

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İKTİSAT ANABİLİM DALI

PORTFÖY SEÇİMİNDE LASSO CEZALI NODEWISE YAKLAŞIMI

DOKTORA TEZİ

ESRA ULAŞAN

DANIŞMANI: PROF.DR. A.ÖZLEM ÖNDER

İZMİR 2017

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İKTİSAT ANABİLİM DALI

PORTFÖY SEÇİMİNDE LASSO CEZALI NODEWISE YAKLAŞIMI

Doktora Tezi

Esra ULAŞAN

JÜRİ ÜYELERİ

Prof.Dr. A.Özlem ÖNDER

Prof.Dr. Şenay ÜÇDOĞRUK BİRECİKLİ

Prof.Dr. Evrim TURGUTLU

Doç.Dr. A. Nazif ÇATIK

Doç.Dr. Dilek DEMİRHAN

İZMİR 2017

Ege Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğü'ne sunduğum **Portföy Seçiminde Lasso Cezalı Nodewise Yaklaşımı** adlı doktora tezinin tarafımdan bilimsel, ahlak ve normlara uygun bir şekilde hazırlandığını, tezimde yararlandığım kaynakları bibliyografyada ve dipnotlarda gösterdiğimi onurumla doğrularım.

Esra Ulaşan





T.C.EGE ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ



DOKTORA
TEZ SAVUNMA TUTANAĞI

ÖĞRENCİNİN

Adı Soyadı : Esra ULAŞAN

Numarası : 92110005865

Anabilim Dalı : İktisat

Tez Başlığı (Türkçe) : Finans ve Ekonomide İleri Regresyon Yöntemleri

Tez Başlığı (İngilizce) : Advanced Regression Methods in Finance and Economy

Tez Savunma Tarihi : 16.11.2017

Tez Başlığı Değişikliği Varsa Yeni Başlık: Portföy Seçiminde Lasso Cezalı Modelleme

JÜRİ ÜYELERİ

Yoklasımı

Jüri Başkanı

Unvan, Adı, Soyadı : Prof. Dr. A. Özlem ÖNDER

Karar : Başarılı Başarısız Düzeltme

İmza :

Jüri Üyesi (Tez İzleme Komitesi Üyesi)

Unvan, Adı, Soyadı : Doç. Dr. A. Nazif ÇATIK

Karar : Başarılı Başarısız Düzeltme

İmza :

Jüri Üyesi (Tez İzleme Komitesi Üyesi)

Unvan, Adı, Soyadı : Doç. Dr. Dilek DEMİRHAN

Karar : Başarılı Başarısız Düzeltme

İmza :

Jüri Üyesi

Unvan, Adı, Soyadı : Prof. Dr. Şenay ÜÇDOĞRUK BİRECİKLİ

Karar : Başarılı Başarısız Düzeltme

İmza :

Jüri Üyesi

Unvan, Adı, Soyadı : Prof. Dr. Evrim TURGUTLU

Karar : Başarılı Başarısız Düzeltme

İmza :

TEZ HAKKINDA JÜRİNİN GENEL GÖRÜŞÜ

(Jüri Başkanı Tarafından Doldurulacaktır)

Tez savunması sonucunda öğrenci tarafından hazırlanan çalışma;

Oybirliğiyle

Oy çokluğuyla

Başarılıdır

Düzeltilmelidir

Başarısızdır

- Bu tutanak üç (3) işgünü içerisinde jüri üyelerinin raporlarıyla beraber Anabilim Dalı Başkanlığı üst yazısıyla Enstitü Müdürlüğüne gönderilmelidir.
- Doktora programlarında düzeltme alan öğrencinin 6 (altı) ay içerisinde yeniden savunmaya girmesi zorunludur.

Önsöz

Markowitz portföy optimizasyonunda boyutsallık sorununu (*curse of dimensionality*) aşmak için ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon yaklaşımından yararlanarak kovaryans matrisinin tersini doğru tahminlemesi ve geçerliğinin BIST endeksi üzerinde test edilmesini içeren tezin her aşamasında hem akademik hem de kişisel olarak yardımını ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle daima bana yol gösteren danışmanım Prof. Dr. Özlem Önder'e sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca, bana ikinci bir danışmanlık yapan, yapıcı eleştirileriyle tezin şekillenmesinde önemli katkıları bulunan ve kendisinden çok şey öğrendiğim Prof. Dr. Mehmet Caner'e teşekkürü bir borç bilirim. Bu tezin ötesinde kendisiyle işbirliği içinde kalma şansını içtenlikle dilerim. Son olarak, birlikte çalışmaktan keyif aldığım Laurent Callot'a, değerli yorumları için Denis Pelletier'e, Srinivasan Krishnamurty'e ve J. Andres Riquelme Won'a teşekkür ederim. Ayrıca bu tezin başlangıcından bitişine kadar sahip olduğu engin sabrı ve benden manevi desteğini esirgemeyen, zor günlerimde daima yanımda olan Ercan Gümüş'e çok teşekkür ederim.

Esra Ulaşan

İçindekiler

Önsöz	iv
Tablo Listesi	viii
Şekil Listesi	x
1 Giriş	1
2 Portföy Optimizasyonunda Kovaryans Matris Tahmini	5
2.1 Literatür Taraması	5
2.2 Optimum Portföy Dağılımı ve Risk Değerlendirmesi	9
2.2.1 Ortalama Varyans Portföyü	9
2.2.2 Global Minimum Varyans Portföyü	10
2.3 Kovaryans Matris Tahmininde Kullanılan Mevcut Yöntemler	11
2.3.1 Örneklem Kovaryans Matris Tahmincisi	11
2.3.2 Kovaryans Matrisinin Küçülme Tahmincisi	12
2.3.3 Yaklaşık Faktör Modelleri ile Kovaryans Matris Tahmini	14
2.3.4 Gözlemlenen Faktörler	14
2.3.5 POET	16
2.3.6 Bilinmeyen K	19
3 Ampirik Gram Matris Ters Tahminine Yönelik Lasso Cezalı Nodewise Yaklaşımı	20
3.1 Literatür Taraması	20

3.2	En Küçük Kareler Tahmincisinin Yüksek Boyutlu Veri Tahminlemedeki Başarısızlığı	24
3.2.1	En Küçük Kareler Tahmincisinin Riski	24
3.2.2	Problem	25
3.3	Küçülme Tahmincileri ve Özellikleri	26
3.3.1	ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 Normları	26
3.4	Metodoloji	28
3.4.1	ℓ_1 Ceza Parametrelili Nodewise Regresyon Kullanılarak Serbest Ters Matrisinin Elde Edilişi	29
3.4.2	Özellikler	32
3.4.3	Algoritma	34
3.5	Ayar Parametresi Seçimi	35
3.5.1	Çoklu Çapraz Geçerlilik Testi	35
3.5.2	Değiştirilmiş Bayesçi (Modified Bayesian) Bilgi Kriteri	36
3.6	Asimptotik Özellikler	36
3.6.1	Varsayımlar	36
3.6.2	Global Minimum Varyans Portföyünün Yakınsaması	38
3.6.3	Markowitz Portföyünün Yakınsaması	39
3.7	Brüt Risk Toplamı	41
3.8	Kovaryans Matrisi Tahmininde Hata Ölçümleri	42
4	Monte Carlo Uygulamaları	43
4.1	Gözlemlenen Faktör Modeline Dayalı Monte Carlo Uygulamaları	43
4.1.1	Kalibrasyon	45
4.1.2	Simülasyon	46
4.2	Rastsal Kovaryans Matrisine Dayalı Monte Carlo Uygulamaları	47
4.2.1	Kalibrasyon	47

4.2.2	Simülasyon	47
4.3	Bulgular	48
4.3.1	Simülasyon Sonuçları	48
4.3.2	Hata Ölçüm Sonuçları	53
4.3.3	Serbest Ters Matrisinin Seyrekliği ve Diğer Sonuçlar	58
5	Ampirik Uygulama	62
5.1	Fama-French Üç Faktör Modeli Portföy Oluşturma	62
5.1.1	Metodoloji	63
5.1.2	Örneklem Özellikleri ve Tanımlayıcı İstatistikler	64
5.2	Portföy Kayan Pencere Uygulaması	67
5.2.1	Performans Ölçütleri	67
5.2.2	Veri	70
5.2.3	Örneklem Dışı Öngörü Sonuçları	71
6	Sonuç ve Değerlendirme	91
6.1	Sonuç	91
A		97
A.1	Örneklem İçi Portföy Performansı	97
B		110
B.1	Simülasyon Sonuçları	110
	Kaynakça	115
	Özgeçmiş	124
	Özet	131
	Abstract	132

Tablo Listesi

4.1	b Vektörü Oluşturmada Örneklem Ortalama ve Örneklem Kovaryans Matrisi	45
4.2	f Matrisi Oluşturmada Örneklem Ortalaması ve Örneklem Kovaryans Matrisi	46
4.3	S&P Örneklem Ortalaması ve Örneklem Kovaryans Matrisi	47
5.1	Firma Büyüklüğü - B/M Portföyleri	63
5.2	Firma Büyüklüğü - B/M Portföylerindeki Hisse Senedi Sayıları (Günlük)	64
5.3	Firma Büyüklüğü - B/M Portföylerindeki Hisse Senetlerinin Yüzdesi (Günlük)	64
5.4	Firma Büyüklüğü - B/M Portföyü Aşırı Getirilerinin Tanımlayıcı İstatistikleri (Günlük)	65
5.5	Firma Büyüklüğü - B/M Portföylerindeki Hisse Senedi Sayıları (Aylık)	66
5.6	Firma Büyüklüğü - B/M Portföylerindeki Hisse Senetlerinin Yüzdesi (Aylık)	66
5.7	Firma Büyüklüğü - B/M Portföyü Aşırı Getirilerinin Tanımlayıcı İstatistikleri (Aylık)	67
5.8	Günlük Porföy Performansı, $n - T = 63, 126, 252$	74
5.9	Günlük Porföy Performansı, $T = 670, n - T = 335$	77
5.10	Aylık Porföy Performansı, $n - T = 6, 12, 24$	79
5.11	Aylık Porföy Performansı, $n - T = 36, 48, 60$	83

5.12	Aylık Porföy Performansı, $T = 88, n - T = 44$	85
5.13	Günlük Porföy Performans Sıralaması	89
5.14	Aylık Porföy Performans Sıralaması	90

Şekil Listesi

4.1	Portföy Varyans Tahmin Hatası, Ortalama Mutlak Hata	49
4.2	Portföy Riski, Ortalama Mutlak Hata	50
4.3	Portföy Ağırlıkları Tahmin Hatası, Ortalama Mutlak Hata	51
4.4	Portföy Brüt Risk Toplamı, Ortalama Mutlak Hata	52
4.5	Kovaryans Matrisi Hata Ölçümleri, Ortalama	54
4.6	Kovaryans Matrisi Hata Ölçümleri, Standard Sapma	55
4.7	Ters Frobenius Norm, Ortalama	57
4.8	Ters Frobenius Norm, Standard Sapma	58
4.9	$\hat{\Theta}$ Matrisinin Seyrekliği ve Diğer Sonuçlar	60
5.1	Günlük Portföy Varlığı, $T = 942, n - T = 63$	75
5.2	Günlük Portföy Varlığı, $T = 879, n - T = 126$	76
5.3	Günlük Portföy Varlığı, $T = 753, n - T = 252$	77
5.4	Günlük Portföy Varlığı, $T = 670, n - T = 335$	78
5.5	Aylık Portföy Varlığı, $T = 126, n - T = 6$	80
5.6	Aylık Portföy Varlığı, $T = 120, n - T = 12$	81
5.7	Aylık Portföy Varlığı, $T = 108, n - T = 24$	82
5.8	Aylık Portföy Varlığı, $T = 96, n - T = 36$	84
5.9	Aylık Portföy Varlığı, $T = 84, n - T = 48$	85
5.10	Aylık Portföy Varlığı, $T = 72, n - T = 60$	86
5.11	Aylık Portföy Varlığı, $T = 88, n - T = 44$	87

A.1	Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 942, n - T = 63$	99
A.2	Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 879, n - T = 126$	100
A.3	Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 753, n - T = 252$	101
A.4	Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 670, n - T = 335$	102
A.5	Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 126, n - T = 6$	103
A.6	Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 120, n - T = 12$	104
A.7	Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 108, n - T = 24$	105
A.8	Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 96, n - T = 36$	106
A.9	Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 88, n - T = 44$	107
A.10	Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 84, n - T = 48$	108
A.11	Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 72, n - T = 60$	109
B.1	Portföy Varyans Tahmin Hatası, Hata Kareler Ortalamalarının Karakökü	110
B.2	Portföy Ağırlıkları Tahmin Hatası, Hata Kareler Ortalamalarının Karakökü	111
B.3	Portföy Riski, Hata Kareler Ortalamalarının Karakökü	112
B.4	Portföy Brüt Risk Toplamı, Hata Kareler Ortalamalarının Karakökü	113
B.5	Kovaryans Matris Tahmini Hesaplama Süresi	114

Bölüm 1

Giriş

Portföy optimizasyonu ve risk yönetiminde hisse senedi getirilerinin kovaryans matrisi Σ ve tersinin Σ^{-1} (kesinlik matrisi) tahmini temel konulardan biridir. Markowitz (1952) tarafından önerilen portföy optimizasyonunda en çok kullanılan portföy seçim modeli olan Markowitz ortalama varyans modelinde amaç, p adet varlıktan oluşturulacak mümkün portföyler kümesi içinden beklenen maksimum getiri ile minimum risk arasında dengeyi sağlayacak optimal portföy ağırlık vektörünü bulmaktır. Diğer bir ifadeyle, modelde hedeflenen getiri ρ kısıtını sağlayan minimum varyansa yani minimum portföy riskine sahip optimal portföyü bulmak amaçlanmıştır. Markowitz (1952) çalışmasında riski düşürmede etkin çeşitlendirmenin önemine vurgu yapmıştır. Markowitz etkin çeşitlendirmesi; portföyü oluşturan hisse senetleri arasındaki korelasyondan yararlanıp, portföy içindeki hisse senetleri ağırlıklarını değiştirerek portföy riskini düşürmeyi amaçlamaktadır. Bu yüzden, doğru ve stabil hisse senedi ağırlıkları elde etmede Σ^{-1} tahmini büyük bir önem arz etmektedir. Optimal portföy ağırlık vektöründe her bir hisse senedinin portföy içindeki ağırlığını belirlemede hisse senedi getirilerinin kesinlik matrisi Σ^{-1} tahmini gerekmektedir. Bu amaçla, portföy risk analizinde Σ ve portföy tahsisinde Σ^{-1} 'nin tahminine yönelik birçok yaklaşım önerilmiştir. Kovaryans matrisinin tahmininde hisse senedi sayısı p , gözlem sayısından n küçük olduğunda $p < n$, sapmasız ve Σ ile tutarlı örneklem kovaryans mat-

risi $\hat{\Sigma}_{SAM}$ yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak, yaygın kullanım alanı bulan bu teknik büyük örneklem grupları için birtakım zorluklar barındırmaktadır. $n \ll p$ olduğu durumda $\hat{\Sigma}_{SAM}$ pozitif tanımlı değildir, dolayısıyla tersi alınamamaktadır (bakınız, Bölüm 2.3).

İstatistik literatüründe bu tür veri yüksek boyutlu (*high-dimensional*) veya küçük n büyük p veri olarak adlandırılmaktadır. Burada esas engel, kovaryans matrisinde $(p(p+1)/2)$ sayıda kısıtlandırılmış parametrenin tahmininin gerekmesinden kaynaklanmaktadır. Boyutsallık sorununu çözenin en doğal yolu geniş veri setinden küçük boyutlu veri seti çıkarmaktır. Bu durumda Σ ve Σ^{-1} 'i doğru tahminlemek için seyreklik (*sparsity*) varsayımlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tür seyreklik varsayımı ve düzenleme (*regularization*) yaklaşımına dayalı yöntemler köşegen olmayan terimlerin sıfıra doğru budanmasını (*truncate*) esas almaktadır. Seyreklik; tahminlenecek çok sayıda parametrenin sıfıra eşit olduğunu ve sıfır olmayan eleman sayısının ise yavaşça artmak üzere sınırlandırıldığını ifade etmektedir. Diğer bir ifadeyle, seyreklik koşulu hisse senedi getirileri arasındaki çoğu kovaryansın sıfır ya da sıfıra yakın olmasını sağlamaktadır. Bu tür tahminler son yıllarda istatistik literatüründe sıkça kullanılmaya başlanmış olup seyrek tahminler olarak adlandırılmaktadır.

Yüksek boyutluluk ve büyük boyutlu kovaryans matrislerini tahminlemede meydana gelen zorluklar nedeniyle istatistik alanında çeşitli yaklaşımlar önerilmiştir (bakınız, Bölüm 3.1). Yüksek boyutlu modellerde seyreklik varsayımı altında küçülme tahminleriyle (*shrinkage estimator*) Σ ve Σ^{-1} tahmin yöntemleri istatistik literatüründe önemli ölçüde kullanılırken, finans literatüründe bilindiği kadarıyla Borsa İstanbul A.Ş. (BIST) verileri üzerinde $n \ll p$ koşulu altında, Markowitz portföy optimizasyonunda pozitif tanımlı olmayan kovaryans matrisinin ampirik Gram matris tersini tahminlemede cezalandırma (*penalized*) ve düzenleme tekniklerine dayalı yöntemleri içeren herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır ve bu nedenle tezin bu boşluğu doldurması beklenmektedir.

Buradan hareketle tezin ana konusu, Markowitz portföy seçim modelinde boyutsallık sorununu aşmak için ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon yaklaşımından (bakınız, Bölüm 3.4.1) yararlanarak kovaryans matrisinin tersini doğru tahminlemek ve geçerliğini BIST piyasasında test etmektir. Bu yaklaşım ile tersi alınamayan ampirik Gram matrisi için yaklaşık ters matrisinin (*approximate inverse matrix*) $\hat{\Theta}$ (bakınız, Bölüm 3.4.1) alınması önerilmektedir. Bu yöntem, yüksek boyutlu kovaryans matrisinin uniform tutarlı tahmincisi olmakla birlikte değişen varyans ve yüksek boyutluluğu eş anl olarak ele almaktadır.

Lasso cezalı Nodewise regresyon, $n \ll p$ iken tahmin edilecek veriyi en iyi açıklayan parametrelerin sayısını azaltarak $\hat{\Theta}$ matrisinde seyrekliği arttırmaktadır. Dolayısıyla, oluşturulan $\hat{\Theta}$ matrisinde ‘verinin konuşması’ (*Let the data speak*) ilkesi benimsenmiş olup, ilişkisiz hisse senetlerini verinin belirlemesine izin verilmektedir. Seyreklik koşulları altında, $\hat{\Theta}$ ’nın pek çok köşegen dışı elemanlarının sıfıra doğru budanmasının tahmin edilen risk bakımından optimal portföy performansını arttırdığı teorik ve ampirik olarak test edilmiştir. Ayrıca, $\hat{\Theta}$ matrisinde ortaya çıkan hata sıfıra yakınsayan bir sabit ile üst sınırlıdır (upper-bounded). Diğer bir ifadeyle, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonu ile hesaplanan $\hat{\Theta}$ matrisinde ortaya çıkan tahmin hatasının asimptotik olarak önemsiz denilebilecek kadar küçük olması daha kesin ve dirençli optimal portföy ağırlıkları belirlemede ve böylece portföy riskini düşürmede büyük bir öneme sahiptir.

Ayrıca, literatürde yer alan yüksek boyutlu kovaryans matris tahmincileriyle $\hat{\Theta}$ ’nın performansı simülasyon yoluyla ve ampirik olarak karşılaştırılmıştır. Bu tahminciler, örneklem kovaryans matris tahmincisi, Ledoit ve Wolf (2004)’un küçülme tahmincisi, Fan vd. (2008)’in gözlemlenen Faktör modeline dayalı kovaryans matris tahmincisi ve Fan vd. (2015)’in POET (Principal Orthogonal Complement Thresholding) tahmincisi olarak belirlenmiştir. Bildiğimiz kadarıyla literatürde BIST üzerine gözlemlenen Faktör modeline dayalı kovaryans matris tahmincisi ve POET tahmincisine ilişkin bir çalışma bulunmamaktadır. Ayrıca, $n \ll p$ iken BIST üzerine söz konusu kovaryans matris tahmincilerinin karşılaştırmalı analizine de rastlanmamıştır. Bu sebeple, bu tezin $n \ll p$ durumunda

portföy seçim modelinde BIST üzerine yapılmış öncü bir çalışma olarak literatüre önemli bir katkısı bulunmaktadır.

Tezin bölümleri şu şekilde tasarlanmıştır. Tezin ikinci bölümünde, global minimum varyans ve Markowitz optimal portföyleri ve finans literatüründe sıkça kullanılan mevcut kovaryans matrisi tahmin yaklaşımları ele alınacaktır. Üçüncü bölümde, En Küçük Kareler (EKK) tahmincisinin yüksek boyutlu veri tahminlemedeki başarısızlığına değinilerek ℓ_0 , ℓ_1 ve ℓ_2 normlarına dayanan seyrek tahminciler detaylı bir şekilde incelenecektir. Ayrıca, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonu ve $\hat{\Theta}$ matrisinin elde edilişi ve algoritması verilecektir. Bunun yanı sıra, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonu ve $\hat{\Theta}$ matrisinin asimtotik özelliklerine, global minimum varyans ve Markowitz ortama varyans portföylerinin yakınsama oranları ve kovaryans matrisi hata ölçüm kriterleri hakkında bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, iki farklı veri türetme süreci izlenerek simülasyon çalışmaları yapılmış ve kovaryans matris tahmincilerinin karşılaştırmalı analizleri yapılmıştır. Beşinci bölümde, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonuyla tahmin edilen global minimum varyans ve optimal Markowitz ortalama varyans portföylerinin literatürde mevcut kovaryans matris tahmincileri (bakınız, Bölüm 2.3) ile oluşturulan portföy performanslarının ampirik olarak karşılaştırmalı analizine yer verilmiştir. Portföy performanslarının ölçülmesinde kayan-pencere (*rolling-window*) yaklaşımıyla hesaplanan örneklem dışı varyans, Sharpe oranı ve işlem devir hızı (*turnover*) gibi performans kriterlerinden yararlanılmıştır. Böylece, farklı yatırım ufuklarına sahip yatırımcı için en düşük riske sahip optimal portföy stratejilerinin belirlenmesi ve önerilmesi amaçlanmaktadır. Tezin son bölümü ise, sonuçlarının değerlendirilmesi ve yorumlanmasına ayrılmış, ayrıca gelecek çalışmalar hakkında da bilgi verilmiştir.

Bölüm 2

Portföy Optimizasyonunda Kovaryans Matris Tahmini

2.1 Literatür Taraması

Finans literatüründe en çok kullanılan portföy optimizasyonu olan Markowitz ortalama varyans modelinde Σ 'dan ziyade Σ^{-1} 'ne ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaçla, Σ ve Σ^{-1} 'in tahminine yönelik birçok yaklaşım önerilmiştir. Portföy optimizasyon prosedüründeki Σ 'nın tahminlenmesine yönelik yaklaşımların çoğu öncelikle Σ 'nın istenmeyen özelliklerinin ele alınmasına ve sonrasında tersinin alınmasına odaklanmaktadır. Bu doğrultuda, $p \ll n$ olduğunda, $\hat{\Sigma}_{SAM}$ yaygın olarak kullanılan bir metod olarak karşımıza çıkmaktadır. Ancak, Daniels ve Kass (2001) tarafından da ifade edildiği gibi p 'nin n 'ye yakın veya eşit olduğu durumda Σ 'nin en büyük özdeğerinin yukarıya ve en küçük özdeğerinin ise aşağıya sapmalı olması nedeniyle $\hat{\Sigma}_{SAM}$ güvenilir değildir ve büyük oranda tahmin hatası içermektedir. Bu problemi ortadan kaldırmak için Σ 'nin özdeğerlerinin küçülme dönüşümü yoluyla Stein-tipi tahminciler kullanılmıştır, detaylar için bakınız, Stein (1956), Efron ve Morris (1976), Dey ve Srinivasan (1985), Jorion (1986), Yang ve Berger (1994), Dey (1987), Tsukuma ve Konno (2006).

