleri kullanılarak denklem manifoldu üzerindeki indirgemesi alınarak (2.4.1) denkleminin simetri koşulu için

$c_1 = -2(\xi_1)_u$

$c_2 = -(\xi_1)_x - 2(\xi_2)_t + 2(\xi_2)_u + 2\eta_u$

$c_3 = -4(\xi_2)_u$

$c_4 = -(\xi_2)_x$

$c_5 = 2(\xi_2)_x + \eta_x$

$d_1 = -2(\xi_2)_u$

$d_2 = -2(\xi_1)_t + 4(\xi_1)_u - 2(\xi_2)_x$

$d_3 = -2(\xi_1)_u$

$d_4 = 4(\xi_2)_u$

$d_5 = 2(\xi_1)_x + 2(\xi_2)_t - 2\eta_u$

$e_1 = -4(\xi_1)_u$

$e_2 = -3(\xi_1)_x + 2\eta_u$

$e_3 = -2(\xi_2)_u$

$e_4 = 2(\xi_1)_u - (\xi_2)_x$

$e_5 = 2(\xi_1)_t + \eta_x$

$f_1 = -(\xi_1)_{uu}$

$f_2 = -2(\xi_1)_{xu} + \eta_{uu}$

$f_3 = -(\xi_2)_{uu}$

$f_4 = -(\xi_2)_{uu}$

$f_5 = -(\xi_1)_{uu}$

$f_6 = -(\xi_1)_{tu} + 2(\xi_1)_{uu} - 2(\xi_2)_{xu}$

$f_7 = -(\xi_1)_{tt} + 2(\xi_1)_{tu} - (\xi_1)_{xx} + 2\eta_{xu}$

$f_8 = -(\xi_2)_{tu} + \eta_{uu} + 2(\xi_2)_{uu}$

$f_9 = 2(\xi_1)_{xt} - (\xi_2)_{tt} + 2(\xi_2)_{tu} - 2(\xi_2)_{xx} + 2\eta_{tu} - 2\eta_{uu}$

$f_{10} = 2(\xi_2)_{xu}$

$f_{11} = 2(\xi_1)_{xt} + \eta_{tt} - 2\eta_{tu} + \eta_{xx}$

$f_{12} = 2(\xi_2)_{xt} - 2\eta_{xu}$

$f_{13} = -(\eta)_{xt}$

katsayılar olmak üzere,

$$c_1 (u_x)^2 u_{tt} + c_2 u_x u_t u_{tt} + c_3 u_x u_{tt} + c_4 u_t u_{tt} + c_5 u_{tt} + d_1 (u_x)^2 u_{xt} + d_2 u_x u_{xt} + d_3 u_x u_t u_{xt} + d_4 u_t u_{xt} + d_5 u_{xt} + e_1 (u_x)^2 u_{xx} + e_2 u_x u_{xx} + e_3 u_x u_t u_{xx} + e_4 u_t u_{xx} + e_5 u_{xx} + f_1 (u_x)^4 + f_2 (u_x)^3 + f_3 (u_x)^3 u_t + f_4 (u_t)^3 u_x + f_5 (u_t)^2 (u_x)^2 + f_6 u_t (u_x)^2 + f_7 (u_x)^2 + f_8 (u_t)^2 u_x + f_9 u_x u_t + f_{10} (u_t)^2 + f_{11} u_x + f_{12} u_t + f_{13} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu elde edilen eşitliğin her iki yanı u'nun x ve t ye göre türevlerinin bir polinomu olarak alınır ve i=1,…, 5, j=1,…,8 olmak üzere c_i, d_i, e_i, f_j katsayıları sıfıra eşitlenerek belirleyici denklemlere ulaşılır. (determining equations)

$c_1, c_3, c_4, c_5, d_2, f_7, f_8$ katsayılarından

$$(\xi_1)_u = (\xi_2)_u = (\xi_2)_x = (\xi_1)_t = (\xi_1)_{xx} = \eta_x = \eta_{uu} = 0$$

belirleyici denklemleri elde edilir. Böylece bilinmeyen ξ_1, ξ_2, η fonksiyonları yapısı

$$\xi_1 = \xi_1(x)$$

$$\xi_2 = \xi_2(t)$$

$$\eta = \eta(t, u)$$

olarak belirlenir. $c_2, d_5, e_2, f_9, f_{11}$ katsayılarından da

$$-(\xi_1)_x + (\xi_2)_t = 0$$

$$-(\xi_2)_{tt} + 2\eta_{tu} = 0$$

$$\eta_{tt} - 2\eta_{tu} = 0$$

$$-(\xi_2)_t + \eta_u = 0$$

belirleyici denklemlerine ulaşılır. Yukarıdaki ξ_1, ξ_2, η fonksiyonları bu denklemlerde yerine konulursa,

$$(\xi_2)_t = \eta_u = (\xi_1)_x, \ \eta_{tu} = \eta_{tt} = (\xi_2)_{tt} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin integrasyonu ile belirleyici denklemler çözülmüş olur. Belirleyici denklemlerin çözülmesiyle denklemin infinitesimal üretecine ulaşılır. Denklemin infinitesimal üretecinin

$$\xi_1 = k_3 + k_5 x$$

$$\xi_2 = k_4 + k_5 t$$

$$\eta = k_1 + k_2 t + k_5 u$$

olarak bulunmasıyla, denklemin simetri üreteci

$$\mathbf{X} = (k_3 + k_5 x)\frac{\partial}{\partial x} + (k_4 + k_5 t)\frac{\partial}{\partial t} + (k_1 + k_2 t + k_5 u)\frac{\partial}{\partial u}$$

olur. Bu üreteç için

$k_1 = 1 \qquad X_1 = \frac{\partial}{\partial u}$

$k_2 = 1 \qquad X_2 = t\frac{\partial}{\partial u}$

$k_3 = 1 \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial x}$

$k_4 = 1 \qquad X_4 = \frac{\partial}{\partial t}$

$k_5 = 1 \qquad X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}$

vektör cisimleri bir taban olur. 1.2. Bölümden Lie parantez tablosu:

[,]	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	$-X_1$
X_2	0	0	0	X_1	0
X_3	0	0	0	0	$-X_3$
X_4	0	$-X_1$	0	0	$-X_4$
X_5	X_1	0	X_3	X_4	0

Buradan bu taban $L_5 = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$ Lie cebirini üretir. Her bir üretece karşılık gelen grup [16]

$$G_1 : (x,t,u) \to (x,\ t,\ u+\varepsilon_1)$$

$$G_2 : (x,t,u) \to (x,\ t,\ u\text{-}t\varepsilon_2)$$

$$G_3 : (x,t,u) \to (x+\varepsilon_3,\ t,\ u)$$

$$G_4 : (x,t,u) \to (x,\ t+\varepsilon_4,\ u)$$

$$G_5 : (x,t,u) \to (e^{\varepsilon_5} x,\ e^{\varepsilon_5} t,\ e^{\varepsilon_5} u)$$

olur.

(2.4.1) denklemin kabul ettiği simetri üretecinin en genel hali

$$\mathbf{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5$$

olsun. Bu denklemin optimal sitemini bulmak için 2.3.1. eşitliği ve Lie parantez tablosunu kullanarak adjoint temsil tablosunu oluşturalım.

Ad(exp(ε*)*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	X_1	X_2	X_3	X_4	$X_5 + \varepsilon_1 X_1$
X_2	X_1	X_2	X_3	$X_4 - \varepsilon_2 X_1$	X_5
X_3	X_1	X_2	X_3	X_4	$X_5 + \varepsilon_3 X_3$
X_4	X_1	$X_2 + \varepsilon_4 X_1$	X_3	X_4	$X_5 + \varepsilon_4 X_4$
X_5	$e^{-\varepsilon_5} X_1$	X_2	$e^{-\varepsilon_5} X_3$	$e^{-\varepsilon_5} X_4$	X_5

Bu adjoint temsil tablosunu kullanarak

$$Ad(e^{\varepsilon_1 X_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Ad(e^{\varepsilon_2 X_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ad(e^{\varepsilon_3 X_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Ad(e^{\varepsilon_4 X_4}) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ad(e^{\varepsilon_5 X_5})=\begin{pmatrix} e^{-\varepsilon_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varepsilon_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\varepsilon_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Grubun herhangi g elemanın adjoint temsili yukarıdaki matrislerin çarpımı ile verilir [4].

$$Ad_g=\begin{pmatrix} e^{-\varepsilon_5} & \varepsilon_4 e^{-\varepsilon_5} & 0 & -\varepsilon_2 e^{-\varepsilon_5} & \varepsilon_1 e^{-\varepsilon_5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varepsilon_5} & 0 & \varepsilon_3 e^{-\varepsilon_5} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\varepsilon_5} & \varepsilon_4 e^{-\varepsilon_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Optimal sistemi oluşturmak için aşağıdaki hesaplamalarla analiz yapalım.

$$\frac{1}{a} Ad_g \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-\varepsilon_5} + \alpha_2 \varepsilon_4 e^{-\varepsilon_5} - \alpha_4 \varepsilon_2 e^{-\varepsilon_5} + \alpha_5 \varepsilon_1 e^{-\varepsilon_5} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 e^{-\varepsilon_5} + \alpha_5 \varepsilon_3 e^{-\varepsilon_5} \\ \alpha_4 e^{-\varepsilon_5} + \alpha_5 \varepsilon_4 e^{-\varepsilon_5} \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix} \qquad (2.4.5)$$

ε_i leri belirleyerek eşitliğin sağ tarafını basitleştirmeye çalışacağız. α_5 için söz konusu olan durumları inceleyelim.