Benzer uygulamalar için bakınız, Schäfer ve Strimmer (2005), Warton (2011), Kubokawa ve Srivastava (2008). Büyük örneklem grupları için bu teknikler kullanılamaz hale gelmektedir. Yüksek boyutluluk yani $n \ll p$ olduğu durumda kovaryans matrisi pozitif tanımlı değildir, dolayısıyla tersi alınamamaktadır (Stein, 1956). Bir örnekle açıklamak gerekirse; $p = 2000$ olduğu durumda, kovaryans matrisinde tahmin edilmesi gereken 2 milyondan fazla parametre bulunmaktadır. Buna karşın, uzun zaman serisi verisine sahip olmayan¹ hisse senetlerinin kovaryans matrisinin tahmin edilecek parametre sayısını azaltacak bir yapı uygulamadan tahminlenmesi zor hale gelmekte ve tekillik (*singularity*) problemiyle karşılaşılmaktadır (Fan vd. (2012), Jagannathan ve Ma (2003)). Michaud (1989) tarafından da ifade edildiği gibi, yetersiz veri genel olarak istikrarsızlığa ve kovaryans matrisinin kötü koşullanmasına (*ill-conditioned*) neden olmaktadır. Kötü koşullanmış ve tersi alınamayan hisse senetleri kovaryans matrisi genel olarak tahmin hatalarını arttırmakta ve istikrarsız portföyler ile sonuçlanmaktadır. Literatürde yetersiz örneklem boyutundan dolayı Markowitz ortalama varyans portföy optimizasyonu stratejisinin kötü performansı ile ilgili ampirik bulgular Brodie vd. (2009), Jagannathan ve Ma (2003), Demiguel, Garlappi, Nogales ve Uppal (2009) çalışmalarında bulunabilir. Ayrıca, Green ve Hollifield (1992), Jagannathan ve Ma (2003) kesinlik matrisini ve beklenen getirileri tahmin etmek için uzun zaman serisi verilerinin gerekli olduğunu belirtmişlerdir. Finans literatüründe yüksek boyutlu kovaryans matrisinin söz konusu istenmeyen özelliklerinin üstesinden gelebilmek için bazı yaklaşımlar önerilmiştir. İlk geleneksel çözüm, yüksek frekanslı veriler kullanmaktır. Örneğin; aylık getiriler yerine günlük getiriler kullanılmasıdır, bakınız Liu (2009). Böylece, veri setinin artırılması amaçlanmaktadır.

İkinci yaklaşım, portföy ağırlık vektöründe pozitif yatırım kısıtı diğer bir deyişle açığa satış kısıtı uygulamaktır. Açığa satış kısıtının uygulandığı portföylerde hisse senedi ağırlıkları sıfır değerini alacak şekilde ayarlanabilmektedir. Portföy içinde ağırlıkları ayarlanabilen hisse senetlerinin varlığıyla söz konusu bu hisse senetlerinin kovaryans matrisini

¹Borsada bir yıllık işlem günü $n = 252$ 'den oluşmaktadır.

etkilemesi engellenmektedir. Bu anlamda, Jagannathan ve Ma (2003), tahmin hatalarını azaltmak için açığa satış kısıtının kovaryans matrisi tahmini üzerinde küçülme benzeri (*shrinkage-like*) etki oluşturduğunu göstermiştir. Ancak, DeMiguel, Garlappi ve Uppal (2009), optimizasyon sürecine açığa satış kısıtı ilave etmenin kovaryans matrisi tahmin hatalarını azaltmadığını belirterek saf (*naïve*) $1/N$ eşit ağırlıklı portföy çeşitlendirmesi stratejisini önermişlerdir.

Üçüncü yaklaşım olarak Σ 'nın en küçük özdeğerinin sıfır olduğu durumda tersi alınabilir kovaryans matrisine ulaşmak için küçülme tahmincileri kullanılmıştır. Ledoit ve Wolf (2003, 2004) farklı küçülme teknikleri uygulayarak sırasıyla Sharpe (1963)'in tekli endeks (*single-index*) matrisi veya birim matrisi ile $\hat{\Sigma}_{SAM}$ 'nin dışbükey kombinasyonundan oluşan yeni bir kovaryans matrisi önermişlerdir. Diğer bir ifadeyle, Ledoit ve Wolf (2003) $n \rightarrow \infty$ iken p 'nin sabit ve sonlu olduğu durumda $\hat{\Sigma}_{SAM}$ ile Sermaye Varlıkları Fiyatlandırma Modeline (CAPM) dayanan kovaryans matrisinin ağırlıklı ortalamasından oluşan yeni bir kovaryans matrisi önermiştir. Ledoit ve Wolf (2004) ise, $\hat{\Sigma}_{SAM}$ ve birim matrisi kullanarak yeni bir kovaryans matrisi elde etmiştir.

Bodnar vd. (2014), Ledoit ve Wolf (2004)'un çalışmasını hedef matrisin iz normuyla uniform olarak sınırlandırılmış (uniformly bounded) rastgele simetrik pozitif tanımlı olacak şekilde genel doğrusal küçülme tahmincisi kullanarak genişletmiştir. Kourtis vd. (2012) $\hat{\Sigma}_{SAM}$ 'in tersi ile bir hedef matrisin doğrusal kombinasyonundan oluşan yeni bir matris önermiştir. Kourtis vd. (2012)'in yaklaşımı $p \ll n$ varsayımını gerektirmektedir. Ledoit ve Wolf (2012) ise $p \ll n$ durumunda örneklem özdeğerlerinin doğrusal olmayan küçülme yaklaşımı önermiştir. Buna ek olarak, Ledoit ve Wolf (2015) söz konusu doğrusal olmayan küçülme yaklaşımını $n \ll p$ durumu için genişletmiştir. Ledoit ve Wolf (2004, 2015) çalışmalarında yalnızca kovaryans matris tahminlemesine odaklanmış ve bu çalışmalarda herhangi bir portföy teorisine yer vermemiştir.

Son yöntem olarak, kovaryans matrisindeki hesaplanacak parametrelerin sayısını azaltmak amacıyla Faktör modelleri kullanılmıştır, bakınız Fan vd. (2011), Fan vd.

(2013). Ross (1976, 1977) tarafından ortaya konulan Arbitraj Fiyatlama Teorisi (Arbitrage Pricing Theory) ve Chamberlain ve Rothschild (1983) tarafından önerilen çoklu faktör modellerinden yola çıkarak Fan vd. (2008) yüksek boyutluluğu azaltmak ve kovaryans matrisini tahminlemek için çoklu faktör modelini önermiştir. Fan vd. (2008) çalışmasında gözlemlenen Faktör modeline dayalı elde edilen portföy performansının örneklem kovaryans matrisine dayalı portföy performansından daha üstün sonuçlar verdiğini göstermiştir. Yakın zamanda ise Fan vd. (2015) gözlemlenmeyen faktörlerin varlığına dayalı POET tahmincisini geliştirmiştir. Chen vd. (2015) p 'nin n 'e orantılı veya $n \ll p$ olduğu durum için yüksek boyutlu kovaryans matrisinin Faktör modeline dayalı tahmincisini önermiştir. Son olarak, Bodnar vd. (2016) ise tekil kovaryans matrisine yönelik geliştirilmiş ters Wishart (GIW) random matrisini türeterek çalışmasında elde edilen matrisin dağılım özelliklerini incelemiştir. Chen vd. (2015) ve Bodnar vd. (2016) ise çalışmalarında Markowitz portföy getirisinin maksimizasyonuna dayalı bir yaklaşım sunmuşlardır. Literatürde yer alan tüm bu yaklaşımlar öncelikle tersi alınabilir kovaryans matrisi türetilmesine, ardından optimal portföy ağırlıklarının hesaplanmasına odaklanmaktadır.

Bu bölümde, global minimum varyans portföyü ve Markowitz ortalama varyans portföyü optimizasyonu hakkında temel bilgiler verilerek portföy ağırlıklarının ve portföy varyansının türetilişi incelenecektir. Ayrıca, yukarıda bahsi geçen literatürde var olan kovaryans matrisi tahmincilerinden Ledoit ve Wolf (2003, 2004)'un küçülme tahmincileri, Fan vd. (2008)'in gözlemlenen Faktör modeline dayalı tahmincisi ve son olarak da Fan vd. (2015)'in POET tahmincisi ele alınacaktır.

2.2 Optimum Portföy Dağılımı ve Risk Değerlendirmesi

2.2.1 Ortalama Varyans Portföyü

Markowitz ortalama varyans portföy seçim modelinde $(n \times 1)$ boyutunda durağan risksiz faiz oranını aşan getiri (excess return) vektörü $\{R_t\}_{t=1}^n$ şeklinde gösterilmektedir. p riskli hisse senedinin beklenen getirisi $\mathbb{E}[R_t] = \mu$, $\mu = (\mu_{1t} \dots, \mu_{pt})'$ ve aşırı getirilerin tam ranklı kovaryans matrisi ise $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\Sigma = \mathbb{E}[(R_t - \mu)(R_t - \mu)']$ şeklinde gösterilmektedir. $w \in \mathbb{R}^p$ her bir hisse senedine yatırılan oranı temsil eden ağırlık vektörünü ifade etmektedir.

Markowitz portföy optimizasyonunda amaç, belirli bir hedeflenen getiri düzeyi ρ için minimum varyansa yani minimum portföy riskine sahip optimal portföyü bulmaktır. Optimal portföyü bulmak (2.1)'deki kısıtlandırılmış kuadratik optimizasyon probleminin çözümünü gerektirmektedir. Markowitz ortalama varyans portföy seçim modeli (Markowitz, 1952) aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:

$$\begin{aligned} \underset{w}{\operatorname{argmin}} \quad & w' \Sigma w \\ \text{st.} \quad & w' \mathbf{1}_p = 1 \\ & w' \mu = \rho \end{aligned} \tag{2.1}$$

burada, $\mathbf{1}_p = (1, \dots, 1)'$ şeklindedir. $w' \Sigma w$ portföy varyansını göstermektedir. Burada bütçe kısıtı ($w' \mathbf{1}_p = 1$) ile yatırımcının sahip olduğu toplam tutarın tamamının hisse senedi yatırımında gerçekleştirilmesi sağlanmıştır. Hedeflenen getiri kısıtı ($w' \mu = \rho$) ise arzu edilen beklenen portföy getirisini ifade etmektedir. Hisse senetlerinin açığa satışına izin verildiği ve dolayısıyla ağırlık değerlerinin negatif olabildiği varsayılmıştır. Lagrange ve birinci düzey koşullarının çözümünden elde edilen optimal sonuca (2.2)'de yer verilmiştir.

$$w_M = \frac{D - \rho B}{AD - B^2} \Sigma^{-1} 1_p + \frac{\rho A - B}{AD - B^2} \Sigma^{-1} \mu \quad (2.2)$$

burada, $A = 1_p' \Sigma^{-1} 1_p$, $B = 1_p' \Sigma^{-1} \mu$ ve $D = \mu' \Sigma^{-1} \mu$ olarak gösterilmektedir. Eğer Σ pozitif tanımlı ise, $A > 0$ ve $B > 0$ 'dır. Cauchy-Schwarz eşitsizliği gereği $AD - B^2 > 0$ ise sistem bir çözüme sahiptir.

Markowitz ortalama varyans portföyünün varyansı ise (2.3)'te gösterilmektedir:

$$w_M' \Sigma w_M = \frac{A\rho^2 - 2B\rho + D}{AD - B^2} \quad (2.3)$$

2.2.2 Global Minimum Varyans Portföyü

Global minimum varyans portföyünde beklenen getiri kısıtı olmaksızın varyans minimizasyonu amaçlanmaktadır. Tüm hisse senetlerinin eşit beklenen getirilere sahip olduğu varsayılmaktadır. (2.2)'de w yerine w_G , ρ yerine ise B/D koyarsak, tüm optimal portföyler yalnızca risklerine göre farklılık gösterecektir. Burada w_G kısıtlandırılmamış ağırlıkları ifade etmektedir. Buna göre tek etkin portföy, en küçük riski taşıyan portföy, yani global minimum varyans portföyüdür. Global minimum varyans portföyü aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:

$$w_G = \underset{w}{\operatorname{argmin}}(w' \Sigma w), \quad \text{st.} \quad w' 1_p = 1 \quad (2.4)$$

Global minimum varyans portföy ağırlıkları aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$w_G = \frac{\Sigma^{-1} 1_p}{1_p' \Sigma^{-1} 1_p} \quad (2.5)$$

Global minimum varyans portföyünün bileşimi sadece hisse senedi getirilerinin kesinlik matrisine Σ^{-1} dayanmaktadır.

Global minimum varyans portföy varyansı ise aşağıda yer almaktadır:

$$w'_G \Sigma w_G = (1'_p \Sigma^{-1} 1_p)^{-1}, \quad (2.6)$$

(2.2) ve (2.5) optimal portföy ağırlıklarının büyük ölçüde Σ^{-1} 'ne bağlı olduğunu göstermektedir. Portföy, Σ 'daki ve Σ^{-1} 'deki küçük değişikliklere karşı çok duyarlıdır. Özellikle hisse senetlerin sayısı p , gözlem sayısı n 'i aştığında, rank eksikliği (rank-deficiency) ampirik kovaryans matrisini tekil ve tersi alınamaz hale getirmektedir. Bu durum, $w' \Sigma w = 0$ yapan portföyde $w \neq 0$ olan bir dizi ağırlığın olması anlamına gelmektedir. Tahmini riski sıfır olan bu ağırlıklar makul bir portföy oluşturmamaktadır (Markowitz, 1990).

2.3 Kovaryans Matris Tahmininde Kullanılan Mevcut Yöntemler

2.3.1 Örneklem Kovaryans Matris Tahmincisi

Literatürde $\Sigma = \text{cov}(\mathbf{R}_t)$ 'ı yansıtabilecek \mathbf{R}_t 'nin örneklem kovaryans matrisi $\hat{\Sigma}_{SAM}$ ile (2.7)'de yer alan şekilde tahmin edilmiştir.

$$\hat{\Sigma}_{SAM} = (n-1)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{R}' - n(n-1)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{1}_p \mathbf{1}_p' \mathbf{R}' \quad (2.7)$$

burada $\mathbf{1}_p, \mathbf{1}_p = (1, \dots, 1)'$ vektörünü temsil etmektedir. $\hat{\Sigma}_{SAM}, \Sigma$ 'nin *pointwise root-n* tutarlı tahmincisi olduğu varsayılmaktadır. Ancak, $n \ll p$ olduğunda $\hat{\Sigma}_{SAM}$ tekillik problemiyle karşılaşarak uygun bir tahminci olmaktan çıkmaktadır. $\hat{\Sigma}_{SAM}$ 'in asimptotik özellikleri Fan vd. (2008, 2012) tarafından ele alınmıştır. Fan vd. (2008) $n \ll p$ durumunda $\|\hat{\Sigma}_{SAM} - \Sigma\|_{\Sigma} = O_p(\sqrt{p/n})$ yakınsadığını göstermiştir. $p < n$ olduğu durumda

bile örneklem kovaryans matrisinin Frobenius norm (bakınız, Bölüm 3.8) altında yavaş (weak) bir yakınsama oranı olduğunu ortaya çıkarmıştır.

2.3.2 Kovaryans Matrisinin Küçülme Tahmincisi

Ledoit ve Wolf (2003), $\hat{\Sigma}_{SAM}$ ile Sharpe (1963)'ın tek endeks modeline ($K = 1$, CAPM) dayalı kovaryans matrisinin ağırlıklı ortalamasından oluşan yeni bir kovaryans matrisi $\hat{\Sigma}_{LW1F}$ geliştirmiştir. $\hat{\Sigma}_{LW1F}$ 'nin oluşturulmasında aşağıdaki aşamalar izlenmektedir:

$$R_{it} = \alpha_i + b'_i f_t + u_{it} \quad (2.8)$$

burada, $i = 1, \dots, p$ ve $t = 1, \dots, n$; b_i , $K \times 1$ faktör bileşen (factor loadings) vektörü; f_t ise u_{it} ile ilişkisiz $K \times 1$ boyutunda piyasa getiri vektörünü göstermektedir. Hisse senetleri içinde varyans sabittir, $\text{var}(u_{it}) = \delta_{ii}$. Tek endeks modeli hisse senedi getirilerinin kovaryans matrisi tahmincisi aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$F = \sigma_m^2 \mathbf{b} \mathbf{b}' + \mathbf{D} \quad (2.9)$$

burada, σ_m^2 piyasa getirilerinin varyansını; \mathbf{b} parametre eğim vektörünü; \mathbf{D} artık varyanslarının d_{ii} diagonal matrisini ifade etmektedir, detaylı bilgi için bakınız Ledoit ve Wolf (2003). Hisse senedi getirilerinin kovaryans matrisi için küçülme tahmincisi (2.10)'de yer almaktadır.

$$\hat{\Sigma}_{LW1F} = \alpha \hat{F} + (1 - \alpha) \hat{\Sigma}_{SAM} \quad (2.10)$$

burada $\alpha \in [0, 1]$ optimal küçülme yoğunluğunu (shrinkage intensity) göstermekte ve örneklem kovaryans matrisinin tek endeks kovaryans matrisine doğru küçülme miktarını belirlemektedir. Ledoit ve Wolf (2003) çalışmalarında α 'yı kovaryans matrisinin tersine bağlı olmayan tahmin edilen küçülme matrisi ile gerçek kovaryans matrisi arasın-

daki mesafenin Frobenius normunu kapsayan bir karesel kayıp fonksiyonunu minimize ederek tahminlemişlerdir. Ayrıca, çalışmasında $n \rightarrow \infty$ p 'nin sabit ve sonlu olduğu optimal portföyleri incelemiştir. Bu yöntemlerin amacı, Frobenius norm'a dayanan tahmin edilen kovaryans matrisi ve gerçek kovaryans matrisi arasındaki farktan oluşan karesel kayıp fonksiyonlarını minimize etmektir.

Diğer yöntem, Ledoit ve Wolf (2004) tarafından ortaya konulan asimptotik olarak iyi koşullanmış ve tersi alınabilir kovaryans matrisi, $\hat{\Sigma}_{SAM}$ ve birim matrisinin I optimum dışbükey doğrusal kombinasyonundan oluşmaktadır.

$$\hat{\Sigma}_{LWID} = \theta \nu I + (1 - \theta) \hat{\Sigma}_{SAM} \quad (2.11)$$

burada, $\theta = \frac{\beta^2}{\delta^2}$ ve $(1 - \theta) = \frac{\alpha^2}{\delta^2}$.

νI küçülme hedefini ifade etmektedir. Küçülme parametresi olarak adlandırılan $\theta \in [0, 1]$ hisse senedi getirilerinin kovaryans matrisinin küçültülmesinde ne kadar yapının uygulandığını belirlemektedir. Gerçek kovaryans matrisi tahmininde şu katsayılar önemli bir rol oynamaktadır: $\nu = \langle \Sigma, I \rangle$, $\alpha^2 = \|\Sigma - \nu I\|^2$, $\beta^2 = \mathbb{E}[\|\Sigma_{SAM} - \Sigma\|^2]$ ve $\delta^2 = \mathbb{E}[\|\Sigma_{SAM} - \nu I\|^2]$. Bütün sonuçların asimptotik olduğunu ifade etmek için katsayıları n altsimgesi eklenmiştir. Böylece katsayıları yeniden ifade edersek: $\nu_n = \langle \Sigma_n, I_n \rangle_n$, $\alpha_n^2 = \|\Sigma_n - \nu_n I_n\|^2$, $\beta_n^2 = \mathbb{E}[\|\Sigma_{SAM,n} - \Sigma_n\|_n^2]$ ve $\delta_n^2 = \mathbb{E}[\|\Sigma_{SAM,n} - \nu_n I_n\|_n^2]$.

(2.11)'te gözlemlenemeyen skalerlerin tutarlı tahminlerle değiştirilmesi ve asimptotik özelliklerin değişmediğini göstermesi, kovaryans matrisinin gerçek (*bona fide*) tahmincisi (2.12)'deki gibi gösterilmektedir.

$$\Sigma_{SAM,n}^* = \frac{b_n^2}{d_n^2} m_n I_n + \frac{a_n^2}{d_n^2} \Sigma_{SAM,n} \quad (2.12)$$

burada, $m_n = \langle \Sigma_{SAM,n}, I_n \rangle_n$, $d_n^2 = \|\Sigma_{SAM,n} - m_n I_n\|^2$ ve $a_n^2 = d_n^2 - b_n^2$ (bakınız, Ledoit ve Wolf (2004) çalışmasında **Lemma 3.2**, **Lemma 3.3**, **Lemma 3.4** ve **Lemma 3.5**).

Bütün n 'ler için, $\mathbb{E}[m_n] = \nu_n$ ve $m_n - \nu_n, n \rightarrow \infty$ giderken karesel ortalama (dördüncü moment) sıfıra yakınsar. $\delta_n^2 = \mathbb{E}[\|\Sigma_{SAM,n} - \nu_n I_n\|_n^2]$ için bir tutarlı tahmincisi aynı zamanda örneklem dengi (counterpart)'dir. $b_n^2 = \min(\bar{b}_n^2, d_n^2)$ ifade etmektedir. Burada $\bar{b}_n^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \|x_k^n (x_k^n)^t - \Sigma_{SAM,n}\|_n^2$. $p_n \times 1$ boyutunda bir vektör $x_k^n, k = 1, \dots, n$ için X_n matrisinin k 'nci sütununu göstermektedir. Bu bağlamda, $\Sigma_{SAM,n} = n^{-1} X_n X_n^t$, $\Sigma_{SAM,n} = n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k^n (x_k^n)^t$ olarak da yazılabilir. $\Sigma_{SAM,n}, x_k^n (x_k^n)^t$ 'in ortalamasıdır. Tüm k 'lar için $x_k^n (x_k^n)^t$ i.i.d. (independent and identically distributed) olduğundan dolayı, hata $\beta_n^2 = \mathbb{E}[\|\Sigma_{SAM,n} - \Sigma_n\|_n^2]$ her birinin ortalamadan ne kadar saptığını göstererek tahmin edilebilmektedir. Ayrıca, $\beta_n^2 \leq \delta_n^2, \alpha_n^2$ tahmincisinin negatif olmamasını sağlamaktadır. $\Sigma_{SAM,n}^*, \Sigma_{LWID}$ ile aynı asimptotik özelliklere sahiptir. Böylece, gözlemlenemeyen parametrelerden $\nu_n, \alpha_n^2, \beta_n^2$ ve δ_n^2 kaynaklanan hata tahminciler tarafından gözardı edilebilmektedir. Ledoit ve Wolf (2004), p, n ile birlikte ∞ iken *genel* asimptotik özellikler üzerine çalışmışlardır. *Kolmogorov* asimptotiği ile ilgili tek kısıt p/n oranının sonlu pozitif bir sabit ile sınırlandırıldığı varsayılmıştır. Ayrıca, Ledoit ve Wolf (2004) asimptotik olarak optimal küçülme parametresinin Frobenius normuna dayanan karesel bir kayıp fonksiyonuna göre tutarlı olarak tahmin edilebileceğini göstermişlerdir. Uygulamada küçülme parametresini tahmin etmek küçülme yöntemlerinin en zorlayıcı kısmıdır. Küçülme yöntemleri kovaryans matrislerinin tahmin hatalarını azaltmada oldukça etkili yöntemler olmasına rağmen, matris toplamlarının tersine çevrilme karmaşıklığından dolayı optimize edilmesi zor yöntemlerdir.

2.3.3 Yaklaşık Faktör Modelleri ile Kovaryans Matris Tahmini

2.3.4 Gözlemlenen Faktörler

Fan vd. (2008), Σ tahminine yönelik çoklu faktör modellerini önermiştir.

Çoklu faktör modelleri aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:

$$R_{it} = b_i' + f_t + u_{it} \quad (2.13)$$

burada $i = 1, \dots, p$ ve $t = 1, \dots, n$; b_i , $(K \times 1)$ boyutunda bilinmeyen faktör bileşen vektörünü; f_t , u_i ile ilişkisiz $(K \times 1)$ boyutunda gözlemlenen ortak faktör vektörünü göstermektedir.

(2.13)'i matris şeklinde yeniden ifade edersek:

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{B}\mathbf{f}_t + \mathbf{u}_t \quad (2.14)$$

burada, $\mathbf{R}_t = (R_{1t}, \dots, R_{pt})'$; $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p)'$, $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, \dots, b_{iK})'$; $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_K)'$ ve $\mathbf{u} = (u_{1t}, \dots, u_{pt})'$. $\mathbb{E}(\mathbf{u}_t \mid \mathbf{f}_t) = 0$ ve $\text{cov}(\mathbf{u}_t \mid \mathbf{f}_t) = \Sigma_u$ diyagonal olduğu varsayılmaktadır.

Gözlemlenen faktör vektörü \mathbf{B} , EKK yöntemi ile tahminlenmektedir: $\hat{\mathbf{B}} = (\hat{\mathbf{b}}_1, \dots, \hat{\mathbf{b}}_p)'$,

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \underset{\mathbf{b}_i}{\text{argmin}} \frac{1}{np} \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^p (R_{it} - \mathbf{b}_i' \mathbf{f}_t)^2$$

$$\hat{u}_{it} = R_{it} - \hat{\mathbf{b}}_i' \mathbf{f}_t$$

$\hat{\mathbf{u}}_t = (\hat{u}_{1t}, \dots, \hat{u}_{pt})'$ olsun. Artıkların kovaryans matrisi şu şekilde oluşturulmaktadır:

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\mathbf{u}}_t \hat{\mathbf{u}}_t' \quad (2.15)$$

(2.15) aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$\text{diag}(n^{-1} \hat{\mathbf{u}}_t \hat{\mathbf{u}}_t')$$

(2.14) modeli aracılığıyla faktör modeline dayanan kovaryans matrisi Σ_{FAC} :

$$\Sigma_{FAC} = \mathbf{B} \text{cov}(\mathbf{f}_t) \mathbf{B}' + \Sigma_u. \quad (2.16)$$

$\text{cov}(\mathbf{f}_t)$ örneklem kovaryans matrisi ile tahminleyebiliriz:

$$\widehat{\text{cov}}(\mathbf{f}_t) = (n-1)^{-1} \mathbf{X} \mathbf{X}' - \{n(n-1)\}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{1} \mathbf{1}' \mathbf{X}'$$

burada $\mathbf{X} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ ve 1 ise n -boyutlu birlerden oluşan bir vektördür.

Dolayısıyla, faktör modeline dayalı kovaryans matris tahmin edicisi (2.17)'deki gibi elde edilmektedir:

$$\hat{\Sigma}_{FAC} = \hat{\mathbf{B}} \widehat{\text{cov}}(\mathbf{f}) \hat{\mathbf{B}}' + \hat{\Sigma}_u \quad (2.17)$$

Fan vd. (2008) Frobenius norm ve Entropy kaybı (Entropy loss) altında asimptotik olarak n artarken $p \rightarrow \infty$ ve $K \rightarrow \infty$ kovaryans matrisi tahmin hatalarını incelemişlerdir. Ayrıca, çalışmalarında Frobenius norm altında $\|\hat{\Sigma}_{FAC} - \Sigma\|_F$ 'ın üst sınırını hesaplamışlardır. Temel varsayımlarından birisi sıra dışı (idiosyncratic) hata terimleri arasında kesitsel (cross-sectional) bağımsızlık olduğu diğer bir ifadeyle Σ_u 'nun köşegen matris olmasıdır. Chamberlain ve Rothschild (1983)'deki yaklaşık faktör yapısını ortadan kaldırmasından dolayı varsayılan kesitsel bağımsızlık birçok uygulamada kısıtlayıcı bir hal almaktadır.

2.3.5 POET

Birçok uygulamada ortak faktörlerin varlığı nedeniyle Σ üzerinde doğrudan seyreklik varsayımı doğru değildir. $\hat{\Sigma}_{FAC}$ 'daki eksikliklerden hareketle, Fan vd. (2015) ortak faktörlerin gözlemlenmeyen olması durumunda Asal Bileşen Analizine (Principal Component Analysis) dayanan Σ 'nın parametrik olmayan bir tahmincisini türetmişlerdir. Bu tahminci literatürde POET olarak adlandırılmaktadır. $\hat{\lambda}_1 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_p$, $\hat{\Sigma}_{SAM}$ 'in sıralı özdeğerleri

ve $\{\hat{\xi}_i\}_{i=1}^p$ bunların karşılık gelen özvektörlerini oluşturmaktadır. POET tahmincisini uygulamak için öncelikle örneklem kovaryans matrisinde (2.18)'deki gibi izgesel ayrıştırma (spectral decomposition) uygulanmaktadır:

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_{SAM} &= \sum_{i=1}^K \hat{\lambda}_i \hat{\xi}_i \hat{\xi}_i' + \sum_{i=K+1}^p \hat{\lambda}_i \hat{\xi}_i \hat{\xi}_i' \\ &= \sum_{i=1}^K \hat{\lambda}_i \hat{\xi}_i \hat{\xi}_i' + \hat{\Lambda}\end{aligned}\quad (2.18)$$

burada, $\hat{\Lambda} = \sum_{i=K+1}^p \hat{\lambda}_i \hat{\xi}_i \hat{\xi}_i' = (\hat{\Lambda}_{ij})_{p \times p}$ asal dikeysel bileşen (principal orthogonal complement) ifade etmektedir. K , Σ 'nın farklı özdeğer sayısını göstermektedir. Fan vd. (2015) (2.24)'da olduğu gibi doğrudan $\hat{\Lambda}$ üzerine eşikleme (thresholding) uygulamışlardır.

$$(\hat{\Lambda}_{ij}^\top)_{p \times p}, \quad \hat{\Lambda}_{ij}^\top = \begin{cases} \hat{\Lambda}_{ii}, & i = j, \\ s_{ij}(\hat{\Lambda}_{ij}) I(|\hat{\Lambda}_{ij}| \geq \psi_{ij}), & i \neq j. \end{cases}\quad (2.19)$$

$s_{ij}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ çeşitli eşik değerlerini içeren genelleştirilmiş küçülme fonksiyonunu, $\psi_{ij} > 0$ ise girdiye dayalı eşik parametresini ifade etmektedir.

Böylece, $\hat{\Sigma}_{POET}$ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\hat{\Sigma}_{POET} = \sum_{j=1}^K \hat{\lambda}_j \hat{\xi}_j \hat{\xi}_j' + \hat{\Lambda}\quad (2.20)$$

POET, kısıtlandırılmış en küçük kareler yöntemine eşdeğer bir gösterime sahiptir, $\hat{\Delta}_K = (\hat{\mathbf{b}}_1^K, \dots, \hat{\mathbf{b}}_p^K)$ ve $\hat{\mathbf{F}}_K' = (\hat{\mathbf{f}}_1^K, \dots, \hat{\mathbf{f}}_n^K)$:

$$(\hat{\Delta}_K, \hat{\mathbf{F}}_K) = \underset{\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^K, \mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^K}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^n (R_{it} - \mathbf{b}_i' \mathbf{f}_t)^2\quad (2.21)$$

(2.21)'daki modele normalizasyon kısıtı eklediğimizde:

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{f}_t \mathbf{f}_t' = \mathbf{I}_K, \quad \text{ve} \quad \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i' \quad \text{diyagonal} \quad (2.22)$$

burada, $\mathbb{E}[R_{it}] = \mathbb{E}[f_{jt}] = 0$, $i \leq p$, $j \leq K$ ve $t \leq n$. (2.21) ve (2.22)'i matris normunda yazarsak:

$$\underset{\mathbf{B}, \mathbf{F}}{\text{argmin}} \|\mathbf{R} - \mathbf{B}\mathbf{F}'\|_F^2 \quad n^{-1}\mathbf{F}'\mathbf{F} = \mathbf{I}_K, \quad \mathbf{B}'\mathbf{B} \quad \text{diyagonal} \quad (2.23)$$

burada, $\mathbf{R} = (r_1, \dots, r_n)$ ve $\mathbf{F}' = (f_1, \dots, f_n)$ 'dir. Modelde faktörler üzerine (2.22) kısıtını uyguladıktan sonra \mathbf{B} katsayıları $\Delta = n^{-1}\mathbf{R}\mathbf{F}$ bulunmaktadır. Elde edilen bu katsayıyı (2.23) içine yerleştirdiğimizde, amaç fonksiyonu $\|\mathbf{R} - n^{-1}\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{F}'\|_F^2 = \text{tr}[(\mathbf{I}_n - n^{-1}\mathbf{F}\mathbf{F}')\mathbf{R}'\mathbf{R}]$ haline gelmektedir. Böylece, $\hat{\Delta}_K = n^{-1}\mathbf{R}\hat{\mathbf{F}}_K$ haline gelmektedir (Stock ve Watson, 2002).

Hata kovaryans matrisi aşağıdaki şekilde oluşturulabilir:

$$(\hat{\Omega}_{ij}^\top)_{p \times p}, \quad \hat{\Omega}_{ij}^\top = \begin{cases} \hat{\Omega}_{ii}, & i = j, \\ s_{ij}(\hat{\Omega}_{ij}), & i \neq j. \end{cases} \quad (2.24)$$

burada, $\hat{u}_{it} = R_{it} - \hat{\mathbf{b}}_i^{K'} \hat{\mathbf{f}}_t^K$, $\hat{\Omega}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_{it} \hat{u}_{jt}$ ve $\hat{\theta}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{u}_{it} \hat{u}_{jt} - \hat{\Omega}_{ij})^2$. $\psi_{ij} > 0$ ve $\omega_T > 0$ için uyarlamalı eşik parametresi $\psi_{ij} = \zeta \sqrt{\hat{\theta}_{ij} \omega_T}$ 'dir.

$$s_{ij}(z) = 0, \quad \text{ise} \quad |z| \leq \psi_{ij}, \quad |s_{ij}(z) - z| \leq \psi_{ij} \quad (2.25)$$

$z \in \mathbb{R}$ değerleri Antoniadis ve Fan (2001) çalışmasında detaylı ele alınmıştır. Sert eşikleme (hard-thresholding), $s_{ij}(z) = zI(|z| \geq \psi_{ij})$; yumuşak eşikleme (soft-thresholding) $s_{ij} = \text{sign}(z)(|z| - \psi_{ij})_+$, SCAD ve uyarlamalı eşikleme (adaptive thresholding) gibi çeşitli eşik fonksiyonları uygulanabilmektedir, bakınız Bickel ve Levina (2008a), Antoniadis ve Fan (2001), Rothman vd. (2009), Cai ve Liu (2011).

Cai ve Liu (2011) 'un uyarlamalı eşikleme fonksiyonu (2.26)'da yer almaktadır:

$$\psi_{ij} = \zeta \sqrt{\hat{\Omega}_{ii} \hat{\Omega}_{ij}} \left(\sqrt{\frac{\log p}{n}} + \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \quad (2.26)$$

burada, $\zeta > 0$ kovaryans matrisinin pozitif tanımlı olması dışsal belirlenen pozitif sabiti ifade etmektedir.

2.3.6 Bilinmeyen K

POET tahmincisi, $\hat{\Sigma}_{SAM}$ örneklem kovaryans matrisinin K temel bileşenlerini çıkardıktan sonra, geride kalan bileşenlerine eşikleme uygulayarak elde edilmektedir. Burada K sayısını belirlemek büyük bir önem arz etmektedir. POET K sayısını veri-odaklı (data-driven) bir şekilde belirlemektedir. Burada, Fan vd. (2015) faktör sayısını belirlemek için literatürde sıkça kullanılan Bai ve Ng (2002) çalışmasında yer alan bilgi kriterini kullanmıştır. Bai ve Ng (2002), p ve n iraksadığı durumda tutarlı bir tahminci türetmişlerdir.

$$\hat{K} = \underset{0 \leq k \leq M}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{p} \operatorname{tr} \left(\sum_{j=k+1}^p \hat{\lambda}_j \hat{\xi}_j \hat{\xi}_j' \right) + \frac{k(p+n)}{pn} \log \left(\frac{pn}{p+n} \right) \quad (2.27)$$

burada, M belirlenmiş üst sınırı ifade etmektedir.

Bölüm 3

Ampirik Gram Matris Tersine Tahminine Yönelik Lasso Cezalı Nodewise

Yaklaşımı

Bu bölümde amaç, hisse senedi sayısının örneklem sayısından büyük olduğu durumda Lasso cezalı Nodewise regresyon yaklaşımından yararlanarak boyutsallık problemini aşmak ve kovaryans matris tersini doğru tahminlemektir. Global minimum varyans (2.5) ve ortalama varyans modellerinde (2.2) Lasso cezalı Nodewise regresyon yaklaşımından hareketle oluşturulan yaklaşık ters matris $\hat{\Theta}$ kullanılarak optimal portföyler oluşturulacaktır, bakınız Bölüm 3.4.1.

3.1 Literatür Taraması

Son yıllarda hem ekonomi hem de finansal uygulamalarda yüksek boyutlu değişkenler içeren çok geniş veri setleriyle karşılaşılmaktadır. Veri bolluğunun olduğu böyle bir durumda parametre sayısı, örneklem sayısından daha hızlı bir oranda artabilmektedir, $n \ll p$. Bu tür *yüksek boyutlu* verilerin kovaryans matrisinin veya tersinin tahmininde

seyrek tahminciler, cezalandırma ve küçülme tahmincileri ve düzenleme yaklaşımları olarak da adlandırılan yöntemler literatürde sıkça kullanılır hale gelmiştir. Bunlar, Fan ve Li (2001)'nin Düzenli Kırpılmış Mutlak Sapma (Smoothly Clipped Absolute Deviation-SCAD) yöntemi, Zou (2006)'nin Uyarlamalı En Küçük Mutlak Küçülme ve Operatör Seçimi (Adaptive Least Absolute Shrinkage and Selection Operator-Lasso) yöntemi, Bickel ve Levina (2008a)'nın Eşikleme yöntemi (Thresholding), Rothman vd. (2009)'nın Genelleştirilmiş Eşikleme (Generalized Thresholding), Cai ve Liu (2011)'nin Uyarlamalı Eşikleme (Adaptive Thresholding) yöntemidir. Literatürde diğer eşikleme yöntemleri Bickel ve Levina (2008b), Cai ve Zhou (2012), El Karoui (2008), Cai ve Yuan (2012), Lam ve Fan (2009) tarafından çalışılmıştır. Fan vd. (2009) ise, Fan ve Li (2001) tarafından önerilen SCAD ve Zou (2006) tarafından önerilen Uyarlamalı Lasso ceza fonksiyonlarını bir araya getirerek kesinlik matrisi tahmini üzerinde çalışmışlardır. Ayrıca, ℓ_1 cezalı olabilirlik tahmincisine dayalı düzenleme yöntemleri çeşitli yazarlar tarafından ele alınmıştır. O.Banerjee vd. (2008) Gauss dağılımına sahip parametreleri tahmin etmek için ℓ_1 cezalı olabilirlik (penalized likelihood) yöntemini kullanmıştır. ℓ_1 cezalı olabilirlik yöntemini kullanan diğer önemli çalışmalar Rothman vd. (2008), Friedman vd. (2008), Ravikumar vd. (2011), Cai vd. (2011), d'Aspremont vd. (2008), Javanmard ve Montanari (2014) olarak sıranabilir. Bunların yanı sıra, kovaryans matrisi ve tersinin Cholesky ayrıştırması yoluyla yeniden parameterizasyonunu öneren aralıklılık (banding) yöntemleri de bulunmaktadır, bakınız Wu ve Pourahmadi (2003), Wong vd. (2003), Huang vd. (2006), Yuan ve Lin (2007), Levina vd. (2008), Rothman vd. (2010).

Seyrek grafik modellerde (*sparse graphical model*) komşuluk seçimini belirleyen öne çıkan bir çalışma da, Meinshausen ve Bühlmann (2006)'nin çalışmasıdır. Meinshausen ve Bühlmann (2006), ℓ_1 cezalı komşuluk seçiminin kesinlik matrisinde sıfırları bulmada seyrek yüksek boyutlu grafik modeller için tutarlı olduğunu ispatlamıştır. Dolayısıyla, komşuluk seçimi yaklaşımı her bir düğüm (*node*) için ayrı ayrı tahminlenen koşullu bağımsızlık kısıtlamaları açısından Gauss doğrusal modelleri için değişken seçimine eşde-

ğerdir. van de Geer vd. (2014) ise Desparsing Lasso tahmincisini türeterek yüksek boyutlu parametre vektörünün düşük boyutlu bileşenleri için asimptotik güvenilir güven aralıkları oluşturmuşlardır. Ayrıca, Desparsing Lasso modeli için gerekli ampirik Gram matrisinin yaklaşık tersini elde etmek için ilk kez Meinshausen ve Bühlmann (2006) tarafından önerilen Lasso cezalı Nodewise regresyon yöntemini ele almıştır. Caner ve Kock (2014) da aynı konuyu yüksek boyutlu modellerde hata terimlerinde koşullu değişen varyansın varlığında incelemiştir. Çalışmalarında *Conservative Lasso* tahmincisini türetmiş ve parametre sayısı artarken asimptotik güvenilir güven aralıklarını hesaplamıştır. Ayrıca plain Lasso tahmincisinin yerine Conservative Lasso'ya dayanan Nodewise regresyonunu kullanarak tersi alınamayan kovaryans matrisinin yaklaşık ters matrisini oluşturmuştur.

Ayrıca, son zamanlarda Markowitz portföy optimizasyonunda uygulanan düzenleme teknikleriyle ilgili bazı çalışmalar da bulunmaktadır. DeMiguel, Garlappi, Nogales ve Uppal (2009), portföy ağırlık vektörünü doğrudan belirli bir ilave eşik değer üzerinden norm kısıtlı (norm-constrained) küçülme teknikleri kullanarak oluşturulan farklı portföylerin performansını karşılaştırmıştır. Elde ettikleri sonuçlar literatürde yer alan çeşitli çalışmalarla örtüşmektedir. DeMiguel, Garlappi, Nogales ve Uppal (2009), ℓ_1 -norm kısıtlı ortalama varyans portföyünün Jagannathan ve Ma (2003) tarafından önerilen açığa satış kısıtının uygulandığı portföy sonuçlarıyla örtüştüğü sonucuna ulaşmıştır. ℓ_2 -norm kısıtlı portföyün ise Ledoit ve Wolf (2003, 2004) tarafından değerlendirilen portföy sonucunu elde ettiği bulgusuna ulaşmıştır. Ayrıca, kuadratik ℓ_2 -norm kısıtlı portföy ağırlık vektörünün DeMiguel, Garlappi ve Uppal (2009)'de elde edilen $1/N$ portföyle aynı sonucu verdiğini göstermişlerdir. Brodie vd. (2009), seyrek portföyler elde etmek amacıyla kısıtlandırılmış amaç fonksiyonuna ℓ_1 -norm cezası ekleyerek Markowitz ortalama varyans portföy problemini yeniden formüle etmiştir. Çalışmasında ayar (tunable) katsayısının büyük değerleri için cezalandırılmış optimizasyonun, ağırlıklar üzerinde açığa satış kısıtı altında cezalandırılmamış probleme eşdeğer olduğunu göstermiştir. Böylece, yöntem cezalandırılmış amaç fonksiyonunun optimizasyonu için optimal çözümün kısa satış pozisyonu olmayan

portföylerden oluştuğunu içermektedir. Son olarak, Fan vd. (2012) optimal portföy seçimiinde brüt risk toplamı (*gross-exposure*) kısıtı uygulayarak modele ℓ_1 -norm cezası eklemiştir. Tüm bu düzenleme yöntemleri, belirli bir eşik değeri üzerinden optimal portföylerin küçük ancak sıfır olmayan ağırlıkların sıfıra doğru budanmasını sağlayan hisse senedi ağırlık bileşenlerinin küçülmesinde önemli gelişmeler kaydetmişlerdir. Ancak bu çalışmalar, tahmin hatalarının asıl kaynağı olan hisse senedi getiri momentlerinin küçülmesi yerine norm kısıtlı portföy ağırlık vektörünün küçülmesi üzerine odaklanmaktadır. Diğer bir deyişle, bu çalışmalar tahmin hatasının varlığında optimal portföyler önermektedirler (DeMiguel, Garlappi, Nogales ve Uppal, 2009). Bu nedenle, tahmin hatalarını azaltmak amacıyla momentlerin daha doğru tahminlenmesi gerekmektedir. Portföy optimizasyon prosedüründeki kovaryans matris tahmincilerinin çoğu (bakınız, Bölüm 2.3) öncelikle kovaryans matrisinin istenmeyen özelliklerinin giderilmesine ve sonrasında tersinin alınmasına odaklanmaktadır. ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon modelinde diğer yöntemlerden farklı olarak kovaryans matrisinin küçültülmesi gerekmemektedir. Kovaryans matrisinin küçülmesine dayanan yöntemler, araştırmacının hangi hisse senedi getirilerinin diğerleri ile ilişkisiz olduğuna ilişkin bir ön bilgiye sahip olduğu varsayımına dayanmaktadır. ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon modelinde buna verinin karar vermesine olanak verilmektedir. Bu bölümde, öncelikle EKK tahmincisinin büyük veri (*big data*) tahminlemesindeki yetersizliğine değinilerek bu sorunun çözümüne ilişkin literatürde yer alan alternatif cezalandırılmış tahmincilerden bahsedilecektir. Ayrıca, ampirik Gram matris tahminine yönelik ℓ_1 -norm ve ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonu hakkında detaylı bilgi verilecektir. Markowitz ortalama varyans portföy optimizasyonu çerçevesinde portföy performansını iyileştirmeyi amaçlayan ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonu aracılığıyla tersi alınamayan tekil kovaryans matrisinin yaklaşık ters matrisinin hesaplaması detaylı bir şekilde ele alınacaktır. Sonrasında ise, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon modelinin asimptotik özellikleri ve algoritması verilecektir. Global minimum varyans ve Markowitz ortalama varyans portföy

varyanslarının ve portföy ağırlıklarının tahmin hataları incelenmiştir. Ayrıca, ağırlıkların brüt risk toplamı ℓ_1 -norm altında asimptotik özelliklerine de değinilecektir.

3.2 En Küçük Kareler Tahmincisinin Yüksek Boyutlu Veri Tahminlemedeki Başarısızlığı

3.2.1 En Küçük Kareler Tahmincisinin Riski

Doğrusal bir regresyon modelini düşünelim:

$$Y = X\beta_0 + \varepsilon \quad (3.1)$$

burada, $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in \mathbb{R}^n$ bağımlı değişken vektörünü, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ açıklayıcı değişkenler matrisini ve $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n$ ise hata terimi vektörünü göstermektedir, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$.

Eğer $\text{rank}(X) = p$, yani X_1, \dots, X_p lineer olarak bağımsızsa, (3.1)'de yer alan modelin EKK tahmincisi tek çözüme sahiptir, $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$.