1. $\alpha_5 \neq 0$: (α_5 =a, $\beta_5 = 1$)

Dördüncü sütundan başlayalım ve sıfıra eşit olması için ε_4 ün çözümünü bulalım. Buradan

$$\varepsilon_4 = -\frac{\alpha_4}{\alpha_5}$$

bulunur. ε_4 ün bu seçiminden $\beta_4 = 0$ elde edilir. Aynı şekilde üçüncü sütun için ε_3 ün

$$\varepsilon_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_5}$$

seçimiyle de $\beta_3 = 0$ olur.

Ayrıca birinci sütunda ε_4 ü yerine koyarsak, birinci sütun

$$\alpha_1 e^{-\varepsilon_5} - \alpha_2 \frac{\alpha_4}{\alpha_5} e^{-\varepsilon_5} - \alpha_4 \varepsilon_2 e^{-\varepsilon_5} + \alpha_5 \varepsilon_1 e^{-\varepsilon_5}$$

olarak bulunur. Burada $\alpha_2 \neq 0$ ise

$$\varepsilon_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_5} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_5}$$

seçilerek β_1 de sıfır olur. Böylece (3) eşitliğindeki β vektörü

$$\beta = (0, \frac{\alpha_2}{a}, 0, 0, 1)$$

olarak bulunur. $\alpha_2 = 0$ ise birinci sütunda

$$\varepsilon_1 = \frac{-\alpha_1 + \alpha_4 \varepsilon_2}{\alpha_5}$$

seçilerek β_1 sıfır olur. Böylece β vektörü

$$\beta=(0,0,0,0,1)$$

olarak bulunur.

Buradan $\lambda\in IR$ olmak üzere

$$\lambda X_2 + X_5$$

üreteci elde edilir.

2. $\alpha_5=0$

(2.4.5) eşitliği

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-\varepsilon_5} + \alpha_2\varepsilon_4 e^{-\varepsilon_5} - \alpha_4\varepsilon_2 e^{-\varepsilon_5} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 e^{-\varepsilon_5} \\ \alpha_4 e^{-\varepsilon_5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix}$$

halini alır. Burada α_2 nin durumunu inceleyelim.

(i) $\alpha_2\neq 0$: ($\alpha_2=a$, $\beta_2=1$)

Birinci sütun için

$$\varepsilon_4 = \frac{-\alpha_1 + \alpha_4\varepsilon_2}{\alpha_2}$$

seçilerek $\beta_1 = 0$ elde edilir. Üçüncü ve dördüncü sütunu sadeleştirmek için

(a) $\alpha_4\neq 0$, $\alpha_3\neq 0$ ise

$$\frac{\alpha_4 e^{-\varepsilon_5}}{a} = \beta_4, \qquad \frac{\alpha_3 e^{-\varepsilon_5}}{a} = \beta_3$$

eşitliklerinden $\varepsilon_5 = \ln\frac{|\alpha_4|}{a} = \ln\frac{|\alpha_3|}{a}$ seçilmesiyle $|\alpha_4| = |\alpha_3|$ elde edilir.

Buradan da β vektörü,

$$\beta=(0,1,\pm1,\pm1,0)$$

olur. $\delta^+=\{-1,1\}$olmak üzere

$$X_2+\delta^+\ X_3+\delta^+\ X_4$$

üreteci elde edilir.

(b) $\alpha_3=0$:

(2.4.5) eşitliği

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-\varepsilon_5}+\alpha_2\varepsilon_4 e^{-\varepsilon_5}-\alpha_4\varepsilon_2 e^{-\varepsilon_5} \\ \alpha_2 \\ 0 \\ \alpha_4 e^{-\varepsilon_5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix}$$

olur. Dördüncü sütundaki

$$\frac{\alpha_4 e^{-\varepsilon_5}}{a} = \beta_4$$

eşitliği için, $\varepsilon_5 = \ln\frac{|\alpha_4|}{a}$ seçilerek,

$$\beta_4 = \begin{cases} 1 & \alpha_4 > 0 \\ -1 & \alpha_4 < 0 \\ 0 & \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

olur. Buradan $\delta=\{-1,0,1\}$olmak üzere

$$X_2+\delta X_4$$

üreteci elde edilir.

(c) α_4 =0:

(3) eşitliği

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-\varepsilon_5} + \alpha_2\varepsilon_4 e^{-\varepsilon_5} \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 e^{-\varepsilon_5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix}$$

olur. Üçüncü sütundaki

$$\frac{\alpha_3 e^{-\varepsilon_5}}{a} = \beta_3$$

eşitliği için, $\varepsilon_5 = \ln\frac{|\alpha_3|}{a}$ seçilerek,

$$\beta_3 = \begin{cases} 1 & \alpha_3 > 0 \\ -1 & \alpha_3 < 0 \\ 0 & \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

olur. Buradan δ={-1,0,1}olmak üzere

$$X_2 + \delta X_3$$

üreteci elde edilir.

(ii) α_2 =0:

(2.4.5) eşitliği

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-\varepsilon_5} - \alpha_4\varepsilon_2 e^{-\varepsilon_5} \\ 0 \\ \alpha_3 e^{-\varepsilon_5} \\ \alpha_4 e^{-\varepsilon_5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix}$$

halini alır. Burada α_4 için söz konusu olan birkaç durumu inceleyelim.

(a) $\alpha_4 \neq 0$ ise:

Birinci sütunda

$$\varepsilon_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_4}$$

seçilerek $\beta_1 = 0$ elde edilir. Üçüncü sütundaki

$$\frac{\alpha_3 e^{-\varepsilon_5}}{a} = \beta_3$$

eşitliği için, $\varepsilon_5 = \ln \frac{|\alpha_3|}{a}$ seçilerek,

$$\beta_3 = \begin{cases} 1 & \alpha_3 > 0 \\ -1 & \alpha_3 < 0 \\ 0 & \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

olur. $\delta^+ = \{-1,1\}$ ve $\delta = \{-1,0,1\}$ olmak üzere

$$\delta X_3 + \delta^+ X_4$$

üreteci elde edilir.

(b) $\alpha_4 = 0$:

(2.4.5) eşitliği

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-\varepsilon_5} \\ 0 \\ \alpha_3 e^{-\varepsilon_5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix}$$

halini alır.

Birinci sütundaki

$$\frac{\alpha_1 e^{-\varepsilon_5}}{a} = \beta_1$$

eşitliği için, $\varepsilon_5 = \ln\frac{|\alpha_1|}{a}$ seçilerek,

$$\beta_1 = \begin{cases} 1 & \alpha_1 > 0 \\ -1 & \alpha_1 < 0 \\ 0 & \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

olur. Üçüncü sütundaki

$$\frac{\alpha_3 e^{-\varepsilon_5}}{a} = \beta_3$$

eşitliği için, $\varepsilon_5 = \ln\frac{|\alpha_3|}{a}$ seçilerek,

$$\beta_3 = \begin{cases} 1 & \alpha_3 > 0 \\ -1 & \alpha_3 < 0 \\ 0 & \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

olur. δ={-1,0,1}olmak üzere

$$\delta X_1 + \delta X_3$$

üreteci elde edilir.

Sonuç olarak optimal sistem, $\lambda \in IR, \delta^+$ ={-1,1},δ={-1,0,1}olmak üzere

$$\lambda X_2 + X_5\ ,\ X_2 + \delta^+ X_3 + \delta^+ X_4,\ X_2 + \delta X_3,\ X_2 + \delta X_4,\ \delta X_3 + \delta^+ X_4,$$

$$\delta X_1 + \delta X_3$$

olarak bulunur. Buradan da bu optimal sistemi kullanarak 2.2. Bölümde verilen simetri indirgemelerini yapalım.

1. $L^{\lambda}_{1,1}$ cebiri kullanılarak yapılan indirgeme:

$(\lambda X_2 + X_5)W(x,t,u)=0$ denkleminden $\lambda X_2 + X_5$ vektör cisminin değişmezleri

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{\lambda t + u}$$

karakteristik denklemi çözülerek $c_1 = \frac{x}{t}, c_2 = \frac{u + \lambda t}{x}$ bulunur. Karşı gelen benzerlik değişkenleri $z = \frac{x}{t}$, $u=v(z)x-\lambda t$ şeklinde elde edilir. Buradan bu benzerlik değişkenlerine göre yapılan indirgeme

$$zv''(-2z + (1 + z^2)(-v + zv')) = 0$$

olarak bulunur.