Projeksiyon matrisi $P_X = X(X'X)^{-1}X'$ tanımlayalım. $X\hat{\beta} = P_X Y$ olsun. Örneklem içi risk diğer bir ifadeyle EKK tahmincisinin riski aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\frac{1}{n} \mathbb{E} \| X - \hat{\beta} - X\beta_0 \|_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} (x_i' \hat{\beta} - (x_i' \beta_0))^2 = \mathbb{E} ((x_1' \hat{\beta} - (x_1' \beta_0))^2) \quad (3.2)$$

burada, X 'in satırları x_i , $i = 1, \dots, n$ oluşmaktadır. (x_i, y_i) tüm $i = 1, \dots, n$ için rastsal i.i.d. ve X, ε 'un birbirinden bağımsız olduğu varsayılmaktadır. X koşulu altında,

$$\frac{1}{n} \mathbb{E} (\| X - \hat{\beta} - X\beta_0 \|_2^2 | X) = \frac{1}{n} \text{tr}(\text{Cov}(X\hat{\beta} | X)) = \frac{1}{n} \text{tr}(\sigma^2 P_X) = \sigma^2 \frac{p}{n}, \quad (3.3)$$

Böylece örneklem içi risk,

$$\frac{1}{n} \mathbb{E} \| X - \hat{\beta} - X\beta_0 \|_2^2 = \sigma^2 \frac{p}{n} \quad (3.4)$$

şeklinde elde edilmektedir (Tibshirani ve Wasserman, 2017).

3.2.2 Problem

Eğer $\text{rank}(X) < p$ ise artık kareler toplamının minimizasyon probleminde sonsuz çözüm vardır. Bu durum $n < p$ olduğunda karşımıza çıkmaktadır. Bu tarz bir çoklu (nonuniqueness) durum çözüm sonuçlarını anlamsız hale getirecektir. Yani, her bir $j \in \{1, \dots, p\}$ için bir çözümde $\hat{\beta}_j > 0$ başka bir çözümde ise $\tilde{\beta}_j < 0$ olacaktır. En Küçük Kareler çözümü eşit olmayacaktır. Bu durum hem tahmin doğruluğu (prediction accuracy), hem de bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkendeki değişmeyi açıklayabilmesi yani yorumlama açısından ciddi bir sorun teşkil etmektedir. $\text{Rank}(X) = p$ olsa dahi EKK tahmincisinin tek bir çözümü bulunmaktadır. Ancak p ne kadar n 'e yakın olursa tahminlenen örneklem içi riskini (3.4) o derece arttıracaktır. Bu sorunun üstesinden gelmek için düzenleme yaklaşımına dayalı tahminçiler önerilmiştir. Bu tarz tahminçiler artık kareler toplamının kısıtlandırılmış şekliyle ya da cezalandırılmış şekliye gösterilmektedir:

$$\underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\text{argmin}} (\| Y - X\beta \|_2^2 \quad \text{st.} \quad \beta \in CF \quad (3.5)$$

$$\underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\text{argmin}} (\| Y - X\beta \|_2^2 + P(\beta) \quad (3.6)$$

burada CF dışbükey kısıt parametresini, $P(\cdot)$ ise dışbükey ceza fonksiyonunu oluşturmaktadır.

Düzenleme metodları sapma-varyans (bias-variance) ödünleşimi (trade-off) nedeniyle tahmin doğruluğunu arttırmaktadır (Zou vd., 2007). Diğer bir ifadeyle, belirsizliğin tah-

min edilen varyansı düşürmek için biraz sapma eklenerek ortadan kaldırılabileceği öne sürülmüştür (Zou ve Hastie, 2005).

3.3 Küçülme Tahmincileri ve Özellikleri

3.3.1 ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 Normları

ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 normları sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$\|\beta\|_0 = \sum_{j=1}^p 1\{\beta_j \neq 0\}, \quad \|\beta\|_1 = \sum_{j=1}^p |\beta_j|, \quad \|\beta\|_2 = \left(\sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

Bu yöntemlerde tahmine bağlı bir amaç fonksiyonu bulunmakta ve parametrelere dayalı kısıtlandırılmış yapısı (3.8), (3.18), (3.10) denklemlerde gösterilmiştir.

$$\underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|_2^2 \quad \text{st.} \quad \|\beta\|_0 \leq k \quad \text{En iyi altküme seçimi} \quad (3.8)$$

$$\underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|_2^2 \quad \text{st.} \quad \|\beta\|_1 \leq t \quad \text{Lasso regresyonu} \quad (3.9)$$

$$\underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\beta\|_2^2 \quad \text{st.} \quad \|\beta\|_2^2 \leq t \quad \text{Ridge regresyonu} \quad (3.10)$$

şeklinde gösterilmektedir. Burada $k, t \geq 0$ parametreler üzerinde cezanın boyutunu belirleyen pozitif ayar parametrelerini (*tuning parameter*) ifade etmektedir. Amaç fonksiyonunun ceza kısıtı katsayıları sıfıra doğru daraltmaktadır. İyi bir cezalandırma fonksiyonunun tahmincilerde sağladığı en önemli özelliği seyreklik yaratmasıdır. Seyreklik varsayımıyla tahmin edilen küçük regresyon katsayılarının sıfıra doğru daralması gerçekleştirilmektedir. Seyreklik ile birlikte çoğu regresyon parametrelerinin sıfır olduğu gözlemlenmektedir. Sıfır olmayan katsayılar ise önemli değişkenleri işaret etmektedir. Böylece seyreklik varsayımıyla değişken seçiminde sıfır olmayan bileşenlerden oluşan aktif

kümesi (active set) tanımlanarak tahmin doğruluğunun ve model yorumlanabilirliğinin artırılması amaçlanmaktadır.

Parametrelere dayalı bir cezalandırılmış form aşağıda yer alan (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) ve (3.16) denklemlerinde sunulmuştur. Optimal λ seçiminde kullanılan yöntemler Bölüm 3.5’de detaylı biçimde anlatılmıştır.

En iyi altküme seçimi (Hocking ve Leslie, 1967):

$$\operatorname{argmin}_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \| Y - X\beta \|^2_2 + \lambda \| \beta \|_0 \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Lasso regresyonu (Tibshirani, 1996):

$$\operatorname{argmin}_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \| Y - X\beta \|^2_2 + \lambda \| \beta \|_1 \quad (3.12)$$

olarak gösterilmektedir.

Ridge regresyonu (Hoerl ve Kennard, 1970):

$$\operatorname{argmin}_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \| Y - X\beta \|^2_2 + \lambda \| \beta \|^2_2 \quad (3.13)$$

şeklinde gösterilmektedir.

Elastik Net (Zou ve Hastie, 2005):

$$\operatorname{argmin}_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \| Y - X\beta \|^2_2 + \lambda \| \beta \|_1 + \delta \| \beta \|^2_2 \quad (3.14)$$

şeklinde gösterilmektedir. $\lambda, \delta \geq 0$ ayar parametrelerini ifade etmektedir. Elastik net tahmincisi Ridge ve Lasso ceza parametrelerini birleştirerek optimizasyon gerçekleştirmektedir.

Uyarlamalı Lasso (Zou, 2006):

$$\operatorname{argmin}_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \|Y - X\beta\|_2^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \omega_j |\beta_j| \quad (3.15)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Uyarlamalı Lasso tahmincisinde yer alan $\omega_j = \frac{1}{|\hat{\beta}_{init,j}|^\varphi}$, $j = 1, \dots, p$. $\hat{\beta}_{init,j}$ Ridge ya da Lasso tahmincisiyle elde edilen regresyon katsayılarını ifade etmektedir. $\varphi > 0$ pozitif ayar parametresini göstermektedir. Uyarlamalı Lasso tahmincisinden elde edilen aktif küme, yani $\hat{\beta}_{adapt}$, daima $\hat{\beta}_{init,j}$ 'nin altkümesi olarak ifade edilebilir.

Grup Lasso (Yuan ve Lin, 2006):

$$\operatorname{argmin}_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \|Y - X\beta\|_2^2 + \lambda \sum_{g=1}^G \sqrt{p_g} \|\beta_g\|_2 \quad (3.16)$$

olarak gösterilmektedir. Grup Lasso diğerlerinden farklı olarak tek tek değişken seçiminden ziyade değişkenlerin oluşturduğu grup seçimine odaklanmıştır. Burada $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_G)$, β parametresinin bloklarını göstermektedir. Her blok grup değişkenin kümelenmesini ifade etmektedir. p_g ise $g = 1, \dots, G$ için g 'nci bloğun uzunluğunu göstermektedir. ℓ_2 ceza parametresi grup seyrekliğini mümkün kılmaktadır. Örneğin, λ 'nın yüksek değerlerinde çoğu grup için $\hat{\beta}_g = 0$ olacaktır.

3.4 Metodoloji

Bu bölümde, tekil ampirik Gram matris için Meinshausen ve Bühlmann (2006)'nin Lasso ile grafiksel komşuluk seçimi modeline ve van de Geer vd. (2014)'nin Lasso cezalı Nodewise regresyon modeline dayalı serbest ters matrisinin (*relaxed inverse*) ya da diğer bir ifadeyle yaklaşık ters matrisinin alınması önerilmektedir.

3.4.1 ℓ_1 Ceza Parametrelı Nodewise Regresyon Kullanılarak Serbest Ters Matrisinin Elde Edilişi

Yüksek boyutlu lineer regresyon modeli aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$Y = \mathbf{R}\beta^0 + \varepsilon \quad (3.17)$$

burada, $\mathbf{R} = [R_1, \dots, R_p]$ açıklayıcı değişkenlerden oluşan $(n \times p)$ boyutunda hisse senedi aşırı getirilerinden oluşan bir matris ve i.i.d.'dir. β^0 , $(p \times 1)$ seyrek regresyon katsayısı vektörüdür. Katsayıların sadece s tanesi sıfırdan farklıdır ve $s < n$ 'dir. ε hata terimi vektörüdür ve $E(\varepsilon_i | \mathbf{R}) = 0$. Hata terimlerinde değişen varyansın varlığı varsayılmıştır. Aynı zamanda parametre sayısının gözlem sayısından büyük $n \ll p$ ve asimptotik sonuçlarda $\log(p)/n = o(1)$ olduğu varsayılmaktadır. $S_0 := \{j; \beta_j^0 \neq 0\}$ değişkenlerin aktif setini ifade etmekte ve $s_0 := |S_0|$ ise modelin kardinalitesini yani sıfır olmayan parametreleri belirtmektedir. ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonu ve yaklaşık ters matrisi $\hat{\Theta}$ ortaya koymadan önce Tibshirani (1996) tarafından önerilen Lasso modeli ve özellikleri aşağıda detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}(\lambda) = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} (\| Y - \mathbf{R}\beta \|_2^2 / n + 2\lambda \| \beta \|_1) \quad (3.18)$$

bazı $j \in \{1, \dots, p\}$ değerleri için $\beta_j = 0$ olabilir, λ artarken Lasso, katsayıları sürekli olarak sıfıra daraltır. Tahmincinin (3.18) Karush Kuhn Tucker (KKT) koşullarını yerine getirdiği bilinmektedir (bakınız, van de Geer vd. (2014)):

$$- \mathbf{R}'(Y - \mathbf{R}\hat{\beta})/n + \lambda \hat{\kappa} = 0 \quad (3.19)$$

$$\| \hat{\kappa} \| \leq 1 \quad \text{ve} \quad \hat{\kappa}_j = \operatorname{sign}(\hat{\beta}_j) \quad \text{eger} \quad \hat{\beta}_j \neq 0$$

(3.19)'i yeniden yazarsak:

$$\lambda\hat{\kappa} = \mathbf{R}'(Y - \mathbf{R}\hat{\beta})/n \quad (3.20)$$

$Y = \mathbf{R}\beta^0 + \varepsilon$ yerine yazarsak,

$$\lambda\hat{\kappa} = X'(Y - \varepsilon X(\hat{\beta} - \beta^0))/n \quad (3.21)$$

(3.21)'da $\hat{\Sigma} = \mathbf{R}'\mathbf{R}/n$ olarak geçmektedir. KKT koşulları $\hat{\Sigma}$ notasyonu ile yazılabilir.

$$\hat{\Sigma}(\hat{\beta} - \beta^0) + \lambda\hat{\kappa} = \mathbf{R}'\varepsilon/n \quad (3.22)$$

Seyrek portföy ağırlık tahsis vektörü elde etmek için $\hat{\Sigma}$ 'nin tersini hesaplamak gerekmektedir. Ancak $n \ll p$ olduğunda, rank eksikliği ampirik kovaryans matrisini temsil yapmakta ve matrisin tersi alınamamaktadır. Dolayısıyla, burada $\hat{\Sigma}$ 'nin tersi yerine yaklaşık ters matrisi $\hat{\Theta}$ hesaplanmasına odaklanılmıştır. Ampirik Gram matris teriminden kurtulmak için (3.22)'nin her iki tarafı $\hat{\Theta}$ ile çarparsak:

$$\hat{\beta} - \beta^0 + \hat{\Theta}\lambda\hat{\kappa} = \hat{\Theta}X'\varepsilon/n - \Delta/\sqrt{n} \quad (3.23)$$

burada,

$$\Delta := \sqrt{n}(\hat{\Theta}\hat{\Sigma} - I)(\hat{\beta} - \beta^0)$$

asimptotik olarak önemsizdir.

(3.20)'i, (3.23)'nin içine koyarak elde edilen tahminci aşağıdaki gibidir:

$$\hat{b} = \hat{\beta} + \hat{\Theta}\lambda\hat{\kappa} = \hat{\beta} + \hat{\Theta}\mathbf{R}'(Y - \mathbf{R}\hat{\beta})/n \quad (3.24)$$

$\mathbf{R} \in \mathbb{R}^p$, p riskli varlığın risksiz faiz oranından arındırılmış aşırı getirilerini ifade etmektedir. Burada amaç $n \times p$ boyutunda i.i.d. hisse senedi aşırı getirilerinin

$\mathbf{R} = [R_1, \dots, R_p]$ Lasso cezalı Nodewise regresyonuyla $\hat{\Theta}$ matrisini oluşturmaktır. $j = 1, \dots, p$ için Lasso cezalı Nodewise regresyonu (3.25)'deki gibi tanımlanmaktadır:

$$\hat{\gamma}_j := \underset{\gamma \in \mathbb{R}^{p-1}}{\operatorname{argmin}} (\| R_j - \mathbf{R}_{-j} \gamma \|_2^2 / n + 2\lambda_j \| \gamma \|_1) \quad (3.25)$$

$\hat{\gamma}_j = \{\hat{\gamma}_{jk}; k = 1, \dots, p, k \neq j\}$. Burada $\hat{\gamma}_j$, $(p - 1)$ boyutunda seyrek bir vektördür. \mathbf{R}_j , \mathbf{R} 'in j nci sütununu ve \mathbf{R}_{-j} ise j nci sütun hariç \mathbf{R} 'nin diğer bütün sütunlarını göstermektedir. Burada asıl fikir \mathbf{R}_j 'i, j nci sütunu olmayan bir alt matris olan \mathbf{R}_{-j} 'e karşı her bir regresyon problemi için p defa Lasso tahmincisini uygulamaktır.

$\hat{\Theta}$ 'a geçmeden önce \hat{C} 'i tanımlarsak:

$$\hat{C} := \begin{pmatrix} 1 & -\hat{\gamma}_{1,2} & \dots & -\hat{\gamma}_{1,p} \\ -\hat{\gamma}_{2,1} & 1 & \dots & -\hat{\gamma}_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\hat{\gamma}_{p,1} & -\hat{\gamma}_{p,2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\hat{\tau}_j^2$ 'ni tanımlarsak:

$$\hat{\tau}_j^2 := \frac{\| R_j - \mathbf{R}_{-j} \hat{\gamma}_j \|_2^2}{n} + \lambda_j \| \hat{\gamma}_j \|_1 \quad (3.26)$$

\hat{T}^2 tüm $j = 1, \dots, p$ için $p \times p$ boyutlu köşegen matristen oluşmaktadır:

$$\hat{T}^2 = \operatorname{diag}(\hat{\tau}_1^2, \dots, \hat{\tau}_p^2)$$

Yaklaşık ters matris $\hat{\Theta}$ ise şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\hat{\Theta} := \hat{T}^{-2} \hat{C}. \quad (3.27)$$

$\hat{\Theta}$, tekil matris olarak tanımlanan $\hat{\Sigma}$ 'in yaklaşık tersi olarak değerlendirilmektedir. $\hat{\Sigma}$ kendine eş (*self-adjoint*) olmasına rağmen $\hat{\Theta}$ değildir. $\hat{\Theta}_j$, $\hat{\Theta}$ 'nın j nci satırı ve \hat{C}_j de \hat{C} 'nin j nci satırı tanımlarsak:

$$\hat{\Theta}_j = \frac{\hat{C}_j}{\hat{\tau}_j^2}$$

ifade edilmektedir.

3.4.2 Özellikler

ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonu (3.25) için Karush-Kuhn-Tucker koşulları şunu ifade etmektedir:

$$\frac{-\mathbf{R}'_{-j}(R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)}{n} + \lambda_j \text{sign}(\hat{\gamma}_j) = 0 \quad (3.28)$$

burada,

$$\text{sign}(\hat{\gamma}_j)' \hat{\gamma}_j = \|\hat{\gamma}_j\|_1$$

$\hat{\gamma}'_j$ ile çarparsak:

$$\frac{-\hat{\gamma}'_j \mathbf{R}'_{-j}(R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)}{n} + \lambda_j \hat{\gamma}'_j \text{sign}(\hat{\gamma}_j) = 0 \quad (3.29)$$

Transpozunu aldığımızda,

$$\frac{(R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)'(-\mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)}{n} + \lambda_j \text{sign}(\hat{\gamma}_j)' \hat{\gamma}_j = 0 \quad (3.30)$$

Her iki tarafına eklediğimizde,

$$(R_j - R_j \hat{\gamma}_j)' R_j / n \quad (3.31)$$

Sonrasında (3.32) elde edilmektedir:

$$\frac{(R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)'(R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)}{n} + \lambda_j \|\hat{\gamma}_j\|_1 = (R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)'R_j/n \quad (3.32)$$

(3.32)'nin sol tarafı $\hat{\tau}_j^2$ 'nin tanımını göstermektedir. Böylece,

$$\hat{\tau}_j^2 = (R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)'R_j/n \quad (3.33)$$

(3.33)'nin her iki tarafını $\hat{\tau}_j^2$ 'ya böldüğümüzde,

$$1 = \frac{(R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)'R_j}{\hat{\tau}_j^2 n} \quad (3.34)$$

$j = 1$ için $\mathbf{R} = [R_1, \mathbf{R}_{-1}]$, $\hat{C}_1 = (1, \hat{\gamma}_1)'$, her bir j için aynıdır. Dolayısıyla,

$$\mathbf{R}\hat{C}_j = (R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j) \quad (3.35)$$

$\hat{\Theta}_j = \hat{C}_j/\hat{\gamma}_j$ ifade edilmektedir.

$$1 = \frac{(\mathbf{R}\hat{C}_j)'R_j}{\hat{\tau}_j^2 n} = \frac{(\mathbf{R}\hat{\Theta}_j)'R_j}{n} = \frac{\hat{\Theta}_j'\mathbf{R}'R_j}{n} \quad (3.36)$$

(3.36), $\hat{\Theta}\hat{\Sigma}$ 'nin j nci köşegen elemanının bire eşit olduğunu ve tam olarak matris tersi gibi davrandığını göstermektedir. $\hat{\Theta}\hat{\Sigma}$ 'nin köşegen olmayan terimleri için Karush-Kuhn-Tucker koşulları sonucu (3.37)'a ulaşılabilir:

$$\frac{-\mathbf{R}'_{-j}(R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)}{n} + \lambda_j \text{sign}(\hat{\gamma}_j) = 0 \quad (3.37)$$

Sonrasında $\hat{\kappa} - j = \text{sign}(\hat{\gamma}_j)$

$$\hat{\kappa}_j = \frac{\mathbf{R}'_{-j}(R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)}{n\lambda_j} \quad (3.38)$$

$\|\hat{\kappa}\|_\infty \leq 1$ olduğundan dolayı,

$$\left\| \frac{\mathbf{R}'_{-j}(R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)}{n} \right\|_\infty \leq \lambda_j \quad (3.39)$$

$\mathbf{R}\hat{C}_j = (R_j - \mathbf{R}_{-j}\hat{\gamma}_j)$ ve böylece,

$$\left\| \frac{\mathbf{R}'_{-j}(R_j\hat{C}_j)}{n} \right\|_\infty \leq \lambda_j \quad (3.40)$$

(3.40)'nın her iki tarafını da $\hat{\tau}_j^2$ bölersek ve $\hat{\Theta}_j = \hat{C}_j/\hat{\tau}_j^2$ 'ı kullanırsak:

$$\frac{\|\hat{\Theta}'_j \mathbf{R}'_{-j}\|_\infty}{n} \leq \frac{\lambda_j}{\hat{\tau}_j^2} \quad (3.41)$$

(3.41) köşegen olmayan terimleri ifade etmektedir. Dolayısıyla, $\hat{\Theta}'\hat{\Sigma}$ 'de köşegen ve köşegen olmayan terimleri için (3.36) ve (3.41) sonuçlarını birleştirsek (3.42) elde edilmektedir:

$$\|\hat{\Theta}'_j \hat{\Sigma} - e'_j\|_\infty \leq \frac{\lambda_j}{\hat{\tau}_j^2} \quad (3.42)$$

burada, e_j 'nin j nci elemanı 1'dir ve diğer elemanları ise sıfırdır. (3.42), $\|\hat{\Theta}'_j \hat{\Sigma} - I\|_\infty$ sifra yakınsayan bir sabit ile üst sınırlıdır. Diğer bir deyişle, yaklaşık ters matriste ortaya çıkan hata asimptotik olarak önemsiz denilebilecek kadar küçüktür. Yaklaşık ters matriste tahmin hatasının önemsiz derecede küçük olması oluşturulan portföylerin riskini düşürmede büyük bir öneme sahiptir.

3.4.3 Algoritma

Lasso cezalı Nodewise regresyonu için R istatistik programında yer alan `glmnet` (Friedman vd., 2010) paketi ve *coordinate descent algorithm* kullanılmıştır. $\hat{\Theta}$ matrisini he-

saplamak amacıyla kullanılan ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon modeli algoritmasına yer verilmiştir.