2. $L^{\delta^+}_{1,2}$ cebiri kullanılarak yapılan indirgeme:

$(X_2 + \delta^+ X_3 + \delta^+ X_4)W(x,t,u)=0$ denklemi çözülerek elde edilen benzerlik değişkenleri $z = x-t$, $u=\frac{2xt - x^2 + 2v(x-t)}{2\delta^+}$ şeklinde elde edilir. Buradan bu benzerlik değişkenlerine göre yapılan indirgeme

$$\delta^+ (v' + 2(z + \delta^+ - \delta^+ v')v'') = z + 2\delta^+$$

olarak bulunur.

3. $L^{\delta}_{1,3}$ cebiri kullanılarak yapılan indirgeme:

$(X_2 + \delta X_3)W(x,t,u)=0$ denklemi çözülerek elde edilen benzerlik değişkenleri $z=t$, $u=v(z)+\frac{tx}{\delta}$ şeklinde elde edilir. Buradan bu benzerlik değişkenlerine göre yapılan indirgeme

$$zv'' - 2 = 0$$

olarak bulunur.

4. $L^{\delta}_{1,4}$ cebiri kullanılarak yapılan indirgeme:

$(X_2+\delta X_4)W(x,t,u)=0$ denklemi çözülerek elde edilen benzerlik değişkenleri z =x, $u=\dfrac{2v(x)+t^2}{2\delta}$ şeklinde elde edilir. Buradan bu benzerlik değişkenlerine göre yapılan indirgeme

$$v'(v''-1)=0$$

olarak bulunur.

5. $L^{\delta}_{1,5}$ cebiri kullanılarak yapılan indirgeme:

$(\delta X_3+\delta^{+} X_4)W(x,t,u)=0$ denklemi çözülerek elde edilen benzerlik değişkenleri z=x-t, u=v(z) şeklinde elde edilir. Buradan bu benzerlik değişkenlerine göre yapılan indirgeme

$$v''(v'-1)=0$$

olarak bulunur.

6. $L^{\delta}_{1,6}$ cebiri kullanılarak yapılan indirgeme:

$(\delta X_1+\delta X_3)W(x,t,u)=0$ denklemi çözülerek elde edilen benzerlik değişkenleri z=t, u=v(z)+x olur. Buradan bu benzerlik değişkenlerine göre yapılan indirgeme

$$v''=0$$

olarak bulunur. Buradan da u=At +B+x elde edilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ BOUSSİNESQ DENKLEMİNİN LIE SİMETRİ ANALİZİ

3.1. Giriş:

Bu bölümde birkaç tipi bulunan Genelleştirilmiş Boussinesq Denklemlerin Lie simetri analizi yapılmıştır.

p,q ve r birer sabit olmak üzere, Genelleştirilmiş Boussinesq Denklemi (Generalised Boussinesq Equation – GBQ)

$$u_{xxxx} + p\,u_t u_{xx} + q\,u_x u_{xt} + r\,u_x^2 u_{xx} + u_{tt} = 0 \qquad (3.1.1)$$

şeklinde verilmektedir.

(3.1) denkleminin birinci özel durumu, q=0 ve r=$-\frac{1}{2}p^2$ alınarak elde edilen Değitirilmiş Boussinesq Denklemidir. (Modified Boussinesq Equation–MBQ)

$$u_{xxxx} + p\,u_t u_{xx} - \frac{1}{2}p^2 u_x^2 u_{xx} + u_{tt} = 0 \qquad (3.1.2)$$

Bu denklemin klasik simetri indirgemeleri ilk olarak Schwarz [30] tarafından ele alındı. Ayrıca Clarkson tarafından yeni bir benzerlik çözümü elde edildi [10], [12].

(3.1) denkleminin ikinci özel durumu, q=2p ve r=$\frac{3}{2}p^2$ alınarak elde edilen Ayırıcı Su Dalga Denklemidir. (Dispersive Water Wave Equation – DWW)

$$u_{xxxx} + p\,u_t u_{xx} + 2p\,u_x u_{xt} + \frac{3}{2}p^2\,u_x^2 u_{xx} + u_{tt} = 0 \qquad (3.1.3)$$

DWW denklemi, a keyfi bir sabit olmak üzere, Klasik Boussinesq Denklemi (Clasical Boussinesq Equation-CBQ) olarak bilinen ve sığ sulardaki yüzey suyunun yayılmasının tanımlanmasıyla meydana gelen

$$\eta_t + \{(1+a\eta)v\}_x - v_{xxx} = 0 \qquad (3.1.4)$$

$$v_t + \eta_x + avv_x = 0$$

denkleminden kolayca türetilebilir. DWW denkleminin klasik simetri indirgemeleri ilk olarak Kawamoto [19] and Lou [21] tarafından ele alındı. Paquin and Winternitz [27] tarafından 2+1-boyutta genelleştirilmiş denklemin iki farklı simetri indirgemesi elde edildi. Ayrıca X. Ji, J.E. Zhang, C. Chen ve Y. Li [18] de Wu-Zhang denklemi olarak bilinen 2+1 boyutlu lineer olmayan DWW denkleminin simetri analizini vererek, bazı yeni tam çözümler elde ettiler.

Genelleştirilmiş Boussinesq Denkleminin farklı bir tipi olarak ele alınan ve f(u)=$\frac{1}{2}u^2$ için Klasik Boussinesq Denklemini veren

$$u_{xxxx} + [f(u)]_{xx} = u_{tt} \qquad (3.1.5)$$

denkleminin klasik simetri indirgemeleri Clarkson and Priestly [11] tarafından ele alındı.

Yine Genelleştirilmiş Boussinesq Denkleminin farklı bir tipi olarak ele alınan ve f(u)=$\frac{1}{2}u^2 + u$ için Klasik Boussinesq Denklemini veren

$$u_{tt} - u_{xx} + [f(u) + u_{xx}]_{xx} = 0 \qquad (3.1.6)$$

denkleminin klasik simetrileri f fonksiyonunun durumları için Gandarias and Bruzon [15] tarafından incelendi.

3.2. Lie Nokta Simetrileri

(3.1.1) denklemine klasik Lie grup metodunu uygulayarak simetri analizini yapalım. ε grup parametresi olmak üzere, (x,t,u)-uzayında

$$x \to x + \varepsilon\ \xi_1(x,t,u) + O(\varepsilon^2)$$

$$t \to t + \varepsilon\ \xi_2(x,t,u) + O(\varepsilon^2)$$

$$u \to u + \varepsilon\ \eta(x,t,u) + O(\varepsilon^2)$$

ile verilen infinitesimal dönüşümlerin bir-parametreli Lie grubunu ele alalım. Buradan denklemin simetri üreteci

$$X = \xi_1(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

olur. Bu dönüşümler (3.1.1) denklemini değişmez bırakmalı, 2.1. Bölümdeki değişmezlik şartından belirleyici denklemlerin çözülmesi ile $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ keyfi sabitler olmak üzere, denklemin aşağıdaki infinitesimalleri elde edilir.

p, q, r keyfi sabitler

$$\begin{aligned} \xi_1 &= k_4 x + k_3 \\ \xi_2 &= 2k_4 t + k_2 \qquad (3.2.1) \\ \eta &= k_1 \end{aligned}$$

p=0, q, r keyfi sabitler

$$\xi_1 = k_5 x + k_4$$

$$\xi_2 = 2k_5 t + k_3 \qquad (3.2.2)$$

$$\eta = k_2 t + k_1$$

$p \neq 0$, $r = \frac{1}{4} q(p+q)$

$$\xi_1 = k_5 x + \frac{1}{2} k_3 qt + k_4$$

$$\xi_2 = 2k_5 t + k_1 \qquad (3.3.3)$$

$$\eta = k_3 x + k_2$$

$p=0$, $r = \frac{1}{4} q^2$

$$\xi_1 = k_6 x + \frac{1}{2} k_4 qt + k_5$$

$$\xi_2 = 2 k_6 t + k_2 \qquad (3.3.4)$$

$$\eta = k_4 x + k_1 t + k_3$$

$p=q$, $r = \frac{1}{2} q^2$

$$\xi_1 = k_6 qtx + k_3 x + \frac{1}{2} k_5 qt + k_2$$

$$\xi_2 = k_6 q t^2 + 2 k_3 t + k_1 \qquad (3.3.5)$$

$$\eta = k_6 x^2 + k_5 x + k_4$$

Benzerlik dönüşümleri de

$$\frac{dx}{\xi_1} = \frac{dt}{\xi_2} = \frac{du}{\eta}$$

karakteristik denklemlerinin çözülmesiyle elde edilir.

Clarkson and Ludlow [9], (3.1.1) denkleminin bazı benzerlik dönüşümlerini direkt metodla elde etti ve bu benzerlik dönüşümlerinin Lie grup metodu kullanılarak da elde edilebileceğini bir örnekle göstererek söyledi.