Algorithm 3.4.1 $\hat{\Theta}$ Matrisinin Hesaplanmasında ℓ_1 cezalı Nodewise Regresyon Algoritması

- 1: Başlangıç. Sıfırlardan oluşan $p \times p$ boyutlu τ_j^2 ve C matrislerini oluştur.
 - 2: γ_j 'i tahmin et ve tüm j 'ler için tekrar et. $\hat{\gamma}_j$, $(p - 1)$ boyutunda bir vektör olsun. R_j 'i \mathbf{R}_{-j} üzerine (3.25)'de yer aldığı şekliyle Lasso tahmincisini uygula.
 - 3: λ_j için tüm Nodewise regresyonlarında değiştirilmiş BIC (modified BIC) bilgi kriterini kullan, bakınız (3.44).
 - 4: \hat{T}^2 matrisini (3.26)'daki $\hat{\gamma}_j$ değerleri ve optimal olarak seçilen λ_j ile tahmin et. $\hat{T}^2 = \text{diag}(\hat{\tau}_1^2, \dots, \hat{\tau}_p^2)$ tüm $j = 1, \dots, p$ için $(p \times p)$ boyutunda köşegen bir matristir.
 - 5: $\hat{\gamma}_j$ vektörünün transpozunu al, $\hat{\gamma}_j$ 'nin her sütunu $(p - 1)$ boyutunda olacak ve tüm elemanları (-1) ile çarp.
 - 6: \hat{C} matrisini hesapla.
 - 7: (3.27)'i kullanarak $\hat{\Theta}$ matrisini hesapla.
-

3.5 Ayar Parametresi Seçimi

3.5.1 Çoklu Çapraz Geçerlilik Testi

Literatürde ayar parametresi belirlenmesinde en çok kullanılan yöntemlerden biri Fan vd. (2009) tarafından önerilen K_{CV} -fold çapraz geçerlilik (*cross-validation*) testidir. Öncelikle tüm örneklem *fold* olarak geçen K_{CV} ayrı altgruplara bölünmektedir. Bu bölünen altgruplar için her bir k nci fold T_k , $k = 1, 2, \dots, K_{CV}$ şeklinde gösterilmektedir. (3.43) skorunu maksimize eden optimal λ^* değeri seçilmektedir. Literatürde 10-fold çapraz geçerlilik diğer bir ifadeyle $K_{CV} = 10$ sıkça kullanılmaktadır. Buna göre K_{CV} -fold çapraz geçerlilik şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$CV(\lambda) = \sum_{k=1}^{K_{CV}} \left(n_k \log |\hat{\mathcal{U}}_{-k}(\lambda)| - \sum_{i \in T_k} (\mathbf{x}_{(i)})^T \hat{\mathcal{U}}_{-k}(\lambda) \mathbf{x}_{(i)} \right) \quad (3.43)$$

burada n_k , k ncı fold T_k 'nin örneklem hacmini göstermektedir. $\hat{U}_{-k}(\lambda)$ ise örneklem kovaryans matrisinin $\bigcup_{k=1}^{K_{CV}} T_k/T_k$, λ parametresi ile kesinlik matrisini göstermektedir. $\lambda^* = \operatorname{argmax}_{\lambda} CV(\lambda)$ değeri optimal ayar parametresi olarak seçilmektedir.

3.5.2 Değiştirilmiş Bayeşçi (Modified Bayesian) Bilgi Kriteri

Literatürde yer alan diğer bir yöntem de Wang vd. (2009) tarafından türetilen değiştirilmiş Bayeşçi bilgi kriterini minimize eden ayar parametresi λ^* seçimidir.

$$BIC(\lambda)_j = \log(\hat{\sigma}_{\lambda,j}^2) + \sum_{i \neq j} \mathbf{1}(\hat{\gamma}_{j,i,\lambda} \neq 0) \frac{\log(n)}{n} \log(\log(p)), \quad (3.44)$$

burada $\hat{\sigma}_{\lambda,j}^2$, λ ve denklem j için artık varyansını göstermektedir. $\hat{\gamma}_{j,i,\lambda}$, λ ve denklem j 'nin i nci tahmin edilen parametresini ifade etmektedir. Kovaryans matrisinin her elemanı için ayrı denklemler şeklinde tahmin edilmekte ve her denklem için ayrı bir optimal ayar parametresi (λ^*) seçilmektedir.

Wang vd. (2009) değiştirilmiş BIC kriterinin hem cezalandırılmış hem de cezalandırılmamış tahmincilerde iraksayan parametre sayıları için tutarlı olduğunu teorik olarak ispatlamıştır. Bu nedenle, tezde ayar parametresi seçiminde Wang vd. (2009)'in değiştirilmiş BIC bilgi kriteri kullanılmıştır. 10-fold çapraz geçerlilik ile seçilen ayar parametresine göre de sonuçlar elde edilmiştir. Ancak, tezin uygulama kısmında bu sonuçlara yer verilmemiştir.

3.6 Asimptotik Özellikler

3.6.1 Varsayımlar

Bu bölümde ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon modelinin portföy riskini düşürmede önemli bir role sahip varyans üzerindeki asimptotik özelliklerine kısa bir şekilde değinilmiştir. Aşağıda yer alan varsayımlarda van de Geer vd. (2014)'in çalışmasından yararlanılmıştır

ve ayrıca varsayımlara ilişkin detaylı bilgi Caner vd. (2017)'in çalışmasında bulunmaktadır.

Varsayım 1. \mathbf{R} , $n \times p$ boyutunda i.i.d. sub-Gaussçu hisse senetlerinden oluşmaktadır.

Varsayım 2. $\hat{\Theta}$ matrisinin seyreklik varsayımı şu şekildedir:

$$\max_j s_j \sqrt{\log p/n} = o(1)$$

Varsayım 2, $p > n$ koşuluna olanak sağlamaktadır. $p > n$ durumunda, $\max_j s_j = o(\sqrt{n/\log p})$. $p < n$ durumunda ise kovaryans matrisinin tersi üzerinde seyreklik varsayımlarına izin verilmemektedir, $\max_j s_j = p - 1$. $p < n$ altında *Varsayım 2*, $p\sqrt{\log p/n} = o(1)$ halini almaktadır. *Varsayım 2*'de dikkat çekilmesi gereken diğer bir nokta seyreklik koşulunun doğrudan hisse senetlerinin kovaryans matrisi üzerine değil, hisse senetlerinin yaklaşık ters matrisi üzerine uygulanmasıdır. Bu anlamda varsayım Fan vd. (2008, 2015) çalışmalarından ayrılmaktadır. Çünkü, Fan vd. (2008, 2015) seyreklik koşulunu doğrudan artıkların varyans kovaryans matrisi üzerine uygulamaktadır.

Varsayım 3. Bu varsayım Σ 'nin en küçük özdeğerini Λ_{min} kesinlikle pozitif yapmakta ve $1/\Lambda_{min} = O(1)$ sıfırdan uzağa sınırlamaktadır. Ayrıca, $\max_j \Sigma_{j,j} = O(1)$. Böylece, $\Theta = \Sigma^{-1}$ 'nin minimum özdeğeri kesinlikle pozitifdir.

Caner vd. (2017)'nin çalışmasında yer alan **Lemma 2.1**, $p > n$ durumunda kovaryans matrisinin tersi Lasso cezalı Nodewise regresyon modeliyle tüm j 'ler için $j \in 1, \dots, p$ tekdüze (uniform) olarak tutarlı bir şekilde tahminlendiğini ifade etmektedir,

$$\|\hat{\Theta}\hat{\Sigma} - I_p\|_{\infty} = O_p(\sqrt{\log p/n}) = o_p(1)$$

burada, $\lambda_j = O(\sqrt{\log p/n})$.

3.6.2 Global Minimum Varyans Portföyünün Yakınsaması

Σ , \mathbf{R} hisse senetlerinin kovaryans matrisi ve w ise p finansal varlığa ilişkin portföy ağırlıkları vektörünü temsil etmektedir. $R(w) = w'\Sigma w$ ve $\hat{R}(w) = w'\hat{\Sigma}w$ sırasıyla belirlenen portföy için teorik (gerçek) ve ampirik riski ifade etmektedir. Tahminlenen portföyün gerçek riski $R(\hat{w}) = \hat{w}'\Sigma\hat{w}$ ve tahminlenen riski ise $\hat{R}(\hat{w}) = \hat{w}'\hat{\Sigma}\hat{w}$ olarak ifade edilmektedir. Uygulamada portföyün gerçek riski bilinmemekte yalnızca ampirik risk hesaplanabilmektedir. Gerçek risk genel olarak ampirik risk düzeyinden büyük olmaktadır, ancak Σ 'nin iyi bir tahmincisi p boyutu artarken risklerin birbirine yakınsamasını sağlayacaktır (Mincheva, 2014).

Global minimum varyans portföyünde elde edilen ağırlıkları (2.5), yaklaşık ters matris ile tahminlersek (3.45) elde edilmektedir:

$$\hat{w}_G = \frac{\hat{\Theta}1_p}{1_p'\hat{\Theta}1_p}. \quad (3.45)$$

(2.6)'de yer alan global minimum varyans portföyünün tahminlenen varyansı şu şekildedir:

$$\hat{w}_G'\hat{\Sigma}\hat{w}_G = (1_p'\hat{\Theta}1_p)^{-1}. \quad (3.46)$$

Teorem 1. *Varsayım 1-3 altında, her bir j için tekdüze olarak $\lambda_j = \sqrt{\log p/n}$,*

$$|\hat{w}_G'\hat{\Sigma}\hat{w}_G - w_G'\Sigma w_G| = \frac{O_p(\max_j s_j \sqrt{\log p/n})}{O(p)} = o_p\left(\frac{1}{p}\right).$$

elde edilmektedir. İspat için bakınız, Caner vd. (2017).

Teorem 1'de $p > n$ koşulunda global minimum varyans portföyünün tahminlenen varyansı ile gerçek varyansı arasında gerçekleşen tahmin hatası türetilmiştir. Buna göre tahmin hatası $1/p$ oranından daha hızlı bir olasılıkla sifira yakınsamaktadır. Böylece, portföydeki hisse senedini arttırarak tahmin hataları hızlı bir şekilde azaltılabilmektedir. Fan vd. (2008) ise aynı teoremin $n > p$ ve faktör sayısı K 'nin n ile birlikte fakat p sayısından küçük olarak arttığı durumda (2.17)'da yer alan kovaryans matrisine dayalı tahmin hatalarını türetmiştir. Fan vd. (2008) tahmin hatasının $p^2 K^2 (\log n/n)^{1/2} \rightarrow 0$ olasılıkla sifira yakınsadığını elde etmiştir. Fan vd. (2008) ve Caner vd. (2017) çalışmalarındaki farklılıklar çarpıcıdır. Caner vd. (2017)'da tahmin hatası p ile azalırken, Fan vd. (2008)'de ise p ile karesel bir şekilde artmaktadır.

Caner vd. (2017)'de seyrek olmayan, tüm j 'ler için, $s_j = (p - 1)$ varsayımında yani diğer bir ifadeyle yaklaşık ters matrisin her bir satırında sıfır olmayan elemanların sayısının $(p - 1)$ olması durumunda $p < n, p/n \rightarrow 0$ altında yakınsama hızı $(\frac{n}{\log n})^{1/6} < p < n$ 'dir. Bu oran Fan vd. (2008) çalışmasında $p^2 \sqrt{\log n/n} > 1/p$ 'tır. Burada seyrek olmayan durumda bile Nodewise yaklaşımına dayalı yakınsama oranının daha iyi olduğu açıkça görünmektedir. Modeller arasındaki bu farklılık faktör modeline dayalı kesinlik matrisi ile yaklaşık ters matrisin yakınsama hızlarındaki farktan kaynaklanmaktadır. Fan vd. (2008) çalışmasında *Teorem 3*'te Frobenius normu altında ters matrisin yakınsama oranı $O_p(pK^2(\log n/n)^{1/2})$ iken yaklaşık ters matrisin yakınsama oranı *Lemma 2.1*'de yer alan $O_p((\log p/n)^{1/2})$ orandır. Bir diğer vurgulanması gereken husus da Nodewise regresyonu ile $p > n$ durumunda yaklaşık ters matrisin hesaplanabilmesidir.

3.6.3 Markowitz Portföyünün Yakınsaması

(2.2)'de yer alan w_M kullanılarak elde edilen bir diğer sonuç da optimal portföylerin varyansdır. $\hat{\Theta}$ kullanılarak elde edilen optimal portföyler (3.47)'de yer almaktadır.

$$\hat{w}_M = \frac{\hat{D} - \rho\hat{B}}{\hat{A}\hat{D} - \hat{B}^2}\hat{\Theta}1_p + \frac{\rho\hat{A} - \hat{B}}{\hat{A}\hat{D} - \hat{B}^2}\hat{\Theta}\hat{\mu} \quad (3.47)$$

burada $\hat{A} = 1'_p\hat{\Theta}1_p$, $\hat{B} = 1'_p\hat{\Theta}\hat{\mu}$, $\hat{D} = \hat{\mu}'\hat{\Theta}\hat{\mu}$, ve $\hat{\mu} = n^{-1}\sum_{t=1}^n r_t$.

Kısıtlı optimizasyonun kapalı biçim (closed form) çözümünden elde edilen optimal portföyün tahminlenen varyansı (3.48)'da gösterilmektedir.

$$\hat{w}'_M\hat{\Sigma}\hat{w}_M = \frac{\hat{A}\rho^2 - 2\hat{B}\rho + \hat{D}}{\hat{A}\hat{D} - \hat{B}^2} \quad (3.48)$$

Caner vd. (2017)'da Markowitz optimal portföy varyansı tahmin hatası *Teorem 2*'de türetilmiştir.

Teorem 2. *Varsayım 1-3 altında, ve her bir j için tekdüze olarak $\lambda_j = O(\sqrt{\log p/n})$, $p^{-2}(AD - B^2) \geq C_1 > 0$ ve ρ sınırlı iken $p^{-1}(A\rho^2 - 2B\rho + D) \geq C_1 > 0$, burada C_1 pozitif bir katsayıyı ifade etmektedir.*

$$|\hat{w}'_M\hat{\Sigma}\hat{w}_M - w'_M\Sigma w_M| = \frac{O_p(\max_j s_j \sqrt{\log p/n})}{O(p)} = o_p\left(\frac{1}{p}\right).$$

İspat için bakınız, Caner vd. (2017).

Teorem 2 tahmin hatasının $1/p$ 'den daha hızlı bir oranda sifra yakınsadığını göstermektedir. Diğer bir ifadeyle, portföydeki hisse senedi sayısını arttırmak tahmin hatasını düşürücü bir etki yaratmaktadır. Fan vd. (2008) çalışmasında bu oran $p^2 K^2 (\log n/n)^{1/2}$ şeklindedir. Burada tahmin hatası p ve K 'nin değerine bağlı olarak etkilenmektedir. Tahmin hatası Fan vd. (2008) çalışmasında p 'nin kuadratik bir fonksiyonu şeklinde artarken, Nodewise yaklaşımına dayalı elde edilen tahmin hatası p 'e bağlı bir şekilde düşmektedir. Ayrıca *Varsayım 2* koşulları altında $p > n$ durumunda Nodewise regresyon ile tahminleme yapılabilmektedir. Seyrek olmayan her bir j için $s_j = p - 1$ varsayım altında

$p < n, p/n \rightarrow 0$ olması durumunda yakınsama hızı $(\frac{n}{\log n})^{1/6} < p < n$ olarak ifade edilmektedir. Seyrek olmayan varsayım altında dahi oranlar arasındaki fark kayda değerdir.

3.7 Brüt Risk Toplamı

Bu bölümde portföyün brüt risk toplamı tahminlemesi yapılacaktır. Teoremler Caner vd. (2017) çalışmasından alınmıştır. Brüt risk toplamında ℓ_1 normundan yararlanılmaktadır. Diğer bir ifadeyle brüt risk toplamı, $\|w\|_1 = \sum_{i=1}^p |w_i|$, tahminlenen portföy tahsis vektörlerinin mutlak değerlerinin toplamı şeklinde gösterilebilir. *Teorem 3*, $n < p$ durumunda global minimum varyans portföy ağırlıklarının tutarlı bir şekilde tahminlenmesini göstermektedir. Burada, diğer teoremlerden farklılığı seyreklik varsayımından kaynaklanmaktadır. Seyreklik varsayımına $\sqrt{s_j}$ eklenmiştir. Ayrıca tüm hisse senetleri için seyreklik varsayımının gevşetilmesi yani $s_j = p - 1$ durumunda $p < n$ için yakınsama hızı $(\max_j s_j)^{3/2} \sqrt{\log p/n} = (p - 1)^{3/2} \sqrt{\log p/n} = o(1)$ şeklindedir.

Teorem 3. *Varsayım 1-3 ve seyreklik varsayımı altında $(\max_j s_j)^{3/2} \sqrt{\log p/n} = o(1)$ ve $\lambda_j = O(\sqrt{\log p/n})$ her bir j için tekdüze olarak,*

$$\|\hat{w}_G - w_G\|_1 = O_p((\max_j s_j)^{3/2} \sqrt{\log p/n}) = o_p(1).$$

Ayrıca, Caner vd. (2017) çalışmasında sonlu ve artan brüt risk toplamı diğer bir ifadeyle $\|w\|_1$ da analiz edilmiştir. Artan brüt risk toplamı $\|w_u\|_1 = O(\max_j \sqrt{s_j})$ şeklinde ifade edilebilir. $\max_j s_j = O(1)$ varsayımı ile sonlu brüt risk toplamına $\|w_u\|_1 = O(1)$ ulaşılmaktadır. Sonlu brüt risk toplamı ile *Teorem 3*'te elde edilen oran $\|\hat{w}_u - w_u\|_1 = O_p(\sqrt{\log p/n}) = o_p(1)$ şeklini almıştır. *Teorem 3*'teki orana kıyasla daha iyi bir sonuç elde edilmiştir.

Teorem 4. Varsayım 1-3 altında $(\max_j s_j)^{3/2} \sqrt{\log p/n}^{-1/2} = o(1)$ ve her bir j için tekdüze olarak, $\lambda_j = O(\sqrt{\log p/n})$ ile $p^{-2}(AD - B^2) \geq C_1 > 0$, burada C_1 pozitif bir katsayıdır,

$$\|\hat{w}_M - w_M\|_1 = O_p((\max_j s_j)^{3/2} \sqrt{\log p/n}) = o_p(1).$$

Caner vd. (2017) $n < p$ durumunda brüt risk toplamını Markowitz portföyü için de tahminlemiştir. Elde edilen sonuç *Teorem 4*'te yer almaktadır. Ayrıca $\|w_M\|_1$ için sonlu ve artan brüt risk toplamı hesaplanmıştır. Sonlu brüt risk toplamı ile *Teorem 4*'te elde edilen sonuç $\|\hat{w}_M - w_M\|_1 = O_p(\sqrt{\log p/n}) = o_p(1)$ iken, artan brüt risk toplamı ile *Teorem 4*, $\|\hat{w}_M - w_M\|_1 = O_p(p^{3/2} \sqrt{\log p/n})$ halini almaktadır.

3.8 Kovaryans Matrisi Tahmininde Hata Ölçümleri

Bu bölümde, $\hat{\Sigma}_{SAM}$, $\hat{\Sigma}_{FAC}$, $\hat{\Sigma}_{POET}$, $\hat{\Sigma}_{LWID}$ ve $\hat{\Theta}$ matrislerine ilişkin çeşitli hata ölçümleri yapılacaktır. Çeşitli matris normlarına dayalı bu ölçümler Fan vd. (2008) çalışmasından alınmıştır. Fan vd. (2008), çalışmasında aşağıda yer alan normların yakınsama oranlarını incelemiştir. Genel olarak Frobenius norm ve diğer matris normları matrislerin özdeğerleri veya tekil değerleriyle ilişkilidir ve matrislerin performansı hakkında bilgi vermektedir.

Hata ölçümleri:

1. Frobenius norm $\|\hat{\Sigma} - \Sigma\| = \sqrt{\text{tr}((\hat{\Sigma} - \Sigma)'(\hat{\Sigma} - \Sigma))} = \sqrt{\sum_i \lambda_i (\hat{\Sigma} - \Sigma)^2}$ burada $\lambda_i(\cdot)$, i 'nci özdeğerini ifade etmektedir.
2. Sigma norm: $\|\hat{\Sigma} - \Sigma\|_{\Sigma} = \frac{1}{\sqrt{p}} \text{tr}(\hat{\Sigma} \Sigma^{-1} - I)^2$
3. Entropy kayıp fonksiyonu: $L_1(\hat{\Sigma}, \Sigma) = \text{tr}(\hat{\Sigma} \Sigma^{-1}) - \log |\hat{\Sigma} \Sigma^{-1}| - p$
4. Ters Frobenius norm: $\|\hat{\Sigma}^{-1} - \Sigma^{-1}\|$

Bölüm 4

Monte Carlo Uygulamaları

Bu bölümde, kovaryans matris tahmincilerinin Bölüm 3.6’da yer alan yakınsama oranlarına ilişkin simülasyon çalışması yapılmıştır. Bu çalışma ile en düşük riske sahip hisse senetlerinin hedeflenen getiriye göre oluşturabileceği optimal çözüm saptanmıştır. Bu doğrultuda bir kısıtlı amaç fonksiyonu belirlenmiş ve bu fonksiyona göre sistem çalıştırılmıştır. Her bir simülasyon için $n = 252$ ve $K = 3$ olacak şekilde sabitlenmiş, p ise giderek arttırılmıştır. p sayısı n sayısından giderek uzaklaşırken yakınsama oranları hesaplanmıştır. Simülasyon modeli için kullanılacak veri Fan vd. (2008) çalışmasında yer alan gözlemlenen faktör modelinden türetilen veriye (bakınız, Tablo 4.1 ve Tablo 4.2) ve ayrıca S&P 500 endeksinde yer alan hisse senetleri momentlerinden türetilen veriye (bakınız, Tablo 4.3) dayanmaktadır. Simülasyonlarda kullanılacak olan veri R programı kullanılarak Quandl veritabanından alınmıştır.

4.1 Gözlemlenen Faktör Modeline Dayalı Monte Carlo Uygulamaları

Gözlemlenen faktör modeline dayalı veri üretme sürecinde hisse senedi getirilerini açıklamakta CAPM’den daha fazla faktörün varlığını ortaya koyan Fama ve French (1993)’in

üç faktör modelinden yararlanılmıştır. Fama ve French (1993), üç faktör modelinde hisse senetlerinin beklenen getirilerini açıklamakta çoklu faktör modelini esas almış ve getirileri etkileyen çeşitli risk faktörleri üzerinde durmuştur. Simülasyon çalışmalarında Fama ve French (1993) çalışmasından hareketle kovaryans matrisini tahminlemede $K = 3$ olarak sabitlenmiştir. Bu faktörler¹ firma büyüklüğü ve defter değeri/piyasa değeri (B/M) oranına dayalı altı değer ağırlıklı (value-weighted) portföyden oluşturulmuştur. Birinci faktör, piyasa portföyünün aşırı getirisidir. Piyasa portföy getirisi NYSE, AMEX, ve NASDAQ'da işlem gören hisse senetlerinin değer ağırlıklı getirilerinden üç aylık risksiz faiz oranının² çıkartılmasıyla elde edilmiştir.

Aşağıda yer alan (4.1) ve (4.2)'deki portföyler ile ilgili açıklama için Tablo 5.1'e bakınız.

İkinci faktör, SMB (Küçük Eksi Büyük) piyasa değeri küçük hisse senetlerinden oluşturulan portföy getirisi ile piyasa değeri büyük hisse senetlerinden oluşturulan portföy getirisi arasındaki farktan oluşmaktadır.

$$SMB = 1/3(SL + SN + SH) - 1/3(BL + BN + BH) \quad (4.1)$$

Üçüncü faktör ise, HML (Yüksek Eksi Düşük) yüksek ve düşük defter değeri/piyasa değeri oranına sahip hisse senetlerinden oluşturulan portföy getirileri arasındaki farktan oluşmaktadır.

$$HML = 1/2(SH + BH) - 1/2(SL + BL) \quad (4.2)$$

Bu bölüm iki alt alanda özetlenmiştir. Bunlar; kalibrasyon ve simülasyondan oluşmaktadır. Kalibrasyon alanında, gözlemlenen faktörler $\{\mathbf{f}\}_{t=1}^n$, sıra dışı hata terimleri $\{\mathbf{u}\}_{t=1}^n$

¹Kaynak için Kenneth-French'in websitesine bakınız, http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html

²Risksiz faiz oranı olarak üç aylık hazine bonusu faiz oranı kullanılmıştır.

ve faktör bileşenleri \mathbf{B} çok değişkenli dağılımlar (multivariate distribution) esas alınarak türetilmiştir.

4.1.1 Kalibrasyon

Fama-French üç faktör model parametreleri Fan vd. (2008) çalışmasından alınmıştır. Fan vd. (2008) çalışmasında $(\tilde{\mathbf{y}}_t, \tilde{\mathbf{f}}_t)$ verisi için 30 endüstri portföyünün ($p = 30$), 1 Mayıs 2002 - 29 Ağustos 2005 arası günlük verilerini ($n = 756$) kullanarak veri üretme sürecinde her bir iterasyon için oluşturulacak faktörler ve bileşenleri için katsayıları elde etmiştir.