Buradaki problem, direkt metodla bulunan benzerlik dönüşümlerine karşılık gelen grubun, denklemi değişmez bırakıp bırakmayacağı hakkında bir şey söylenemeyeceğidir. Ayrıca bu tür başka benzerlik dönüşümü elde edilebilir mi? sorusunun cevabı da direkt metodlarla verilemez. Çünkü direkt metodla elde edilen benzerlik dönüşümleri arasındaki ilişki belirlenemez. Bu çalışmada, (3.1.1) denkleminin (3.2.1) durumu için direkt metodla elde edilen benzerlik dönüşümleriyle yapılan indirgemenin, gruba karşılık gelen Lie cebirin bir-boyutlu alt cebirlerinin optimal sistemi ile elde edilen indirgemelere karşılık geldiği gösterilmiştir. Böylece elde edilen indirgenmiş yapıları o grup altında değişmez olduğu garantilenmiştir. Buradan grubun Lie cebirinin bir-boyutlu alt cebiriyle yapılan indirgemelerin tümü optimal sistemin elde edilmesiyle bulunmuş olur. Ayrıca grubun Lie cebirin iki-boyutlu alt cebirleri de elde edilebileceğinden, bu iki-boyutlu alt cebirler kullanılarak indirgemeler yapmak da mümkündür.

(3.1.1) denkleminin, p, q, r keyfi sabitler olmak üzere, bu açıdan incelenmesi aşağıda örnek olarak verilmiştir.

3.2.1. Örnek: (3.1.1) denklemi için, p, q, r keyfi sabitler olmak üzere, yukarıda verilen

$$\xi_1 = k_4 x + k_3$$

$$\xi_2 = 2k_4 t + k_2$$

$$\eta = k_1$$

infinitesimallerini alalım. Böylece denklemin simetri üreteci

$$X = (k_4 x + k_3)\frac{\partial}{\partial x} + (2k_4 t + k_2)\frac{\partial}{\partial t} + (k_1)\frac{\partial}{\partial u}$$

olur. Bu üreteç için bir taban

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}$$

olarak bulunur. Her bir üretece karşılık gelen tek-parametreli gruplar [16]

$$G_1 : (x,t,u) \to (x, t, u+\varepsilon_1)$$

$$G_2 : (x,t,u) \to (x, t+\varepsilon_2, u)$$

$$G_3 : (x,t,u) \to (x+\varepsilon_3, t, u)$$

$$G_4 : (x,t,u) \to (e^{\varepsilon_4} x, e^{2\varepsilon_4} t, u)$$

olur. 1.5. Bölümden Lie parantez tablosu:

[,]	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0	0	0
X_2	0	0	0	$-2X_2$
X_3	0	0	0	$-X_3$
X_4	0	$2X_2$	X_3	0

Buradan bu taban $L_4 = \langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$ Lie cebirini üretir.

(3.1.1) denklemin kabul ettiği simetri üretecin en genel hali

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4$$

şeklinde olsun. Bu denklemin optimal sistemini bulmak için 2.3.1. Tanımı ve Lie parantez tablosunu kullanarak adjoint temsil tablosunu oluşturalım.

Ad(exp(ε*)*	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	X_1	X_2	X_3	X_4
X_2	X_1	X_2	X_3	$X_4+2\varepsilon_2 X_2$
X_3	X_1	X_2	X_3	$X_4+\varepsilon_3 X_3$
X_4	X_1	$e^{-2\varepsilon_4} X_2$	$e^{-\varepsilon_4} X_3$	X_4

Bu adjoint temsil tablosunu kullanarak

$$\mathrm{Ad}(e^{\varepsilon_1 X_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ad}(e^{\varepsilon_2 X_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2\varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ad}(e^{\varepsilon_3 X_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ad}(e^{\varepsilon_4 X_4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\varepsilon_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varepsilon_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Grubun herhangi g elemanın adjoint temsili yukarıdaki matrislerin çarpımı ile elde edilir [4].

$$Ad_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\varepsilon_4} & 0 & 2\varepsilon_2 \\ 0 & 0 & e^{-\varepsilon_4} & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aşağıdaki hesaplamalarla analiz yapalım.

$$\frac{1}{a} Ad_g \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{a} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 e^{-2\varepsilon_4} + 2\alpha_4 \varepsilon_2 \\ \alpha_3 e^{-\varepsilon_4} + \alpha_4 \varepsilon_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \tag{3.2.6}$$

ε_i leri belirleyerek eşitliğin sağ tarafını basitleştirmeye çalışacağız. α_4 için söz konusu olan durumları inceleyelim.

1. $\alpha_4 \neq 0$: ($\alpha_4 = a$, $\beta_4 = 1$)

Üçüncü ve ikinci sütun için

$$\varepsilon_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_4} e^{-\varepsilon_4}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\alpha_2}{2\alpha_4} e^{-2\varepsilon_4}$$

seçiminden β_2, $\beta_3 = 0$ elde edilir. Burada $\frac{\alpha_1}{a} = \lambda \in IR$ olamak üzere

$$\beta = (\lambda, 0, 0, 1)$$

olarak bulunur. Böylece

$$\lambda X_1 + X_4$$

üreteci elde edilir.

2. $\alpha_4=0$:

(3.2.6) eşitliği

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2 e^{-2\varepsilon_4}\\ \alpha_3 e^{-\varepsilon_4}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\end{pmatrix}$$

halini alır. $\frac{\alpha_1}{a}=\lambda\in IR$ durumu için, α_2 ve α_3 ün de

$\alpha_2\neq0,\ \alpha_3\neq0$

$\alpha_2=0,\ \alpha_3\neq0$

$\alpha_2\neq0,\ \alpha_3=0$

$\alpha_2=0,\ \alpha_3=0$

durumları söz konusudur. α_2 ve α_3 değerlerinin sıfırdan farklı olduğu durumlarda

$$\frac{\alpha_2 e^{-2\varepsilon_4}}{a}=\beta_2,\qquad \frac{\alpha_3 e^{-\varepsilon_4}}{a}=\beta_3$$

eşitliklerinden $\varepsilon_4=\ln\frac{|\alpha_3|}{a}$ seçilerek,

$$\beta_3=\begin{cases}1 & \alpha_3>0\\ -1 & \alpha_3<0\end{cases}$$

ve $\varepsilon_4=\frac{1}{2}\ln\frac{|\alpha_2|}{a}$ seçilerek de

$$\beta_2=\begin{cases}1 & \alpha_2>0\\ -1 & \alpha_2<0\end{cases}$$

bulunur. Buradan δ={-1,0,1}olmak üzere

$$\beta=(\lambda,\delta,\delta,0)$$

olur. Böylece

$$\lambda X_1 + \delta X_2 + \delta X_3$$

üreteci elde edilir.

Sonuç olarak optimal sistem, $\lambda \in IR$,δ={-1,0,1}olmak üzere

$$\lambda X_1 + X_4,\ \lambda X_1 + \delta X_2 + \delta X_3$$

olarak bulunur. Buradan da bu optimal sisteme karşılık gelen indirgemeleri yapalım.

1. $L_{1,1}^{\lambda}$ cebiri kullanılarak yapılan indirgeme:

$(\lambda X_1 + X_4)w(x,t,u)=0$ denkleminden, $\lambda X_1 + X_4$ vektör cisminin değişmezleri

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} = \frac{du}{\lambda}$$

karakteristik denklemi çözülerek $c_1 = \frac{x}{\sqrt{t}}, c_2 = u - \frac{\lambda}{2}\ln t$ bulunur. Karşı gelen benzerlik değişkenleri $z = \frac{x}{\sqrt{t}}$, $u=v(z)+\frac{\lambda}{2}\ln t$ şeklinde elde edilir. Buradan bu benzerlik değişkenlerine göre indirgemeyi yapalım.

$$u_x = \frac{v'}{\sqrt{t}}\ ,\ u_{xx} = \frac{v''}{t},\ u_{xxxx} = \frac{v''''}{t^2}\ ,$$

$$u_{xt} = -\frac{v'}{2t^{3/2}} - \frac{xv''}{2t^2},\ u_t = -\frac{xv'}{2t^{3/2}} + \frac{\lambda}{2t},\ u_{tt} = \frac{3xv'}{4t^{5/2}} + \frac{x^2 v''}{4t^3} - \frac{\lambda}{2t^2}$$

olmak üzere, yukarıdakileri (3.1.1) denkleminde yerine koyarsak,

$$\frac{v''''}{t^2}+p(-\frac{xv'}{2t^{3/2}}+\frac{\lambda}{2t})(\frac{v''}{t})+q(\frac{v'}{\sqrt{t}})(-\frac{v'}{2t^{3/2}}-\frac{xv''}{2t^2})+r(\frac{v'}{\sqrt{t}})^2(\frac{v''}{t})$$
$$+\frac{3xv'}{4t^{5/2}}+\frac{x^2v''}{4t^3}-\frac{\lambda}{2t^2}=0$$

$$\frac{v''''}{t^2}+p(-\frac{xv'v''}{2t^{5/2}}+\frac{\lambda v''}{2t^2})+q(-\frac{(v')^2}{2t^2}-\frac{xv'v''}{2t^{5/2}})+r\frac{(v')^2v''}{t^2}+\frac{3xv'}{4t^{5/2}}+\frac{x^2v''}{4t^3}$$
$$-\frac{\lambda}{2t^2}=0$$

denklemi t^2 ile çarparsak,

$$v''''+p(-\frac{x}{2\sqrt{t}}v'v''+\frac{\lambda}{2}v'')+q(-\frac{(v')^2}{2}-\frac{x}{2\sqrt{t}}v'v'')+r(v')^2v''+\frac{3x}{4\sqrt{t}}v'$$
$$+\frac{x^2}{4t}v''-\frac{\lambda}{2}=0$$

burada $z=\frac{x}{\sqrt{t}}$ yazılınca denklem

$$v''''+p(-\frac{1}{2}zv'v''+\frac{\lambda}{2}v'')+q(-\frac{(v')^2}{2}-\frac{1}{2}zv'v'')+r(v')^2v''+\frac{3}{4}zv'$$
$$+\frac{1}{4}z^2v''-\frac{\lambda}{2}=0$$

olur. Böylece ADD'ye indirgeme

$$v''''-\frac{1}{2}zv'v''(p+q)+v''(\frac{\lambda}{2}p+\frac{1}{4}z^2)-\frac{q}{2}(v')^2+r(v')^2v''+\frac{3}{4}zv'-\frac{\lambda}{2}=0$$

olarak bulunur.

Burada $v'=W$ alınırsa, denklem

$$W'''-\frac{1}{2}z(p+q)WW'+(\frac{\lambda}{2}p+\frac{1}{4}z^2)W'-\frac{q}{2}W^2+rW^2W'+\frac{3}{4}zW-\frac{\lambda}{2}=0$$

halini alır.

Bu denkleme $W(z)=\frac{1}{p}(-3^{3/4}y+z)$ $x=-\frac{1}{2}3^{1/4}z$ dönüşümü uygulanırsa,

$$W(z)=\frac{1}{p}(-3^{3/4}y-2x3^{-1/4}),\quad W'=\frac{1}{p}(\frac{3}{2}y'+1),\quad W'''=\frac{1}{8p}3^{3/2}y'''$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{8p}3^{3/2}y'''-\frac{1}{2}(p+q)(-2x3^{-1/4})\frac{1}{p}(-3^{3/4}y-2x3^{-1/4})\frac{1}{p}(\frac{3}{2}y'+1)$$

$$+(\frac{\lambda}{2}p+\frac{1}{4}z^2)\frac{1}{p}(\frac{3}{2}y'+1)-\frac{q}{2}\frac{1}{p^2}(-3^{3/4}y-2x3^{-1/4})^2$$

$$+r\frac{1}{p^2}(-3^{3/4}y-2x3^{-1/4})^2\frac{1}{p}(\frac{3}{2}y'+1)+\frac{3}{4}(-2x3^{-1/4})$$

$$\frac{1}{p}(-3^{3/4}y-2x3^{-1/4})-\frac{\lambda}{2}=0$$

olur. Buradan da denklem

$$\frac{3^{3/2}}{8}y'''+\frac{3y'}{2}[(\frac{4r}{p^2}-\frac{p+q}{p})3^{1/2}xy+(\frac{4r}{p^2}-\frac{2(p+q)}{p}+1)3^{-1/2}x^2$$

$$+\frac{r}{p^2}3^{3/2}y^2+\frac{\lambda p}{2}]+[(\frac{4r}{p^2}-\frac{p+q}{p}-\frac{2q}{p})3^{1/2}+\frac{3^{3/2}}{2}]xy$$

$$+[(\frac{4r}{p^2}-\frac{2(p+q)}{p}+1-\frac{2q}{p})3^{-1/2}+3^{1/2}]x^2+(\frac{r}{p^2}-\frac{q}{2p})3^{3/2}y^2=0$$

olarak bulunur.

$q=0$, $r=-\frac{1}{2}p^2$ seçimi için son yazılan denklem,

$$\frac{3^{3/2}}{8}y'''+\frac{3y'}{2}[-3\,3^{1/2}xy-3\,3^{-1/2}x^2-\frac{1}{2}3^{3/2}y^2+\frac{\lambda p}{2}]+[-3\,3^{1/2}+\frac{3^{3/2}}{2}]xy-\frac{1}{2}3^{3/2}y^2=0$$

$$y''' - 6y^2 y' - 12x\, y y' - 4y^2 - 4x^2 y' - 4xy + \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda p\, y' = 0$$

halini alır. Buradan

$$y''' = 6y^2 y' + 12x\, y y' + 4y^2 + 4x^2 y' + 4xy - \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda p\, y'$$

denkleminini y ile çarpalım.

$$y y''' = 6y^3 y' + 12x\, y^2 y' + 4y^3 + 4x^2 y y' + 4x y^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda p y\, y'$$

Son yazılan denkleme $y'y''$ ekleyip çıkartalım.

$$y y''' + y'y'' = y'y'' + 6y^3 y' + 12x\, y^2 y' + 4y^3 + 4x^2 y y' + 4x y^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda p y\, y'$$

elde edilen bu denklemin integralini alırsak

$$y y''' + y'y'' = y'y'' + 6y^3 y' + 12x\, y^2 y' + 4y^3 + 4x^2 y y' + 4x y^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda p y\, y'$$

$$y y'' = \frac{1}{2} (y')^2 + \frac{3}{2} y^4 + 4x y^3 + 2x^2 y^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda p\, y^2 + B$$

ve y ile bölersek $A = \frac{\lambda p}{6}$ olmak üzere

$$y'' = \frac{1}{2y} (y')^2 + \frac{3}{2} y^3 + 4x y^2 + 2(x^2 - A)y + \frac{B}{y}$$

dördüncü Painleve denklemi (PIV) elde edilir.

2. $L_{1,2}^{\delta,\lambda}$ cebiri kullanılarak yapılan indirgeme:

$(\lambda X_1 + \delta X_2 + \delta X_3) w(x,t,u) = 0$ denklemi çözülerek elde edilen benzerlik değişkenleri $z = x - t$, $u = v(z) + \frac{\lambda}{\delta} t = v(x-t) + \frac{\lambda}{\delta} t$ şeklinde elde edilir. Buradan bu benzerlik değişkenlerine göre yapılan indirgeme

$$u_x = v' \;,\; u_{xx} = v'' ,\; u_{xxxx} = v'''' \;,\; u_{xt} = - v' , u_t = - v' + \frac{\lambda}{\delta},\; u_{tt} = v''$$

denklemde yerine konulursa,

$$v'''' + p(- v' + \frac{\lambda}{\delta}) v'' - q\; v'\; v'' + r (v')^2 v'' + v'' = 0$$

ADD’ye indirgeme

$$v'''' - (p+q)\; v'\; v'' + r (v')^2 v'' + (\frac{p\lambda}{\delta} + 1) v'' = 0$$

olarak bulunur.

Burada $v' = W$ alınırsa, denklem

$$W''' - (p+q) WW' + r W^2 W' + (\frac{p\lambda}{\delta} + 1) W' = 0$$

olur. Buradan son yazılan denklem integre edilirse

$$W'' + r\frac{W^3}{3} - (p+q)\frac{W^2}{2} + (\frac{p\lambda}{\delta} + 1)W = C$$

olarak bulunur. Bu denkleminde eliptik integral kullanılarak çözümü yapılabilir.

Burada aynı uygulama (3.2.2) durumu için de yapılabilir.

(3.3.5) durumu için Clarkson and Ludlow [9] çalışmasında bir üreteç için aşağıdaki örneği verdi. p=q, $r = \frac{1}{2}q^2$ durumda λ_1, λ_2 keyfi sabitler olmak üzere, direkt metodla bulunan

$$u(x,t) = v(z) + \frac{x^2}{qt} - \frac{2\lambda_1 x}{qt^2} + \frac{2\lambda_1^2}{3qt^3} + \frac{\lambda_2}{qt}, \qquad z = \frac{x}{t} - \frac{\lambda_1}{2t^2} \tag{3.3.7}$$

benzerlik dönüşümünden, λ_3 integrasyon sabiti ve $W=v'(z)$ olamak üzere

$$WW'' - \frac{1}{2}(W')^2 + \frac{1}{8}q^2W^4 + (\lambda_1 z - \frac{1}{2}\lambda_2)W^2 = \lambda_3$$

indirgemesi elde etmiştir. (3.1.1) denkleminin Lie grubunun bir alt grubu olan bir-parametreli grup dönüşümü

$$x \to \frac{x}{1-\varepsilon t}, \quad t \to \frac{t}{1-\varepsilon t}, \quad u \to u + \frac{\varepsilon x^2}{q(1-\varepsilon t)}$$

kullanılarak bulunan

$$u(x,t)=v(z)+\frac{x^2}{qt}, \qquad z=\frac{x}{t} \tag{3.3.8}$$

benzerlik dönüşümünün, direkt metodla elde edilen (3.3.7) benzerlik dönüşümünün özel bir hali olduğunu ifade etti.