Kalibrasyon aşamaları aşağıda verilmiştir:

1. $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{u}$ modeline EKK tahmincisi uygulanarak faktör bileşenleri $\tilde{\mathbf{B}}$ elde edilir. $\tilde{\mathbf{B}}$ 'nin satırları $\tilde{\mathbf{b}}_1 = (b_{11}, b_{12}, b_{13}), \dots, \tilde{\mathbf{b}}_{30} = (b_{30,1}, b_{30,2}, b_{30,3})$ şeklindedir.
2. Örneklem ortalama vektörü μ_B ve örneklem kovaryans matrisi Σ_B hesaplanır.
3. Çok değişkenli normal dağılımdan gelen $\mathcal{N}(\mu_B, \Sigma_B)$ faktör bileşenleri \mathbf{b} , $b_1, \dots, b_p, i = 1, \dots, p$ türetilir. Katsayılar Tablo 4.1'de verilmiştir.

μ_B		Σ_B	
0.78282	0.029145	0.023873	0.010184
0.51803	0.023873	0.053951	-0.006967
0.41003	0.010184	-0.006967	0.086856

Tablo 4.1: \mathbf{b} Vektörü Oluşturmada Örneklem Ortalama ve Örneklem Kovaryans Matrisi

4. Faktörleri türetmek için ise \mathbf{f} 'nin örneklem ortalama vektörü μ_f ve örneklem kovaryans matrisi Σ_f Tablo 4.2'de verilmiştir.
5. $\hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{f}}$ olsun. $i = 1, \dots, 30$ için, $\hat{\sigma}_i$, i 'nci portföy artıklarının standard sapmasını göstermektedir. Standard sapmalar bir eşik değerinin $\min_{1 \leq i \leq p} \hat{\sigma}_i = 0.1950$

μ_f		Σ_f	
0.023558	1.2507	-0.034999	-0.20419
0.012989	-0.034999	0.31564	-0.0022526
0.020714	-0.20419	-0.0022526	0.19303

Tablo 4.2: f Matrisi Oluşturmada Örneklem Ortalaması ve Örneklem Kovaryans Matrisi

altında olacak şekilde sınırlandırılmıştır. Bu eşik değer Fan vd. (2008) çalışmasında Bölüm (3.1)'de yer alan koşul C ile tutarlı bir şekilde oluşturulmuştur. $\hat{\sigma}_i$ 'nin ortalama ve standard sapması $\bar{\sigma} = 0.66081$ ve $\sigma_{sd} = 0.3275$ olarak bulunmuştur. $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ ortalaması $\alpha\beta$ ve standard sapması ise $\alpha^{1/2}\beta$ olacak şekilde Gamma dağılımından $G(\alpha, \beta)$ türetilmiştir. Sonuç olarak, $\alpha = 3.3586$ ve $\beta = 0.1876$ şeklinde elde edilmiştir.

4.1.2 Simülasyon

Bu bölümde kalibrasyonda yer alan değerler üzerinden veri türetilerek simülasyonlar yapılmıştır. Her bir iterasyon için $n = 252$ olacak şekilde sabitlenmiştir. p sayısı her bir simülasyon için 20 arttırılarak 20'den 600'e kadar ulaşılmıştır. Her bir simülasyon için aşağıdaki aşamalar sıralanmıştır:

1. $n = 252$ gözlem sayısı ile rastsal olarak $f \sim \mathcal{N}(\mu_f, \Sigma_f)$ oluşturulur.

Sabitlenen her bir p sayısı 20'şer arttırılarak 20'den 600'e kadar aşağıdaki adımlar takip edilmiştir:

2. Çok değişkenli bağımsız normal dağılımdan gelen $\mathcal{N}(\mu_B, \Sigma_B)$, p boyutunda faktör bileşen vektörü $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^p$ oluşturulur ve $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p)'$ tahminlenir.
3. $\alpha = 3.3586$ and $\beta = 0.1876$ ile Gamma dağılımından $G(\alpha, \beta)$ gelen hata terimlerini türetmede kullanılmak üzere p boyutunda standard sapmalar $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ türetilir. Standard hatalar 0.1950 bir eşik değerinin altında sınırlandırılmıştır.

4. Türetilen σ_i 'ler kullanılarak $n = 252$ boyutunda bağımsız p -değişkenli normal dağılımdan gelen $\mathcal{N}(0, \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2))$, \mathbf{u} oluşturulur.
5. Son olarak türetilen tüm değerler kullanılarak $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{u}$ hesaplanır.

4.2 Rastsal Kovaryans Matrisine Dayalı Monte Carlo Uygulamaları

4.2.1 Kalibrasyon

Bu bölümde S&P 500 endeksinde işlem gören 11 Mart 2013 - 28 Şubat 2017 tarihlerinde 458 hisse senedinin aşırı getirisinin tahminlenen momentlerinden veri türetilmiştir. Toplam gözlem sayısı $n = 1000$ 'dir. Risksiz faiz oranı olarak ise üç aylık Hazine bonusu faiz oranı kullanılmıştır. Veri üretmede kullanılacak olan tahminlenen momentler Tablo 4.3'de özetlenmiştir.

μ_f		Σ_f	
0.023558	1.2507	-0.034999	-0.20419
0.012989	-0.034999	0.31564	-0.0022526
0.020714	-0.20419	-0.0022526	0.19303

Tablo 4.3: S&P Örnekleme Ortalaması ve Örnekleme Kovaryans Matrisi

4.2.2 Simülasyon

Tablo 4.3'de yer alan moment verileri kullanılarak her bir p için getiri ortalama vektörü ve kovaryans matrisi aşağıdaki aşamalar izlenerek oluşturulmuştur:

1. Hisse senetleri aşırı getirileri için $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından gelen p boyutunda ortalama vektörü μ_{RCV} oluşturulur.

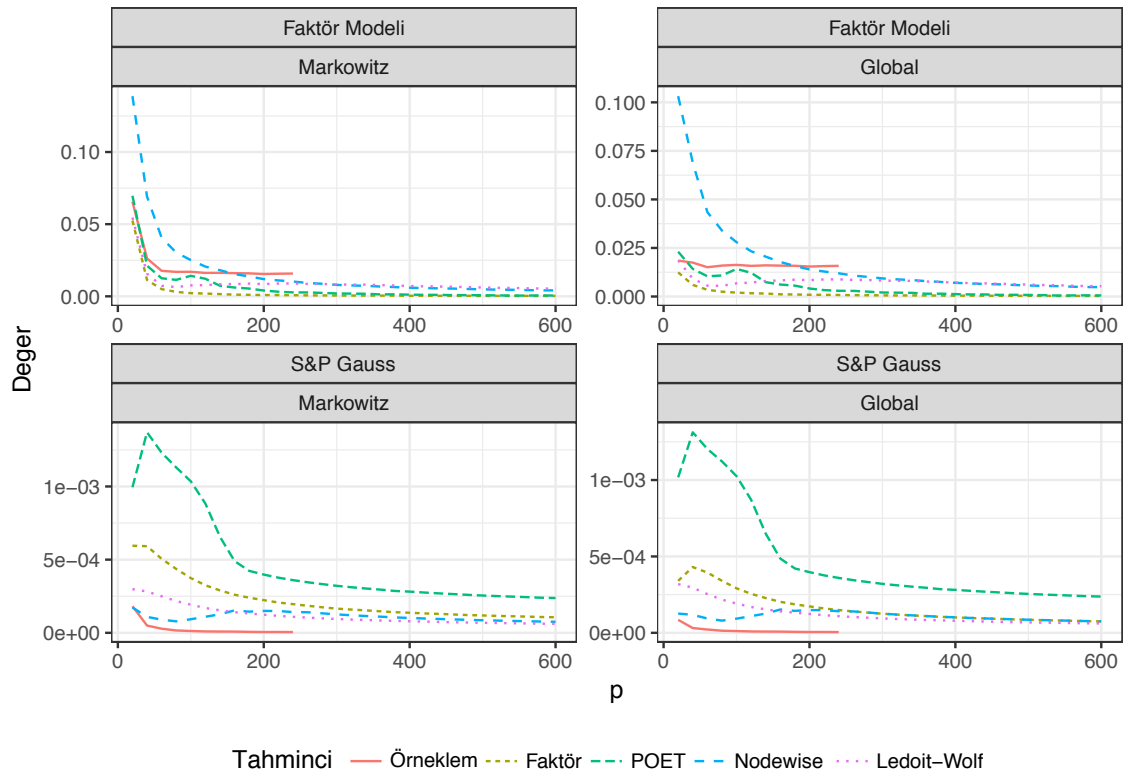
2. Gamma dağılımından gelen $G(\alpha, \beta)$, hata terimlerini türetmede kullanılmak üzere p boyutunda standard sapmalar $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ türetilir.
3. Kovaryans matrisinin köşegen olmayan terimleri Gauss dağılımından oluşturulur. Matris üst köşegenin %10'u rastsal sayılarla doldurulur ve alt köşegenin simetriği sağlanır. Matrisin diğer girdileri ise sıfır olarak ayarlanır.
4. Oluşturulan kovaryans matrisinin özdeğer ayrıştırması (eigenvalue cleaning) ile pozitif tanımlı olması sağlanır. Bu ayrıştırmada Callot vd. (2016), Hautsch vd. (2012) çalışmalarından yararlanılmıştır. Öncelikle $\Sigma = V'AV$ 'nin spektral ayrışması gerçekleştirilir. Burada V özvektörler matrisini ve A ise özdeğerler matrisini ifade etmektedir. Negatif özdeğerleri ve 10^{-6} altındaki değerleri, 10^{-6} 'dan daha büyük en küçük özdeğerle değiştirilir ve yeni bir \tilde{A} matrisi elde edilir.
5. $\tilde{\Sigma} = V'\tilde{A}V$ hesaplanır. $\tilde{\Sigma}$ matrisi ve tersi seyrek bir matris değildir.
6. Hisse senetleri aşırı getiri matrisi $N(\mu_{RCV}, \tilde{\Sigma})$ dağılımından türetilir.

4.3 Bulgular

4.3.1 Simülasyon Sonuçları

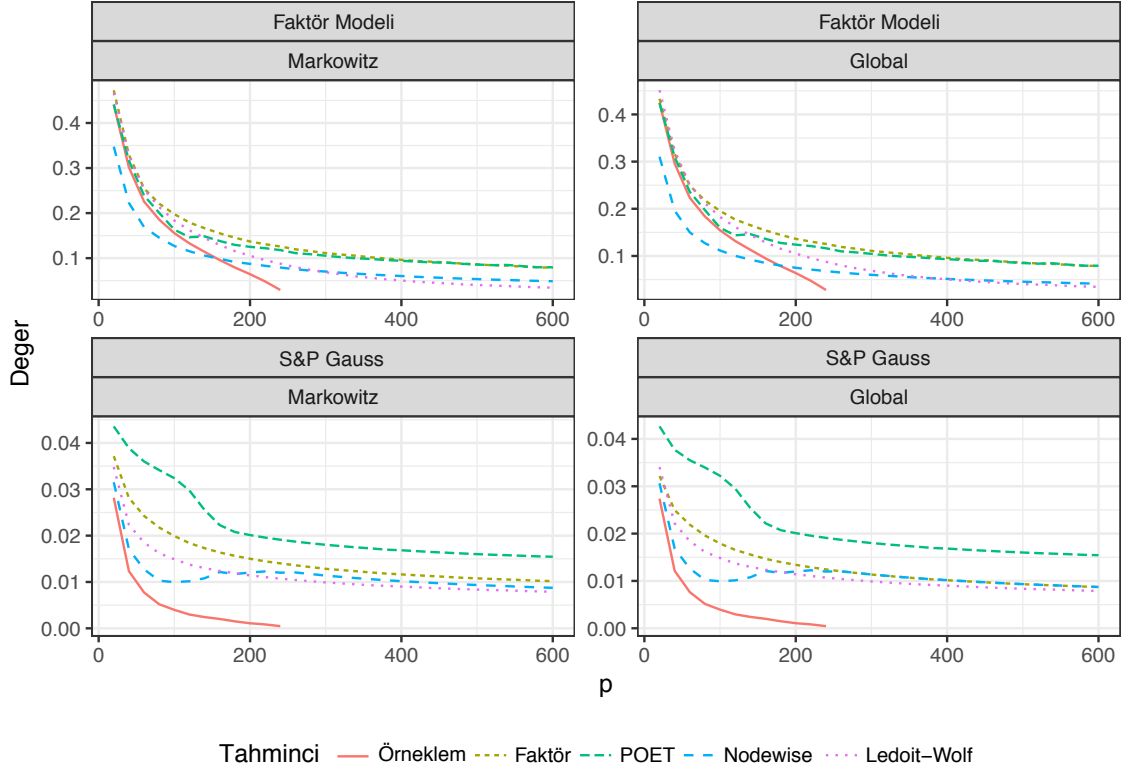
Bu bölümde, gözlemlenen faktör modeline dayalı türetilen veri ve S&P 500 endeksine dayalı türetilen veri kullanılarak hesaplanan kovaryans matrislerine dayanan simülasyon sonuçları verilmiştir. Şekillerde yatay ekseninde p sayısı ve dikey ekseninde ise 200 iterasyona dayanan sonuçların ortalama mutlak hata (mean absolute error) değerleri bulunmaktadır. Hata kareler ortalamalarının karakökü (root mean square error) oranlarına Ek B bölümünde yer verilmiştir. Şekil 4.1'de *Teorem 1*'de yer alan $|\hat{w}'_G \hat{\Sigma} \hat{w}_G - w'_G \Sigma w_G|$ global minimum varyans portföyünün varyans tahmin hatasına ve *Teorem 2*'de yer alan $|\hat{w}'_M \hat{\Sigma} \hat{w}_M - w'_M \Sigma w_M|$ Markowitz optimal portföy varyans tahmin hatasına yer verilmiş-

tır. Şekil 4.1’de örneklem kovaryans matrisine $\hat{\Sigma}_{SAM}$ dayalı portföy varyans hatası değerlerine $p = 260$ ’a kadar yer verilmiştir. $n = 252$ olduğundan dolayı p ’nin n sayısını $n \ll p$ aşan değerleri için örneklem kovaryans matrisinin tersi $\hat{\Sigma}_{SAM}^{-1}$ tekillik probleminden dolayı hesaplanamamaktadır. Gözlemlenen faktör modeline dayalı veri üzerinde $\hat{\Sigma}_{SAM}$ tahmincisine ait hata oranları diğer tüm tahmincilerin içerdiği hata oranlarının üzerinde seyretmektedir.



Şekil 4.1: Portföy Varyans Tahmin Hatası, Ortalama Mutlak Hata

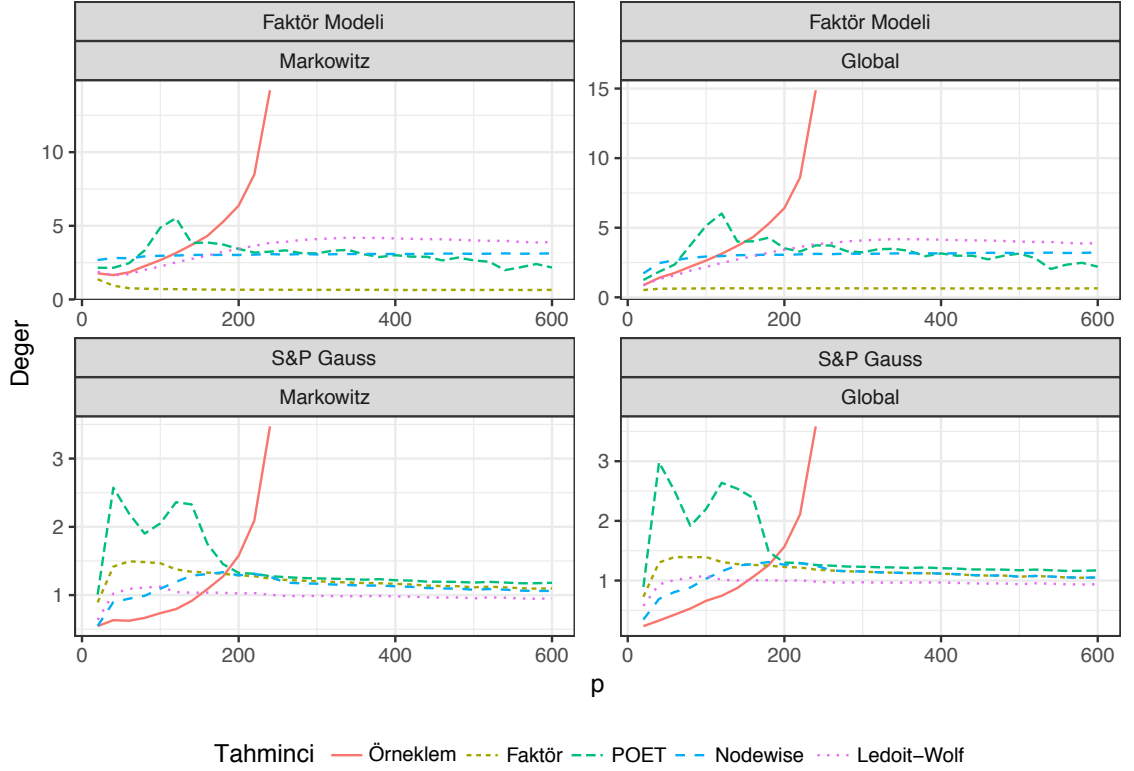
Şekil 4.1’de $\hat{\Theta}$ ile hesaplanan optimal portföy varyansı tahmin hatası S&P Gauss dağılımına dayalı türetilen veride p arttıkça diğer yöntemlere göre daha hızlı bir yakınsama oranına sahiptir. Gözlemlenen faktör modeline dayalı türetilen veride POET ve Faktör modeline dayanan kovaryans matris tahmincileri diğer yöntemlere göre daha hızlı yakınsama oranlarına sahiptir. Nitekim, gözlemlenen faktör modeline dayalı türetilen veri, gözlemlenen ve gözlemlenmeyen faktör modellerine dayalı tahminlemeyi esas alan bu



Şekil 4.2: Portföy Riski, Ortalama Mutlak Hata

iki yönteme avantaj sağlamaktadır. Ancak, gözlemlenen faktör modeline dayalı türetilen veride ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle diğer yöntemler arasındaki fark dikkat çekici boyutlarda görünmemektedir. Buna karşılık, S&P Gauss dağılımına sahip veri üzerinde POET tahmincisi iyi performans göstermemekte, portföy varyansı tahmin hatası diğer tahmincilerin üzerindedir. $\hat{\Sigma}_{SAM}$ ile hesaplanan portföy varyansı tahmin hatası S&P Gauss dağılımında daha düşük değerlere sahipken, $\hat{\Sigma}_{LWID}$ dayalı portföy varyansı tahmin hatası ise her iki veri türünde de aynı değerlere sahiptir. Portföy varyans tahmin hatasının hata kareler ortalamalarının karakökü oranları ise Ek B bölümünde Şekil B.1’de verilmiştir.

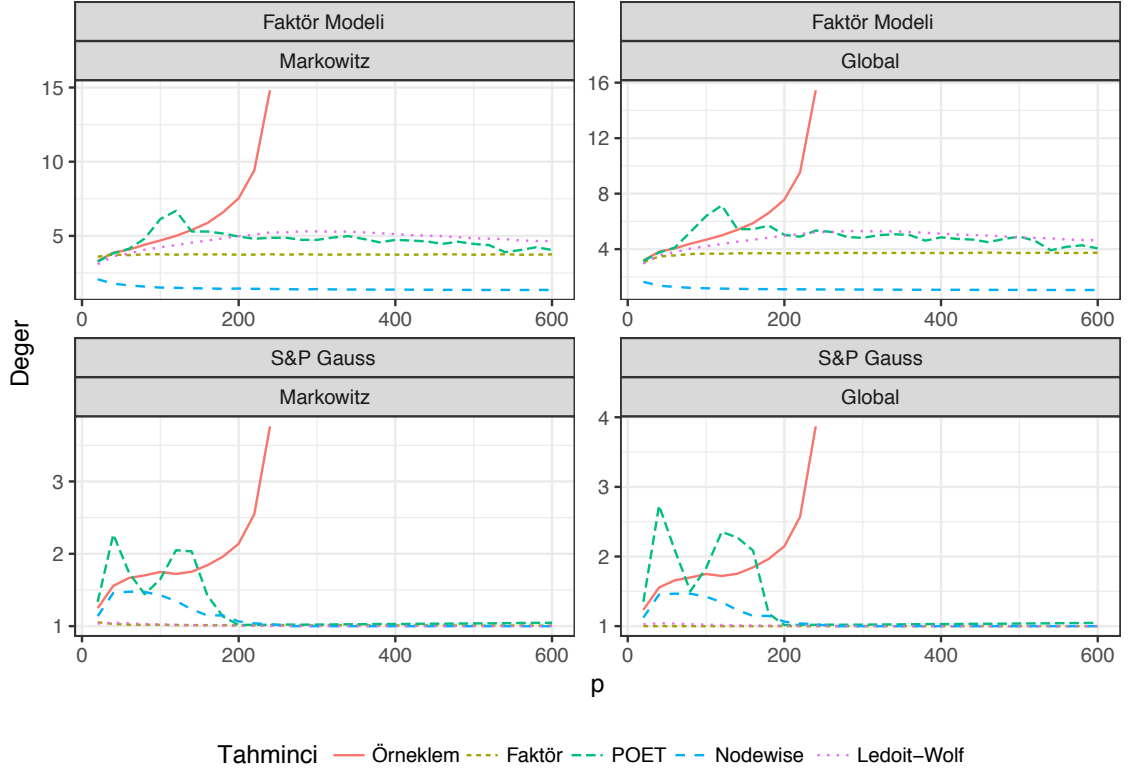
Şekil 4.2, p artarken global minimum portföy riskinin $\sqrt{\hat{w}'_G \hat{\Sigma} \hat{w}_G}$ ve Markowitz ortalama varyans portföy riskinin $\sqrt{\hat{w}'_M \hat{\Sigma} \hat{w}_M}$ her bir p için 200 iterasyonun hesaplanan mutlak ortalama oranlarını göstermektedir. Şekil 4.2’e göre, gözlemlenen faktör modeliyle türetilen veri üzerinde $\hat{\Theta}$ ile hesaplanan portföy riski $p < n$ olduğu durumda diğer



Şekil 4.3: Portföy Ağırlıkları Tahmin Hatası, Ortalama Mutlak Hata

tahmincilerin içerdiği risk oranlarından daha düşük bir seviyededir. Büyük portföylerde ise yani p arttıkça her iki veri türünde portföy riskinin hızla azaldığı gözlemlenmektedir. $\hat{\Sigma}_{SAM}$ ise S&P Gauss dağılımına dayanan veri üzerinde $p \ll n$ durumunda diğer tahmincilerden daha iyi performans göstermektedir. Buna karşın, $\hat{\Sigma}_{POET}$ ve $\hat{\Sigma}_{FAC}$ kovaryans matrisleriyle hesaplanan portföy riskleri diğer tahmincilere göre daha yüksektir. $\hat{\Sigma}_{POET}$ ve $\hat{\Sigma}_{FAC}$ matrislerine dayalı büyük örneklemlerde hesaplanan portföy riski düşmesine rağmen diğer tahmincilerin oranlarına göre görece olarak daha yüksek bir seyir izlediği söylenebilir. Çeşitli tahmincilerle hesaplanan portföy risklerinin hata kareler ortalamalarının karakökü ise Ek B kısmında Şekil B.3'te bulunmaktadır.