Burada Lie grubunun yukarıda verilen alt grubuna karşılık gelen (3.3.8) benzerlik dönüşümün, bu gruba karşılık gelen Lie cebirinin hangi üreteci ile yapıldığını belirleyelim. p=q, $r=\frac{1}{2}q^2$ durumu için denkleminin infinitesimallerinin (3.3.5) den

$$\xi_1 = k_6 qtx + k_3 x + \frac{1}{2} k_5 qt + k_2$$

$$\xi_2 = k_6 q t^2 + 2k_3 t + k_1$$

$$\eta = k_6 x^2 + k_5 x + k_4$$

olarak verilmesiyle denkleminin simetri üreteci

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u}$$

olur. Bu üreteç için

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = \frac{1}{2}qt\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_6 = qtx\frac{\partial}{\partial x} + qt^2\frac{\partial}{\partial t} + x^2\frac{\partial}{\partial u}$$

vektör cisimleri bir taban olur. Bu taban (3.1.1) denkleminin Lie grubuna karşılık gelen altı boyutlu L_6 Lie cebirini üretir. (3.3.8) ile verilen benzelik dönüşümü X_6 üretecine karşılık gelen bir boyutlu alt cebiri kullanılarak bulunan benzerlik dönüşümüdür. Aynı şekilde X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 için benzerlik dönüşümleri elde edilebilir. Burada bir-boyutlu alt cebirler kullanılarak bulunan tüm benzerlik çözümlerinin bulunması için bu benzerlik çözümlerinin optimal sitemini oluşturmak gereklidir. Optimal sitemi oluşturmak için X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ve X_6 üreteçlerine karşılık gelen alt grupların belirlenmesi gerekmektedir. X_6 üretecinin grubu yukarıda belirtilmiştir. X_1, X_2, X_3, X_4 üreteçleri için de bu alt gruplar belirlenebilir. Fakat X_5 üretecine karşılık gelen alt grubun

$$\frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}q\bar{t} \quad , \quad \bar{x}\big|_{\varepsilon=0} = x$$

$$\frac{d\bar{t}}{d\varepsilon} = 0 \quad , \quad \bar{t}\big|_{\varepsilon=0} = t$$

$$\frac{d\overline{u}}{d\varepsilon} = \overline{x} \qquad , \quad \overline{u}\Big|_{\varepsilon=0} = u$$

adi diferansiyel denklem sistemi çözülmesiyle belirlenmesi mümkün olmamaktadır. Böylece X_6 üretecinin hangi denklik sınıfının içinde olduğu belirlenememiştir.

Burada benzerlik dönüşümlerinin bulunması prosedüründe grubun bilinmesi gerekmemektedir. Benzerlik dönüşümlerinin bulunması için grubun infinitesimal üretecinin bilinmesi yeterlidir. Bu bulunan benzerlik çözümlerin sınıflandırılması için optimal sistem oluşturmak gerekmektedir.

3.3. Simetri Genişlemesi

Bu bölümde [7] Burde tarafından verilen, (3.1.1.) Genelleştirilmiş Boussinesq (GBQ) denkleminin özel bir durumu için bir simetri genişlemesi ele alınmıştır. Burde'nin verdiği özel çözüm genişletilerek elde edilen infinitesimal üreteçler kullanılarak simetri indirgemesi yapılarak denklem çözülmüştür.

Kısmi diferansiyel denklemin Lie grup dönüşümünün genişlemesiyle, bağımlı ve bağımsız değişkenlere ek olarak denklemin parametrelerini içeren değişkenlerin genişletilmiş uzayındaki dönüşümlerin sürekli grup etkisi kastedilmiş olunur. Genişletilmiş infinitesimal grup üreteçlerine uygun şekilde 2. Bölümde bahsedilen Lie infitesimal kriteri kullanılarak bulunan infinitesimal üretece karşılık gelen, dönüşümlerin grubu düşünülmüştür. Bu bölümde sadece nokta dönüşüm gruplarıyla ilgilenildi.

Buradan metodu uygulamak için, (3.1.1) denkleminin son terimin önüne a yapay katsayısının eklenmesiyle

$$u_{xxxx}+pu_t u_{xx}+qu_x u_{xt}+ru_x^2 u_{xx}+au_{tt}=0 \qquad (3.3.1)$$

elde edilen (3.3.1) denkleminde, p,r katsayılarını özel olarak

$$p=q \quad , \quad r=\frac{q^2}{2a}$$

şeklinde seçelim. Buradan elde edilen,

$$u_{xxxx}+qu_t u_{xx}+qu_x u_{xt}+\frac{q^2}{2a}u_x^2 u_{xx}+au_{tt}=0 \qquad (3.3.2)$$

denklemi için (x,t,u,q,a) genişletilmiş uzayında, $\xi_1(x,t,u,q,a)$, $\xi_2(x,t,u,q,a)$, $\eta(x,t,u,q,a)$ olmak üzere

$$X=\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial t}+\eta\frac{\partial}{\partial u}+Q(q)\frac{\partial}{\partial q}+A(a)\frac{\partial}{\partial a}$$

üreteci ile tanımlanan infinitesimal dönüşümlerin bir-parametreli Lie grubunu düşünelim. 2.1.3. Teoremle verilen değişmezliğin infinitesimal koşulundan, MathLie paket programı kullanarak,

$$-a u_x (\xi_1)_u u_{tt} -2a(\xi_2)_t u_{tt} -3a u_t (\xi_2)_u u_{tt} -q u_x^2 (\xi_2)_u u_{tt} -q u_x (\xi_2)_x u_{tt}$$

$$+a(\phi_1)_u u_{tt} -2a(\xi_1)_t u_{xt} -2a u_t (\xi_1)_u u_{xt} -3q u_x^2 (\xi_1)_u u_{xt} -2q u_x (\xi_1)_x u_{xt}$$

$$-q u_x (\xi_2)_t u_{xt} -5q u_x u_t (\xi_2)_u u_{xt} -\frac{q^2}{a} u_x^3 (\xi_2)_u u_{xt} -3q u_t (\xi_2)_x u_{xt}$$

$$-\frac{q^2}{a} u_x^2 (\xi_2)_x u_{xt} +2q u_x (\phi_1)_u u_{xt} +q(\phi_1)_x u_{xt} -2q u_x (\xi_1)_t u_{xx}$$

$$-5 u_t u_x (\xi_1)_u u_{xx} -\frac{5q^2}{2a} u_x^3 (\xi_1)_u u_{xx} -2q u_t (\xi_1)_x u_{xx} -\frac{2q^2}{a} u_x^2 (\xi_1)_x u_{xx}$$

$$-q u_t (\xi_2)_t u_{xx} -2q u_t^2 (\xi_2)_u u_{xx} -\frac{3q^2}{2a} u_t u_x^2 (\xi_2)_u u_{xx} -\frac{q^2}{a} u_t u_x (\xi_2)_x u_{xx}$$

$$+q(\phi_1)_t u_{xx} + 2q u_t (\phi_1)_u u_{xx} + \frac{3q^2}{2a} u_x^2 (\phi_1)_u u_{xx} + \frac{q^2}{a} u_x (\phi_1)_x u_{xx}$$

$$-a u_x (\xi_1)_{tt} - 2a u_x u_t (\xi_1)_{tu} - q u_x^3 (\xi_1)_{tu} - a u_t^2 u_x (\xi_1)_{uu} - 2q u_t u_x^3 (\xi_1)_{uu}$$

$$-\frac{q^2}{2a} u_x^5 (\xi_1)_{uu} - 15 u_x u_{xx}^2 (\xi_1)_{uu} - q u_x^2 (\xi_1)_{xt} - 3q u_t u_x^2 (\xi_1)_{xu} - \frac{q^2}{a} u_x^4 (\xi_1)_{xu}$$

$$-12 u_{xx}^2 (\xi_1)_{xu} - q u_t u_x (\xi_1)_{xx} - \frac{q^2}{2a} u_x^3 (\xi_1)_{xx} - a u_t (\xi_2)_{tt} - 2a u_t^2 (\xi_2)_{tu}$$

$$-q u_t u_x^2 (\xi_2)_{tu} - a u_t^3 (\xi_2)_{uu} - 2q u_t^2 u_x^2 (\xi_2)_{uu} - \frac{q^2}{2a} u_x^4 u_t (\xi_2)_{uu}$$

$$-12 u_x u_{xt} u_{xx} (\xi_2)_{uu} - 3 u_t u_{xx}^2 (\xi_2)_{uu} - q u_t u_x (\xi_2)_{xt} - 3q u_t^2 u_x$$

$$(\xi_2)_{xu} - \frac{q^2}{a} u_t u_x^3 (\xi_2)_{xu} - 12 u_{xt} u_{xx} (\xi_2)_{xu} - q u_t^2 (\xi_2)_{xx} - \frac{q^2}{2a} u_t u_x^2 (\xi_2)_{xx}$$

$$+a(\phi_1)_{tt} + 2a u_t (\phi_1)_{tu} + q u_x^2 (\phi_1)_{tu} + a u_t^2 (\phi_1)_{uu} + 2q u_t u_x^2 (\phi_1)_{uu} + \frac{q^2}{2a} u_x^4$$

$$(\phi_1)_{uu} + 3 u_{xx}^2 (\phi_1)_{tu} + q u_x (\phi_1)_{xtt} + 3q u_t u_x (\phi_1)_{xu} + \frac{q^2}{a} u_x^3 (\phi_1)_{xu} + q u_t$$