Şekil 4.3, *Teorem 3* ve *Teorem 4*'de yer alan global minimum varyans portföyünün ve Markowitz ortalama varyans portföyünün tahminlenen optimal portföy tahsis vektörü \hat{w} ile gerçek portföy tahsis vektörü w arasındaki farkın ℓ_1 normunun ortalama değerlerini



Şekil 4.4: Portföy Brüt Risk Toplamı, Ortalama Mutlak Hata

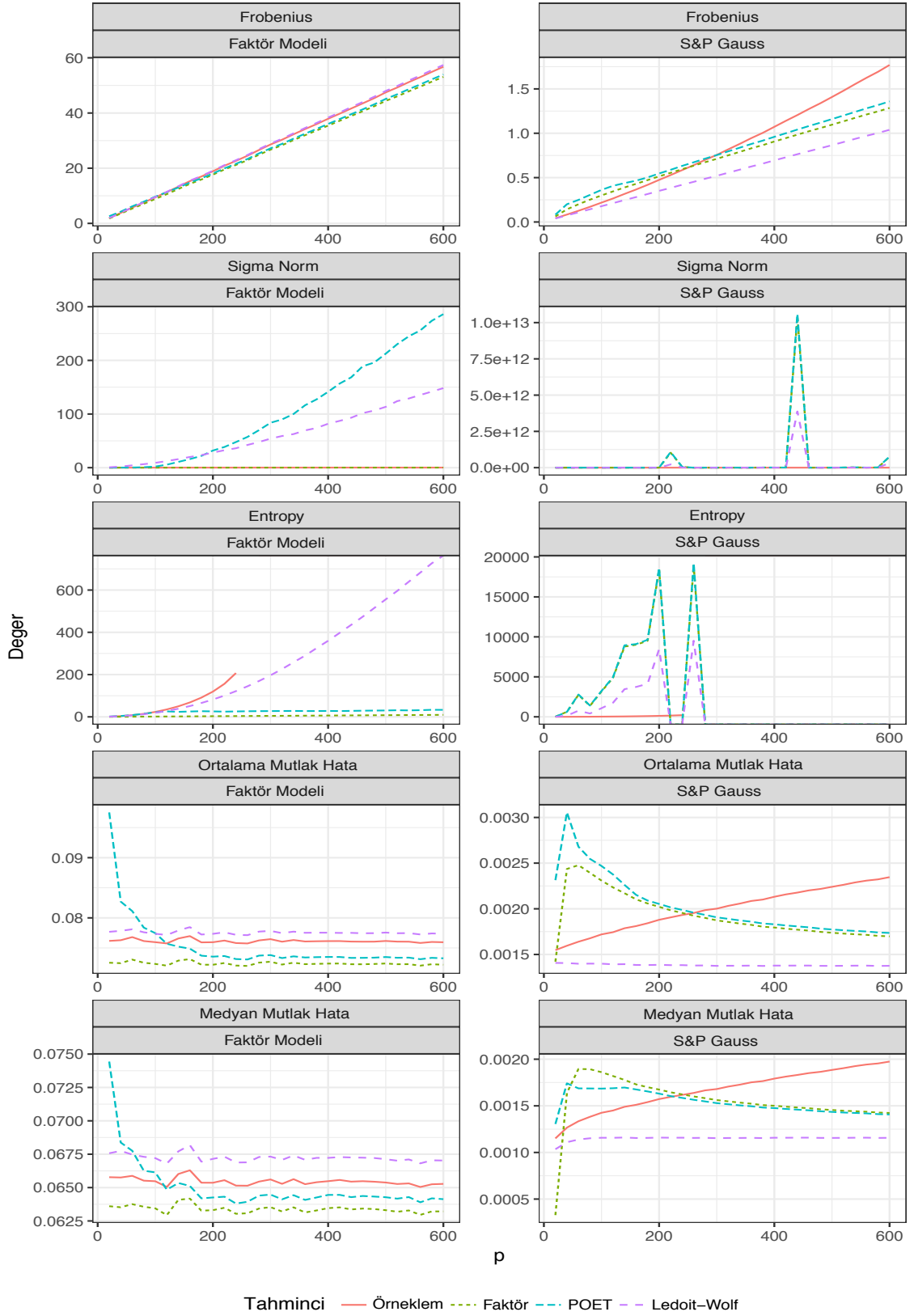
göstermektedir. Şekil 4.3'e göre her iki veride $\hat{\Sigma}_{SAM}$ ile oluşturulan optimal portföy ağırlıklarında meydana gelen hata p 'nin kademeli artışıyla birlikte gittikçe yükselmektedir. Ayrıca, $\hat{\Sigma}_{SAM}$ 'de $n \ll p$ değerleri için portföy ağırlıkları oluşturulamamıştır. Gözlemlenen faktör ile oluşturulan veride $\hat{\Sigma}_{FAC}$ kullanılarak hesaplanan portföy ağırlıkları tahmin hatası diğer tahmincilerden daha iyi sonuç vermektedir. $\hat{\Sigma}_{POET}$ tahmincisine ilişkin hesaplanan hata her iki türetilen veride diğer tahmincilerden daha büyüktür. $\hat{\Theta}$ ile oluşturulan portföy ağırlıkları tahmin hatası her iki veri türünde de diğer tahmincilerden daha durağan bir yapıya sahiptir. $\hat{\Theta}$ 'nın seyrek yapıda olması iyi-koşullanmış hisse senetleri dağılımını sağlamakta ve hesaplanan optimal portföy ağırlıklarının tahmin hatalarını minimize etmektedir. S&P Gauss dağılımına dayalı türetilen veride Nodewise ve Ledoit-Wolf arasındaki fark hisse senedi sayısı arttıkça giderek azalmaktadır. Ancak, $\hat{\Sigma}_{LWID}$ tahmincisi faktör modeline dayalı oluşturulan veri üzerinde kötü performans sergilemektedir.

Burada p arttıkça tahmin hatasının da arttığı gözlemlenmektedir. Portföy ağırlıklarının hata kareler ortalamalarının karakökü Ek B bölümünde Şekil B.2’de yer almaktadır. Şekil B.2’e göre POET tahmincisinin performansı istikrarlı bir yapıda değildir.

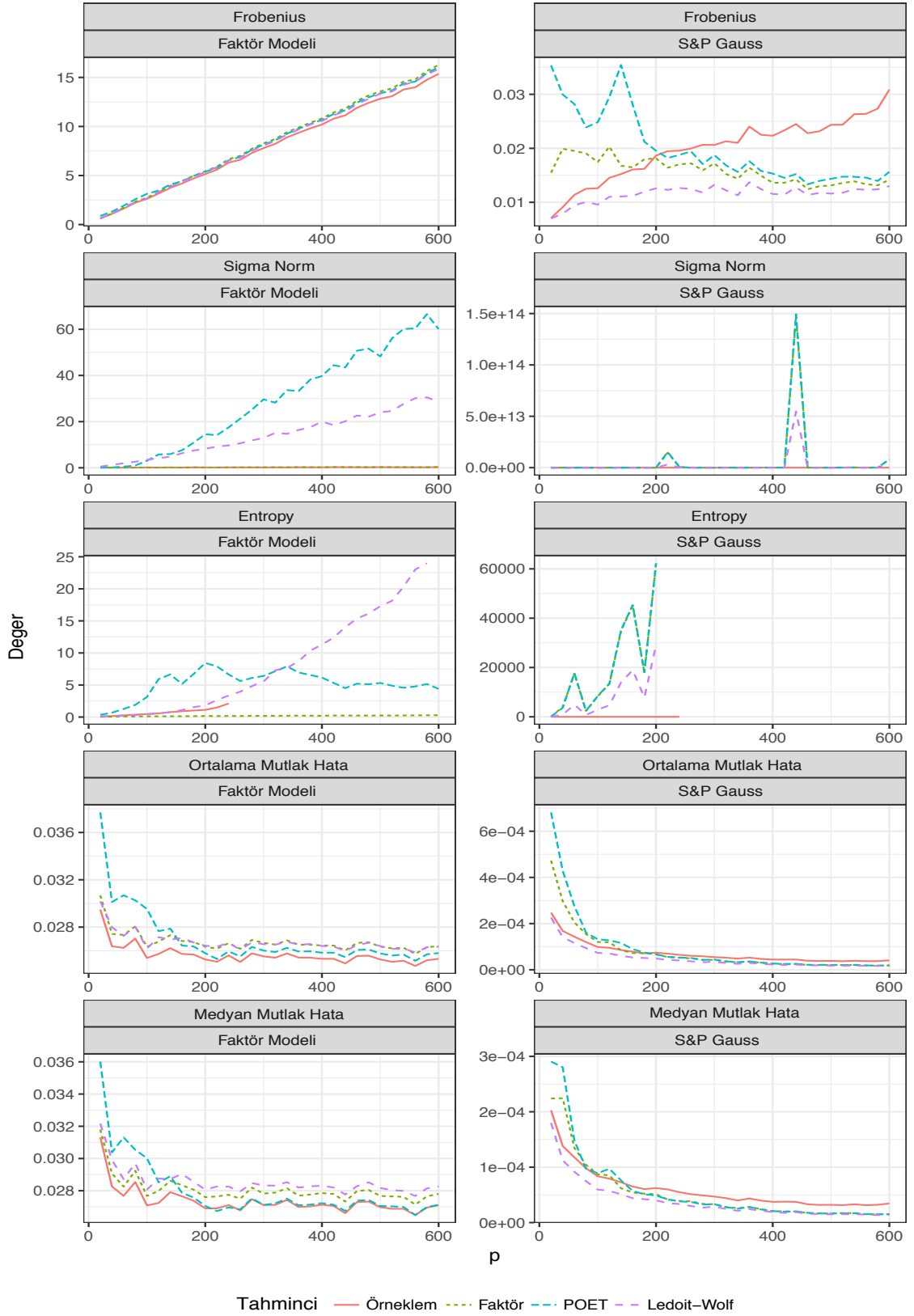
Şekil 4.4’de ℓ_1 normundan yararlanılarak global minimum portföy $\| \hat{w}_G \|_1$ ve Markowitz ortalama varyans portföyünün $\| \hat{w}_M \|_1$, p artarken brüt risk toplamına yer verilmiştir. Şekil 4.4, ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin iki veri üzerinde de her hisse senedi sayısı için 1’e yakın ve çoğunlukla da 1 olan bir risk toplamına sahip olduğunu göstermektedir. Diğer tahmincilerin portföylerinde ise gözlemlenen faktör modeline dayalı türetilen veri üzerinde bu oran daima daha yüksektir. Her iki veri türünde $\hat{\Sigma}_{SAM}$ dayalı portföylerde p sayısının artan değerleri için brüt risk toplamı gittikçe artmakta ve maksimum seviyeye ulaşmaktadır. $\hat{\Sigma}_{FAC}$, $\hat{\Sigma}_{LWID}$ ve $\hat{\Sigma}_{POET}$ ise büyük örneklemede daha iyi bir performans sergilemektedir. Tahmincilerin brüt risk toplamı hata kareler ortalamalarının karakökü değerlerine Şekil B.4’de Ek B bölümünde yer almaktadır.

4.3.2 Hata Ölçüm Sonuçları

Bu bölümde, gözlemlenen faktör modellerine ve S&P Gauss dağılımına dayalı oluşturulan veride örneklem kovaryans matris tahmincisi, Faktör modeli, Ledoit-Wolf tahmicisi, POET ile oluşturulan kovaryans matrisleri ve $\hat{\Theta}$ tahmininde meydana gelen hata oranları incelenmiştir. Çeşitli hata ölçümlerine (bakınız, Bölüm 3.8) dayanan sonuçlar araştırılmıştır. Şekil 4.5’de ve Şekil 4.6’de sağ sütun S&P Gauss dağılımına dayalı veri, sol sütun ise gözlemlenen faktör modelinden türetilen veri sonuçlarını göstermektedir. Literatürde sıkça kullanılan metodlar öncelikle kovaryans matrisinin hesaplanmasına ve sonrasında kovaryans matrisi tersinin alınmasına odaklanmıştır. Dolayısıyla, hata ölçütlerinin hepsi kovaryans matris tahmincileri için elde edilebilmektedir. Buna karşın, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonuna dayalı oluşturulan $\hat{\Theta}$ matrisinde doğrudan hisse senetlerinin yaklaşık ters matrisi oluşturulduğundan dolayı $\hat{\Theta}$ için yalnızca ters Frobenius normunun $\| \hat{\Sigma}^{-1} - \Sigma^{-1} \|$ performansı incelenmiştir.



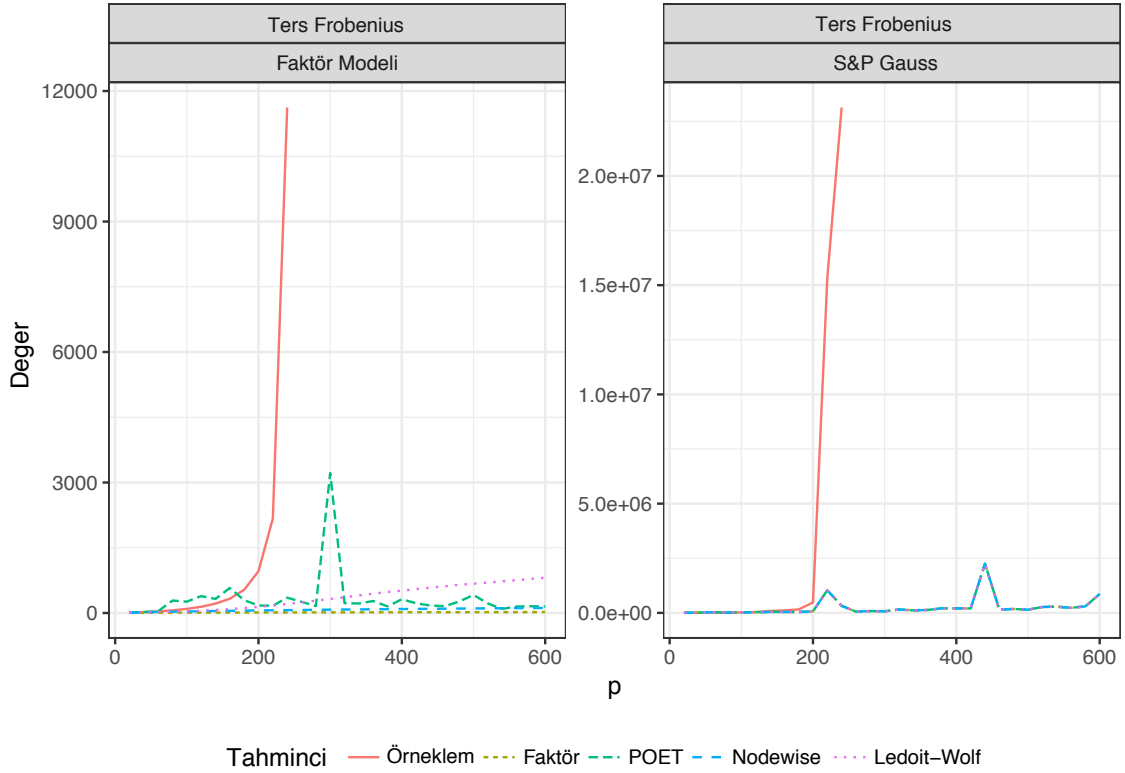
Şekil 4.5: Kovaryans Matrisi Hata Ölçümleri, Ortalama



Şekil 4.6: Kovaryans Matrisi Hata Ölçümleri, Standard Sapma

Şekil 4.5, $\hat{\Sigma}_{SAM}$, $\hat{\Sigma}_{FAC}$, $\hat{\Sigma}_{LWID}$ ve $\hat{\Sigma}_{POET}$ matrislerinin tahmininde meydana gelen hataların 200 iterasyona dayanan ortalamalarını göstermektedir. Şekil 4.5'te hesaplanan kovaryans matrisinin hatasını ölçmede beş farklı kriter dikkate alınmıştır. İlk satırda kovaryans matrisinin Frobenius normu, ikinci satırda Sigma normu, üçüncü satırda Entropy kayıp fonksiyonu, dördüncü satırda tahminlenen kovaryans matrisi ile gerçek kovaryans matrisi farkının $(\hat{\Sigma} - \Sigma)$ ortalama mutlak hatası ve son satırda ise medyan mutlak hatası yer almaktadır. Kovaryans matrislerinin Frobenius norm hatalarının p 'nin artmasıyla birlikte arttığı görülmektedir. S&P Gauss dağılımından gelen veride $\hat{\Sigma}_{LWID}$ matrisi diğer tahmincilerden daha düşük bir hataya sahiptir. Buna karşın, $\hat{\Sigma}_{POET}$ ve $\hat{\Sigma}_{LWID}$ matrislerinin Sigma norm hatası diğer kovaryans matrislerine göre daha yüksektir. Gözlemlenen faktör modelini esas alan veride $\hat{\Sigma}_{FAC}$ ve $\hat{\Sigma}_{POET}$ matrislerinin Entropy kayıp değerleri minimum düzeydedir. Buna karşın, $\hat{\Sigma}_{LWID}$ 'nin ise hisse senedi sayısı ile birlikte kaybı artmaktadır. S&P Gauss dağılımlı veride tüm tahmincilerin kaybı yüksek seyretmektedir. Entropy kayıp fonksiyonunda eksik veriler hesaplanamayan sonsuz değerlerden kaynaklanmaktadır. $(\hat{\Sigma} - \Sigma)$ 'nin ortalama mutlak hatası gözlemlenen faktör modeline dayanan veride tüm kovaryans matrisleri için durağan bir seyir izlerken, S&P Gauss dağılımlı veride ise p arttıkça giderek sıfıra yakınsamaktadır. $\hat{\Sigma}_{LWID}$ matrisi ise en düşük düzeye sahiptir. $\hat{\Sigma}_{SAM}$ 'ne bağlı hata ise p ile orantılı bir şekilde nispi olarak artmaktadır. Diğer bir ifadeyle, tahminlenen örneklem kovaryans matrisi ile gerçek kovaryans matrisi arasındaki fark hisse senedi sayısı arttıkça ıraksamaktadır. Ancak fark büyük oranlarda görünmemektedir. Büyük örnekleme örnekleme kovaryans matrisi kötü performans sergilemektedir. Medyan mutlak hata değerlerinde ise kovaryans matrislerinin ortalama mutlak hata performanslarıyla paralel bir seyir göstermektedir.

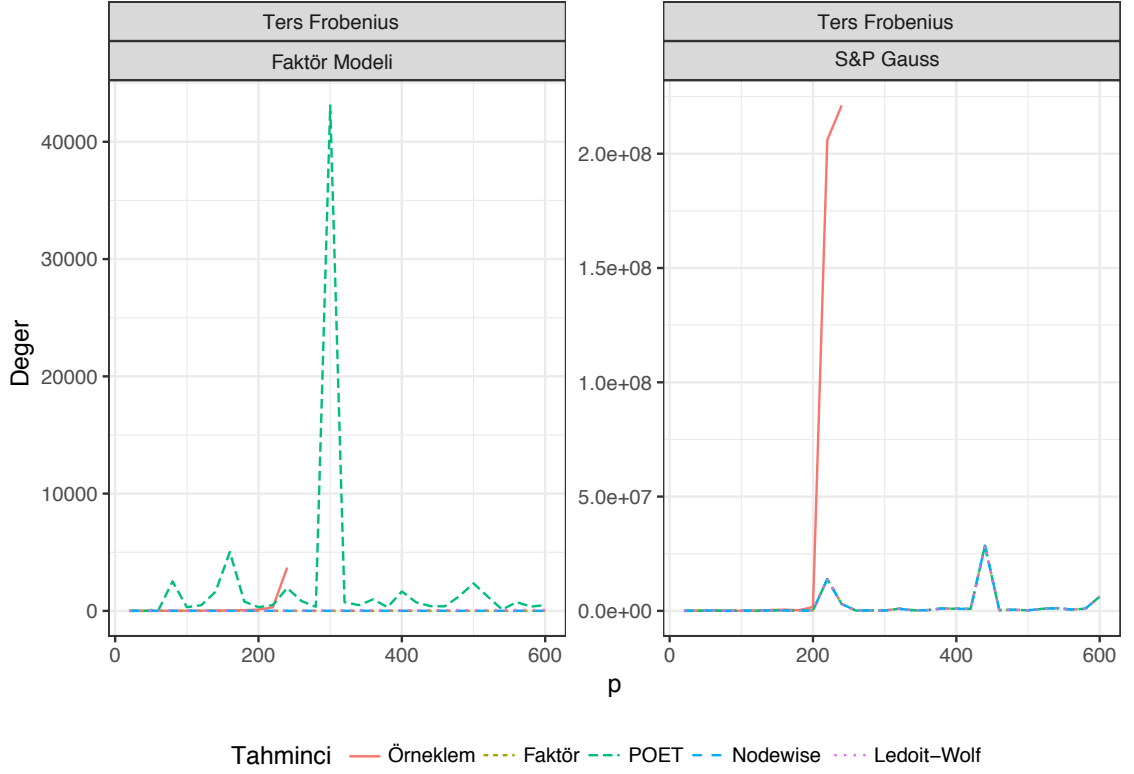
Şekil 4.6, kovaryans matrisi tahmin hatalarının standard sapmalarını vermektedir. Frobenius normda gözlemlenen faktör modeline dayalı veride tüm kovaryans matrislerinin standard sapmaları hisse senedi sayıları ile orantılı bir şekilde artmaktadır. S&P Gauss dağılımına dayanan veride ise $\hat{\Sigma}_{FAC}$, $\hat{\Sigma}_{POET}$ ve $\hat{\Sigma}_{LWID}$ 'un standard sapmaları p arttıkça



Şekil 4.7: Ters Frobenius Norm, Ortalama

düşerken, $\hat{\Sigma}_{SAM}$ 'de ise ters orantı söz konusudur. Sigma norm hatanın standard sapma değerlerinde $\hat{\Sigma}_{POET}$ ve $\hat{\Sigma}_{LWID}$ matrislerinde yüksek bir seyir görülmektedir. Entropy kaybı fonksiyonu standard sapma değerlerinde $\hat{\Sigma}_{LWID}$ 'un diğer kovaryans matrislerinden daha yüksek değerlere sahip olması dikkat çekmektedir. Şekil 4.6'nin son iki satırında hesaplanan standard sapma değerlerinin mutlak ortalama ve medyan ortalama değerleri verilmiştir. Her iki veri türünde de kovaryans matrislerinde p arttıkça hata düzeyi sıfıra yakınsamaktadır.

Şekil 4.7, kovaryans matrislerinin ters Frobenius norm hata ortalamalarını göstermektedir. $\hat{\Sigma}_{SAM}$ 'nin hesaplanan hatası diğer tahmincilerin oldukça üstündedir. $\hat{\Sigma}_{FAC}$ ve $\hat{\Theta}$ 'nin hesaplanan hataları diğer kovaryans matris hesaplanan hatalarının altında görünmektedir. $\hat{\Theta}$ 'nin seyrek yapıda olması büyük portföylerde kovaryans matrisinin içerdiği tahmin hatalarını önemli bir oranda azaltmaktadır. Şekil 4.8'da ise ters Frobenius norm



Şekil 4.8: Ters Frobenius Norm, Standard Sapma

hata standard sapmaları bulunmaktadır. Faktör modeli ile oluşturulan veride $\hat{\Sigma}_{POET}$ 'in standard sapması, S&P Gauss dağılımına dayanan veride ise $\hat{\Sigma}_{SAM}$ 'in standard sapması maksimum seviyede görünmektedir.