$$(\phi_1)_{xx} + \frac{q^2}{2a} u_x^2 (\phi_1)_{xx} - 6(\xi_2)_u u_{xx} u_{xxt} - 6 u_x^2 (\xi_2)_{uu} u_{xxt} - 12 u_x (\xi_2)_{xu} u_{xxt}$$

$$-6(\xi_2)_{xx} u_{xxt} - 4(\xi_2)_u u_{xt} u_{xxx} - 10(\xi_1)_u u_{xx} u_{xxx} - 10 u_x^2 (\xi_1)_{uu} u_{xxx}$$

$$-16 u_x (\xi_1)_{xu} u_{xxx} - 6(\xi_1)_{xx} u_{xxx} - 4 u_t u_x (\xi_2)_{uu} u_{xxx}$$

$$-4 u_t (\xi_2)_{xu} u_{xxx} + 4 u_x (\phi_1)_{uu} u_{xxx} + 4(\phi_1)_{xu} u_{xxx} - 10 u_x^3 (\xi_1)_{uuu}$$

$$-24 u_x^2 u_{xx} (\xi_1)_{xuu} - 18 u_x u_{xx} (\xi_1)_{xxu} - 4 u_{xx} (\xi_1)_{xxx} - 4 u_x^3 u_{xt} (\xi_2)_{uuu}$$

$$-6 u_t u_x^2 u_{xx} (\xi_2)_{uuu} - 12 u_x^2 u_{xt} (\xi_2)_{xuu} - 12 u_t u_x u_{xx} (\xi_2)_{xuu}$$

$$-12 u_x u_{xt} (\xi_2)_{xxu} - 6 u_t u_{xx} (\xi_2)_{xxu} - 4 u_{xt} (\xi_2)_{xxx} + 6 u_x^2 u_{xx} (\phi_1)_{uuu}$$

$$+12 u_x u_{xx} (\phi_1)_{xuu} + 6 u_{xx} (\phi_1)_{xxu} - 4 u_x (\xi_2)_u u_{xxxt} - 4(\xi_2)_x u_{xxxt}$$

$$-5u_x(\xi_1)_u u_{xxxx} - 4(\xi_1)_x u_{xxxx} - u_t(\xi_2)_u u_{xxxx} + (\phi_1)_u u_{xxxx} - u_x^5(\xi_1)_{uuuu}$$

$$-4u_x^4(\xi_1)_{xuuu} - 6u_x^3(\xi_1)_{xxuu} - 4u_x^2(\xi_1)_{xxxu} - u_x(\xi_1)_{xxxx} - u_t u_x^4(\xi_2)_{uuuu}$$

$$-4u_t u_x^3(\xi_2)_{xuuu} - 6u_t u_x^2(\xi_2)_{xxuu} - 4u_t u_x(\xi_2)_{xxxu} - u_t(\xi_2)_{xxxx}$$

$$+ u_x^4(\phi_1)_{uuuu} + 4u_x^3(\phi_1)_{xuuu} + 6u_x^2(\phi_1)_{xxuu} + 4u_x(\phi_1)_{xxxu} + (\phi_1)_{xxxx}$$

$$+A[-\frac{q^2}{2a^2}u_x^2 u_{xx} + u_{tt}] + Q[u_t u_{xx} + u_x u_{xt} + \frac{q}{a}u_x^2 u_{xx}] = 0$$

eşitliğini elde ederiz. (3.3.1) denklemindeki katsayılara bağlı olarak elde edilen eşitliğin her iki yanı u’nun x ve t ye göre türevlerinin bir polinomu olarak alınırsa

$$(\xi_1)_u = 0\,,\ (\xi_2)_u = 0\,,\ (\xi_2)_x = 0\,,\ (\phi_1)_{uu} = 0$$

$$-6(\xi_1)_{xx} + 4\,(\phi_1)_{xu} = 0$$

$$-q(\xi_1)_{xx} + 3q(\phi_1)_{xu} = 0$$

denklemlerinin ortak çözülebilmesi için $(\xi_1)_{xx} = (\phi_1)_{xu} = 0$ elde edilir. Bunların kullanılmasıyla da $(\phi_1)_t = (\xi_1)_{tt} = 0$ olur.

Yukarıda bulunan türev değerleri için en son

$$\frac{A}{a} - 2(\xi_2)_t + (\eta)_u = 0$$

$$\frac{Q}{q} - 2(\xi_1)_x - (\xi_2)_t + 2(\eta)_u = 0$$

$$-\frac{A}{2a} + \frac{Q}{q} - 2(\xi_1)_x + \frac{3}{2}(\eta)_u = 0$$

$$-4(\xi_1)_x + (\eta)_u = 0$$

$$-2a(\xi_1)_t + q(\eta)_x = 0$$

$$-a(\xi_2)_{tt} + q(\eta)_{xx} = 0$$

$$-2a(\xi_1)_{xt} + q(\eta)_{xx} = 0$$

şeklindeki belirleyici denklemler elde edilir.

Burde [7] çalışmasında, bu belirleyici denklemler

$$\xi_1 = C_1xt + C_2x + C_3t + C_4$$

$$\xi_2 = C_1t^2 + (2C_2 + \frac{A}{2a})t + C_0$$

$$\eta = (\frac{A}{2a} - \frac{Q}{q})u + \frac{a}{q}C_1x^2 + \frac{2a}{q}C_3x + C_5$$

biçiminde çözülmüştür. Buradan da $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$ ve $\frac{A}{2a} = \frac{Q}{q}$ seçimiyle elde ettiği alt grubu kullanarak, tekil bir t noktası için simetri indirgemesi elde etmiştir.

Fakat bu seçim özel bir seçimdir. $\frac{A}{2a} = \frac{Q}{q}$ seçiminde belirleyici denklemler göz önünde bulundurulmamıştır. Çünkü bu seçim bize $(\eta)_u = 0$ verir ve yukarıda bulunan belirleyici denklemlerin çözümü için özel duruma götürür. Bu da gösteriyor ki belirleyici denklemler tam olarak belirlenemediğinden Burde'nin yaklaşımıyla, yapmak istediği üreteç genişlemesindeki A ve Q belirlenmesi mümkün olmamıştır. Dolayısıyla özel çözüm elde edilmiş olunur.

Biz bu belirleyici denklemleri A ve Q'yu belirleyecek şekilde çözerek

$$\xi_1 = C_1xt + C_0x + C_3t + C_4$$

$$\xi_2 = C_1t^2 + 3C_0t + C_2$$

$$\eta = 4C_0u + \frac{a}{q}C_1x^2 + \frac{2a}{q}C_3x + C_5 \qquad (3.3.2)$$

$$Q = -3\,q\;C_0$$

$$A = 2a\;C_0$$

infinitesimallerine ulaştık. Burada sadece A ve Q üreteçleri değil C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 katsayılarıda a ve q'ya bağlıdır.

$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$ ve $C_0 = \dfrac{1}{4a}$ değerleri için elde edilen,

$$\xi_1 = \frac{x}{4a},\quad \xi_2 = \frac{3t}{4a},\quad \eta = \frac{u}{a},\quad Q = -3\,\frac{q}{a},\quad A = \frac{1}{2}$$

infinitesimallerine karşılık gelen (3.3.2) nin

$$\bar{x} = x\,(1+\frac{\varepsilon}{2a})^{1/2},\quad \bar{t} = t(1+\frac{\varepsilon}{2a})^{3/2},\quad \bar{u} = u(1+\frac{\varepsilon}{2a})^{2}$$

$$\bar{q} = q\,(1+\frac{\varepsilon}{2a})^{-3/2},\quad \bar{a} = a + \frac{1}{2}\varepsilon$$

alt grubunu ele alalım. Burada bu alt grubun

$$X_0 = \frac{x}{4a}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3t}{4a}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{3q}{4a}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}$$

üreteciyle yapılan indirgeme için benzerlik dönüşümleri $z = \dfrac{x}{\sqrt{a}}$, $\tilde{r} = a^3 q^2$, $u = a^2 v(z) = a^2 v(\dfrac{x}{\sqrt{a}})$ olarak bulunur. Böylece (3.3.1) denklemi bu dönüşümle

$$u_x = a^{3/2} v',\quad u_{xx} = a v'',\quad u_{xxxx} = v'''',\quad u_{xt} = u_t = u_{tt} = 0$$

olmak üzere, yukarıdakileri (3.3.1) denkleminde yerine koyarsak,

$$v'''' + \frac{q^2 a^3}{2}(v')^2 v'' = 0$$

elde edilir. Burada $\tilde{r} = a^3 q^2$ yazılınca denklem

$$2v'''' + \tilde{r}(v')^2 v'' = 0$$

olur. Buradan , $v' = W$ dersek

$$2W''' + \tilde{r}W^2 W' = 0$$

olur. Bu denklemi integre edip, integral sabitini sıfır alırsak,

$$W'' + \frac{\tilde{r}}{6}W^3 = 0 \qquad (3.3.3)$$

bulunur. (3.3.3) denkleminin çözümünde

$$W' = y\ , \quad W'' = \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dW}\frac{dW}{dz} = y\frac{dy}{dW}$$

olmak üzere

$$y\frac{dy}{dW} + \frac{\tilde{r}}{6}W^3 = 0$$

$$y\,dy + \frac{\tilde{r}}{6}W^3 dW = 0$$

için

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{\tilde{r}}{6}\frac{W^4}{4} + c$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \text{c-F(W)}$$

buradan da

$$y = \sqrt{2c - \frac{\tilde{r}}{12}W^4}$$

$$W' = \sqrt{2c - \frac{\tilde{r}}{12}W^4}$$

$2c = a^2$, $\frac{\tilde{r}}{12} = b^2$ dersek

$$\frac{dW}{dz} = \sqrt{a^2 - b^2W^4}$$

$$dz = \frac{dW}{\sqrt{a^2 - b^2W^4}}$$

$$z = \int \frac{dW}{\sqrt{a^2 - b^2W^4}}$$

$$z = \int \frac{dW}{\sqrt{a - bW^2}\sqrt{a + bW^2}}$$

bu son denkleme $W = -\sqrt{\frac{a}{b}}\,\text{Cos}\theta$, $dW = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\text{Sin}\theta\; d\theta$ dönüşümü yapılarak $k^2 = \frac{1}{2}$ olmak üzere,

$$z = \frac{1}{\sqrt{2ab}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\text{Sin}^2\theta}}$$

eliptik interalin birinci tipine ulaşılır. Bu integralin çözümü [23]'den 0<k<1 olduğundan,

$$z = \frac{1}{\sqrt{2ab}} \int \left\{ 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2\theta + \frac{1.3}{2.4}k^4 \sin^4\theta + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 \sin^6\theta + \ldots \right\} d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2ab}} \left\{ \theta\left(1 + \frac{1}{2}k^2\right) + \frac{1}{4}k^2 \sin 2\theta + \ldots \right\}$$

elde edilir.

Ayrıca 3.2. Bölümde bahsedilen optimal sistem oluşturarak benzerlik çözümlerinin sınıflandırmasında ortaya çıkan sıkıntısı, yukarıda yapılan genişleme ile son bulmamıştır.

4.SONUÇ

Verilen bir kısmi türevli diferansiyel denklemin kabul ettiği simetri grubunun X infinitesimal üretecini hesaplamak mümkündür. Bu üreteç denklemin Lie simetri grubuna karşılık gelen Lie cebirinin bir bazının lineer kombinasyonu olduğundan, bu bazın herhangi bir elemanı ile bir benzerlik çözümü elde edilebilir. Bu bazın herhangi bir elemanı Lie cebirinin bir-boyutlu alt cebri olduğundan, bu benzerlik çözümü, bir-boyutlu alt cebirler ile oluşturulan tüm benzerlik çözümleri ailesinin kümesindeki başka bir benzerlik çözümüne herhangi bir dönüşüm ile karşılık gelebilir. Böylece bu benzerlik çözümlerinin bir sınıflandırılmasını bulmak için optimal sistem oluşturulabilir.

p,q,r keyfi sabitler olmak üzere, Genelleştirilmiş Boussinesq denkleminin direkt metodla elde edilen benzerlik çözümlerinin, denklemin simetri grubuna karşılık gelen Lie cebirin bir-boyutlu alt cebirlerinin optimal sistemi ile elde edilen çözümlere karşılık geldiği gösterilerek benzerlik çözümlerinin bir sınıflaması elde edilmiştir.

Fakat p=q, $r = \frac{1}{2}q^2$ durumda, X_5 üretecine karşılık gelen alt grubun belirlenememesinden dolayı optimal sistem oluşturulamamıştır.

Böylece optimal sistem oluşturma seçilen probleme bağımlıdır.

Ayrıca p=q, $r = \frac{1}{2}q^2$ durumda Genelleştirilmiş Boussinesq denkleminin simetri üretecinin bir genişlemesi alınarak denklem çözülebilir daha basit bir denkleme indirgendi.

KAYNAKLAR

[1] **Baumann, G.,** Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica. Telos, Springer Verlag, New York (2000).

[2] **Baumann, G.,** MathLie a program of doing Symmetry Analysis, Math. Comput. Simulation 48. no.2,205-223 (2002).

[3] **Baumann, G.,** Symmetry Analysis of Differental Equations Using Mathlie, Jor. Math. Sci., Vol. 108 ,1052-1069(2002).

[4] **Baumann, G., Volkmann, J.,** Connection between Painleve Analysis and Optimal Systems,Dif. Eq.Cont.Pro. no.4 (2002).

[5] **Bluman, G.W., Anco, S.C.,** Symmetry and Integtation Methods for Differential Equations, Springer-Verlag, New York (2002).

[6] **Bluman, G.W.,** Construction of Solutions to Partial Differential Equations by the Use of Transformation Groups, Ph.D. Thesis, California (1967).

[7] **Burde, G.I.,** Expand Lie Group Transformations and Similarity Reductions of Differential Equations, Proc.Ins.Math.NAS of Ukraine,Vol.43,PartI,93-101(2002)

[8] **Carter, R., Segal, G., Macdonald, I.,** Lectures on Lie Groups and Lie Algebras, Cambiridge University Preess (1995)

[9] **Clarkson, P.A., Ludlow, D.K.,** Symmetry Reductions, Exact Solutions and Painleve Analysis for a Gereralised Boussinesq Equation, J. Math. Analysis and Appl.,186,132-155(1994)

[10] **Clarkson, P.A.,** New Similarity Solutions for thr Modified Boussinesq Equation, J.Phys. A.Math. Gen.,2355-2367(1998)

[11] **Clarkson, P.A., Priestley, T.J.,** Symmetry of a Generalized Boussinesq Equation, Ins.Mat.and St. Un. Kent at Canterburg, CT2, 7NF, U.K. (1996)

[12] **Clarkson, P.A., Priestley, T.J.,** Symmetries of a Class of Nonlinear Fourth Order Partial Differential Equations, J. Nonlinear Math. Phys., V.6, N 1, 66-98 (1999)

[13] **Debnaht, L.,** Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Birkhauser –Boston (1997).

[14] **Farlow, S. J.,** Partial differential equations for scientists and engineers, Wiley, New York, (1982).

[15] **Gandaraias, M.L., Bruzon, M.S.,**Classical and Nonclassical Symmetries of a Generalized Boyssinesq Equation, J.Nonlinear Math. Phys.,V.5, N 1,8-12(1998)

[16] **İbragimov, N.H.,** Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume1,2,3 CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, (1994,1995,1996).

[17] **İbragimov, N.H.,** Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. CRC Press, Boca Raton, F.L, (1985).

[19] **Ji, X., Chen, C., Zhang, J.E.,Li, Y.,** Lie Symmetry Analysis and Some New Exact Solutions of Wu-Zhang Equation, J. Math. Phys., V. 45, N 1,448-460(2004)

[19] **Kawamoto, S.,** Linearization of the classical Boussinesq and related equations. J.Phys. Soc. Japan, 53, N.9,2922-2929 (1984)

[20] **Kevorkian, J.,** Partial Differential Equations, Second edn., Springer-Verlag, New York(2000).

[21] **Lou, S.Y., Ni, G.J.,** Similarity analysis for dispersive wave equations in shallow water, Comm. Theoret. Phys., 18, N.2, 165-170 (1992)

[22] **MacCamy, R.C., Mizel, V.J.,** Linear analysis and differential equations, The MacMilan Company , London (1969).

[23] **Nayfeh, A.H.,** Introduction to Perturbation Techniques,Wiley-Interscience Publication,New York ,(1993).

[24] **Olver,P.J,** Applications of Lie Groups to Differential Equations, GTM 107, Second edn., Springer-Verlag (1993).

[25] **Olver,P.J,** Symmerty and Explicit Solutions of Partial Differential Equations, Appl. Num. Math, V. 10, 307-324 (1992).

[26] **Ovsyannikov, L.V.,** Group Analysis of Differential Equations, Academic Pres, New York, (1982).

[27] **Paquin, G., Winternitz, P.,** Group theoretical analysis of dispersive long wave equations in two space dimensions. Phys. D 46 (1990), no. 1, 122-138

[28] **Pakdemirli M.,Yurusoy M.,** Similarity Transformations for Partial Differential Equations, Siam Rev., 40, 96-101 (1998).

[29] **Pucci, E.,** Similarity Reduction of Partial Differential Equations, J. Phys. A: Math. Gen., V. 25, 2631-2640 (1992).

[30] **Schwarz, F.**, Automatically determining symmetries of partial differential equations,Computing, 34, 91-106 (1985)

[31] **Sneddon, J. N.,** Element of Partial Differential Equations, McGraw-Hill Book Company London (1957).

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Kocaeli'nin Gebze ilçesinde doğdu. İlkokulu 100. yıl Atatürk İlkolukunda, ortaokulu Darıca Lisesinde okudu. 1992 yılında Gebze Teknik Lisesinin Endüstriyel Elektronik Bölümünü bitirdi. 1993 yılında Balıkesir Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 1997 yılında mezun oldu ve aynı yıl Balıkesir Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümün yüksek lisans eğitimine başladı. 1999 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 1997-2001 yılları arasında Balıkesir Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yaptı ve 2001 yılında Doktora eğitimi için Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne geldi. Halen Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.