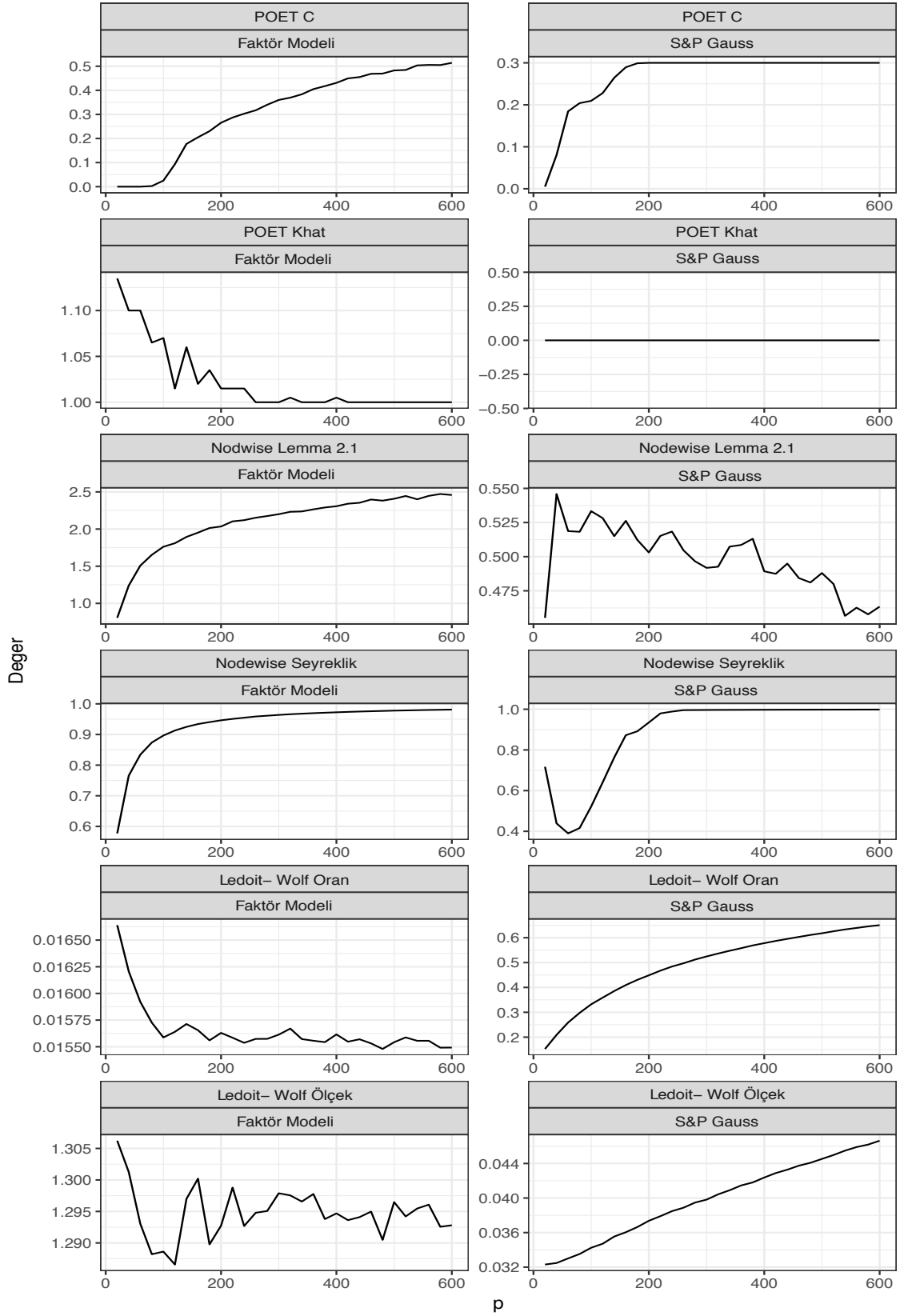
4.3.3 Serbest Ters Matrisinin Seyrekliği ve Diğer Sonuçlar

Şekil 4.9'de, tahmincilere ilişkin p sayısı artarken çeşitli sonuçları verilmiştir. İlk satır, $\hat{\Sigma}_{POET}$ 'nin pozitif tanımlı olması için modelde dışsal olarak belirlenen pozitif bir sabit olan $\zeta > 0$ 'nın p 'nin artan değerleri için değişimini temsil etmektedir. Simülasyonlarda ζ değeri sıfırdan başlamış ve $\hat{\Omega}$ 'nin tersi alınabilir hale gelene kadar 0.1 eklenerek giderek arttırılmıştır. Şekil 4.9'de de görüldüğü üzere ζ 'nın değeri gözlemlenen faktör modeline dayalı oluşturulan veri üzerinde p arttıkça giderek artış göstererek $p = 600$ için $\zeta = 0.5$ değeri ile maksimuma ulaşmıştır. S&P Gauss dağılımlı veride ise ζ , $p = 180$ 'e gelene

kadar artış göstermiş ve bu noktadan sonra p 'nin tüm değerleri için $\zeta = 0.3$ olarak sabit kalmıştır.

POET tahmincisine ilişkin diğer bir husus da gözlemlenmeyen faktörlerin ortaya çıkarılmasıdır. Şekil 4.9'de ikinci satır POET tahmincisiyle ortaya çıkarılan gözlemlenmeyen faktör sayısını \hat{K} göstermektedir. Gözlemlenen faktör modeline dayalı oluşturulan veri üzerinde \hat{K} sayısı en az 1 olarak tahminlenmiştir. Ancak, S&P Gauss dağılımlı veri üzerinde tüm p değerleri için $\hat{K} = 0$ olarak tespit edilmiştir. \hat{K} 'nın bulunmasında Bai ve Ng (2002)'nin bilgi kriteri (bakınız, 2.27) kullanılmıştır. S&P Gauss dağılımlı veri üzerinde hisse senedi getirilerini etkileyen bir faktörün bulunamaması POET tahmincisinin faktör sayısını belirlemede kullanılan bilgi kriterine karşı duyarlı olduğunu göstermektedir. Burada, bilgi kriteri seçimi büyük bir önem arz etmektedir. Şekil 4.9'de üçüncü satır, $\hat{\Theta}$ 'nın seyrekliğini temsil etmektedir. *Varsayım 2*'de $\hat{\Theta}$ 'nın seyreklik varsayımına yer verilmiştir. Buna göre $p < n$ durumunda $\max_j s_j = p - 1$ koşulu varsayılmaktadır. $n < p$ altında ise $\hat{\Theta}$ 'nın seyreklik varsayımı $\max_j s_j = o(\sqrt{n/\log p})$ 'dir. Diğer bir ifadeyle, $n < p$ durumunda $\hat{\Theta}$ 'nın seyreklik oranı artmaktadır. Nitekim, Şekil 4.9'de $\hat{\Theta}$ 'nın seyreklik oranları p arttıkça gittikçe yükselmektedir. $n \ll p$ olduğu noktasından itibaren de seyreklik düzeyinin maksimumuna ulaştığı görünmektedir. Diğer bir ifadeyle, büyük portföylerde seyreklik koşulları altında hisse senetleri getirileri arasındaki çoğu kovaryans sıfır veya sıfıra yakındır. Şekil 4.9'ün dördüncü ve beşinci satırı sırasıyla (2.12)'de yer alan $\frac{b_n^2}{d_n^2}$ (Ledoit-Wolf Oran) ve m_n (Ledoit-Wolf Ölçek) katsayılarının büyük örneklemdeki seyrini göstermektedir. $\frac{b_n^2}{d_n^2}$, birim matrisin I Ledoit-Wolf tahmincisinde kullanılan örneklem kovaryans matrisine oranını ifade etmektedir. m_n ise Ledoit-Wolf tahmincisindeki birim matrisinin ölçeğini göstermektedir. Her iki katsayı faktör modeli kullanılarak türetilen veride dalgalı bir düşüş eğilimindeyken, S&P Gauss dağılımlı veride ise doğrusal bir artış trendindedir.

Son olarak, Ek B bölümünde yer alan Şekil B.5 tahmincilere ilişkin kovaryans matrisi tahmini için ortalama süreyi (saniye cinsinden) göstermektedir. Şekil B.5'in sütunları veri üretme işlemini göstermektedir. Nodewise dışındaki tüm tahmincilerde p ile orantılı bir



Şekil 4.9: $\hat{\Theta}$ Matrisinin Seyrekliği ve Diğer Sonuçlar

şekilde kovaryans matrisi hesaplama süreleri doğrusal olarak artmaktadır. Ancak, $\hat{\Theta}$ 'nın tahmini için hesaplama süresi diğer tahmincilerin üstündedir. Nodewise tahmincisinde ise $p < n$ durumunda hesaplama süresi orantılı bir şekilde artış göstermektedir. $n < p$ olduğu noktada bir düşüş gerçekleşmekte ve sonrasında doğrusal olarak yine artmaktadır.

Bölüm 5

Ampirik Uygulama

5.1 Fama-French Üç Faktör Modeli Portföy Oluşturma

Bu bölümde günlük gözlemde 1 Temmuz 2013 - 30 Haziran 2017, aylık gözlemde ise Temmuz 2006 - Haziran 2017 dönemleri arasında BIST'te işlem gören tüm hisse senetlerinin getirileri ile piyasa portföy getirisi (BIST-TUM endeksi), firma büyüklükleri ve B/M arasında ilişki esas alınarak Fama-French üç faktör modeli uygulanacaktır. Burada esas amaç, $\hat{\Sigma}_{FAC}$ için hesaplanmasında gerekli olan gözlemlenen üç faktörü oluşturmak ve BIST'te geçerliliğini test ederek gözlemlenen faktör modeline dayalı kovaryans matrisini hesaplamaktır. BIST-TUM endeksi içinde yer alan firmalardan piyasa kapitilizasyonu ve B/M verilerine ulaşılamayan firmalar örneklem dışında tutulmuştur. Aşırı getirilerin hesaplanmasında risksiz faiz oranı olarak bir yıllık tahvil getirisi¹ kullanılmıştır. Firmaların piyasa değeri, B/M ve BIST-TUM endeks getirileri ile tüm hisse senetleri getirileri Bloomberg veritabanından elde edilmiştir. Hesaplamalarda hisse senedi logaritmik getirileri kullanılmıştır.

¹Tahvil getiri oranlarına <https://datastore.borsaistanbul.com/> adresinden ulaşılmıştır.

5.1.1 Metodoloji

Üç faktör modelini oluşturmada kullanılacak olan ilk portföy seti firma büyüklüğüne göre oluşturulmuş olan üç portföydür. Bu portföylerin oluşturulmasında Fama ve French (1993)'in yöntemi kullanılmıştır. Bu doğrultuda ilk aşamada her t yılının Haziran ayı sonunda, örneklemdaki firmalar piyasa kapitalizasyonlarına göre küçükten büyüğe sıralanmıştır. Örneğin, bizim örnekleminizde 2013 Haziran ayı sonunda, 2013 Temmuz - 2014 Haziran dönemine dahil edilecek hisse senetleri piyasa büyüklüklerine göre sıralanmıştır. Aynı işlem 2017 yılına kadar her bir örneklem dönemi için tekrarlanmıştır. Bu şekilde, medyan değerinin üzerinde kalanlar büyük firma değeri (Big Size Portfolio) olan grubu, altında olanlar ise küçük firma değeri (Small Size Portfolio) olan grubu temsil eden iki portföy oluşturulmuştur.

Portföy	Büyüklik	B/M	
1	SL	Küçük	Düşük
2	SN	Küçük	Orta
3	SH	Küçük	Yüksek
4	BL	Büyük	Düşük
5	BN	Büyük	Orta
6	BH	Büyük	Yüksek

Tablo 5.1: Firma Büyüklüğü - B/M Portföyleri

İkinci portföy setinde ise hisse senetleri B/M oranına göre üç ayrı gruba ayrılmıştır. Yine her t yılının Haziran ayı sonunda, firmaların $t - 1$ yılı sonundaki B/M oranına göre örneklemdaki firmalar büyükten küçüğe doğru sıralanmıştır. Örneğin, 2013 Haziran ayı sonunda, 2013 Temmuz - 2014 Haziran dönemindeki örneklemdaki hisse senetleri, 2012 yıl sonu verilerine göre üç gruba ayrılmıştır. B/M oranına göre oluşturulan bu segmentasyon süreci 2013 ve 2017 arası her yılın Haziran ayı sonunda tekrarlanmakta ve her yıl için B/M oranına dayalı yüksek B/M (High B/M), orta B/M (Neutral B/M) ve düşük B/M (Low B/M) olarak adlandırılan üç portföy elde edilmiştir. Bu portföylerin kesişimi ise

Tablo 5.1’de görüleceği üzere altı adet firma büyüklüğü - B/M portföyünü oluşturmaktadır.

SMB faktörünün getirileri, (4.1)’de yer alan firma büyüklüğü olarak küçük grupta yer alan üç portföyün ortalama getirisi ile büyük grupta yer alan üç portföyün ortalama getirileri arasındaki fark hesaplanarak elde edilmiştir. HML faktörünün getirileri ise (4.2)’de yer alan B/M yüksek olan hisse senetlerini içeren iki portföyün ortalama getirisi ile B/M düşük olan hisse senetlerini içeren iki portföyün ortalama getiri arasındaki fark hesaplanarak elde edilmiştir.

5.1.2 Örneklem Özellikleri ve Tanımlayıcı İstatistikler

Aşağıda yer alan tablolar, günlük ve aylık verilerde firma büyüklükleri ve B/M’ye göre oluşturulmuş altı portföy içerisindeki stokların sayısını, yüzdesini ve portföylerin tanımlayıcı istatistiklerini göstermektedir.

Dönem	Portföydeki Hisse Senedi Sayısı						Toplam
	SL	SN	SH	BL	BN	BH	
Temmuz 2013-Haziran 2014	21	51	59	56	54	22	263
Temmuz 2014-Haziran 2015	23	50	60	57	58	21	269
Temmuz 2015-Haziran 2016	23	54	56	57	52	24	266
Temmuz 2016-Haziran 2017	23	59	54	58	49	27	270
Ortalama Hisse Senedi Sayısı	22.5	53.5	57.25	57	53.25	23.5	

Tablo 5.2: Firma Büyüklüğü - B/M Portföylerindeki Hisse Senedi Sayıları (Günlük)

Dönem	Portföydeki Hisse Senetlerinin Yüzdesi					
	SL	SN	SH	BL	BN	BH
Temmuz 2013-Haziran 2014	%8	%19	%22	%21	%20	%8.3
Temmuz 2014-Haziran 2015	%8.5	%18.6	%22	%21	%21.5	%8
Temmuz 2015-Haziran 2016	%8.6	%20	%21	%21.4	%19.5	%9
Temmuz 2016-Haziran 2017	%8.5	%22	%20	%21.5	%18	%10
Ortalama Hisse Senedi Yüzdesi	%8.4	%20	%21.25	%21.22	%20	%9

Tablo 5.3: Firma Büyüklüğü - B/M Portföylerindeki Hisse Senetlerinin Yüzdesi (Günlük)

Tablo 5.2 ve Tablo 5.3'te günlük verilerle hesaplanmış altı portföyün hisse senedi sayıları ve yüzdeleri yer almaktadır. Tablolardan görüldüğü üzere hisse senetleri SN, SH, BL ve BN'de kümelenmektedir. SL ve BH'deki stokların sayısı, diğer dört portföy ile karşılaştırıldığında daha azdır. Firma büyüklükleri ile B/M oranı arasında negatif korelasyon bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle, büyük firmalar daha düşük B/M oranına sahipken, küçük firmalar ise daha yüksek B/M oranlarına sahiptir.

	SL	SN	SH	BL	BN	BH
Ortalama	0.000314	0.000388	0.000543	0.000304	0.000457	0.000448
Medyan	0.001390	0.001574	0.001251	0.000304	0.001354	0.001460
Standard Sapma	0.012566	0.011395	0.011709	0.011091	0.011858	0.012216
Maksimum	0.067183	0.066868	0.078613	0.067239	0.064487	0.069667
Minimum	-0.129649	-0.112494	-0.112755	-0.081379	-0.075820	-0.1003265
Çarpıklık	-2.054381	-2.217348	-2.110591	-1.081138	-0.908951	-1.217834
Basıklık	21.20712	21.0232	21.90687	11.34221	8.81809	12.3446

Tablo 5.4: Firma Büyüklüğü - B/M Portföyü Aşırı Getirilerinin Tanımlayıcı İstatistikleri (Günlük)

Tablo 5.4'de altı firma büyüklüğü ve B/M portföyünün günlük getirilerinin ortalama ve standart sapmaları verilmiştir. B/M ve ortalama getiri arasında pozitif bir korelasyon olduğu söylenebilir. SN, SH ve BN, BH portföylerinin ortalama getirisinin düşük B/M değerlere sahip SL ve BL portföy getirilerinden daha yüksek olduğu görülmektedir. Yani, portföylerin ortalama getirisi B/M oranları ile monoton olarak artmaktadır. Portföylerin standart sapmalarını göz önüne aldığımızda benzer sonuçlar çıkarabiliriz. Teori olarak, ortalama getiri ve risk pozitif korelasyona sahip olduğundan, küçük boyutlu portföylerin, son sütun haricindeki büyük boyutlu portföylere göre daha yüksek standart sapmalarının varlığı söylenebilir.

Tablo 5.5 aylık altı portföyün hisse senedi sayıları göstermektedir. Tablo 5.2'dakine benzer bir kümelenme görülmektedir. Tablo 5.6'te portföylerin yüzdeleri verilmiştir. Portföydeki hisse senetlerinin SN, SH, BL ve BN portföylerinde gruplaştığı görülmektedir. Tablo 5.7'da büyük boyutlu portföyler dikkate alındığında teori ile uyumlu bir B/M etkisi belirgindir. Yani, portföy getirileri B/M değerleri ile pozitif orantılıdır. Yüksek B/M de-

Dönem	Portföydeki Hisse Senedi Sayısı (Aylık)						
	SL	SN	SH	BL	BN	BH	Toplam
Temmuz 2006-Haziran 2007	15	35	32	38	37	22	179
Temmuz 2007-Haziran 2008	16	35	34	36	38	20	179
Temmuz 2008-Haziran 2009	15	32	37	37	40	18	179
Temmuz 2009-Haziran 2010	14	35	33	39	37	21	179
Temmuz 2010-Haziran 2011	14	33	38	38	40	16	179
Temmuz 2011-Haziran 2012	18	33	36	34	41	21	183
Temmuz 2012-Haziran 2013	21	36	32	35	39	25	188
Temmuz 2013-Haziran 2014	16	34	39	40	43	17	189
Temmuz 2014-Haziran 2015	16	33	42	40	44	15	190
Temmuz 2015-Haziran 2016	17	34	41	40	43	16	191
Temmuz 2016-Haziran 2017	15	40	36	42	37	21	191
Ortalama Hisse Senedi Sayısı	16	34.5	36.3	38	40	19.27	

Tablo 5.5: Firma Büyüklüğü - B/M Portföylerindeki Hisse Senedi Sayıları (Aylık)

ğerlerine sahip SH, BN ve BH portföyleri daha yüksek getiriye sahiptir. Küçük boyutlu portföyler, son sütun haricindeki büyük boyutlu portföylere göre daha yüksek standart sapmalara sahiptir.

Dönem	Portföydeki Hisse Senetlerinin Yüzdesi					
	SL	SN	SH	BL	BN	BH
Temmuz 2006-Haziran 2007	%8	%19.5	%18	%21	%20.6	%12
Temmuz 2007-Haziran 2008	%9	%19.5	%19	%20	%21	%11
Temmuz 2008-Haziran 2009	%8	%18	%20.6	%20.6	%22	%10
Temmuz 2009-Haziran 2010	%8	%19.5	%18	%22	%21	%12
Temmuz 2010-Haziran 2011	%8	%18	%21	%21	%22	%9
Temmuz 2011-Haziran 2012	%10	%18	%20	%18.5	%22	%11
Temmuz 2012-Haziran 2013	%11	%19	%17	%18.6	%21	%13
Temmuz 2013-Haziran 2014	%8	%18	%20.6	%21	%23	%9
Temmuz 2014-Haziran 2015	%8	%17	%22	%21	%23	%8
Temmuz 2015-Haziran 2016	%9	%18	%21.4	%21	%22	%8
Temmuz 2016-Haziran 2017	%8	%21	%19	%22	%19	%11
Ortalama Hisse Senedi Yüzdesi	%8.6	%18.6	%20	%21	%21.5	%10

Tablo 5.6: Firma Büyüklüğü - B/M Portföylerindeki Hisse Senetlerinin Yüzdesi (Aylık)

	SL	SN	SH	BL	BN	BH
Ortalama	-0.000461	0.003644	0.003684	0.003395	0.005071	0.005873
Medyan	0.004465	0.007968	0.005330	0.006932	0.009096	0.007902
Standard Sapma	0.088947	0.086991	0.085514	0.084204	0.084759	0.086524
Maksimum	0.189337	0.189337	0.189337	0.189337	0.189337	0.189337
Minimum	-0.378352	-0.378352	-0.378352	-0.378352	-0.378352	-0.378352
Çarpıklık	-0.991317	-1.127724	-1.174406	-1.245003	-1.245722	-1.233199
Basıklık	5.806626	6.424010	6.761674	7.043236	6.960565	6.601714

Tablo 5.7: Firma Büyüklüğü - B/M Portföyü Aşırı Getirilerinin Tanımlayıcı İstatistikleri (Aylık)

5.2 Portföy Kayan Pencere Uygulaması

Bu bölümde, farklı kovaryans matris tahmincileriyle oluşturulan portföy stratejilerinin kayan-pencere yaklaşımıyla elde edilen örneklem dışı öngörü performansları aşağıda yer alan kriterler çerçevesinde kıyaslanacaktır. Bunlar, (i) örneklem dışı portföy varyansı, (ii) örneklem dışı portföy Sharpe oranı ve (iii) portföy işlem devir hızı ve (iv) portföylerin kümülatif varlıklarından oluşmaktadır. Aynı zamanda işlem maliyetleri de dikkate alınarak örneklem dışı öngörü performans değerleri de hesaplanmıştır. Ayrıca, portföylerin örneklem içi portföy performansları da hesaplanmış olup Ek A bölümünde yer almaktadır.

5.2.1 Performans Ölçütleri

Kayan pencere yaklaşımıyla örneklem dışı öngörü performanslarını hesaplayabilmek için öncelikle tüm örneklem hacmi örneklem içi ve örneklem dışı veri olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. T örneklem içi tahmin penceresini göstermektedir. T tahmin penceresi uzunluğu n gözlem sayısından küçüktür, $T < n$. Örneklem içi dönem ($1 : T$), tahmin penceresi dışındaki dönem ise öngörü dönemi (forecast horizon) olarak da nitelendirilmekte ve ($T + 1 : n$) şeklinde ifade edilmektedir. Kayan pencere prosedüründe tahmin penceresine bir sonraki gözlem verisini dahil edilip ve en erken gözlem verisini düşürülerek çeşitli portföyler hesaplanmıştır. Bu süreç sonunda, her i 'nci strateji için $n - T$ tane portföy ağırlık vektörleri \hat{w}_t^i oluşturulmuştur, $t = T, \dots, n - 1$.

$t + 1$ zamanda işlem maliyeti göz önüne alınmaksızın örneklem dışı getiri:

$$\hat{\mu}_S = \frac{1}{n-T} \sum_{t=T}^{n-1} \hat{w}'_t \mathbf{R}_{t+1} \quad (5.1)$$

Örneklem dışı varyans:

$$\hat{\sigma}_S^2 = \frac{1}{(n-T)-1} \sum_{t=T}^{n-1} (\hat{w}'_t \mathbf{R}_{t+1} - \hat{\mu}_S)^2 \quad (5.2)$$

Sharpe oranı ise :

$$SR_S = \hat{\mu}_S / \hat{\sigma}_S \quad (5.3)$$

şeklinde gösterilmektedir.

İşlem maliyeti göz önüne alınarak hesaplanan Sharpe oranı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:

$$SR_{S,C} = \hat{\mu}_{S,C} / \hat{\sigma}_{S,C} \quad (5.4)$$

burada,

$$\hat{\mu}_{S,C} = \frac{1}{n-T} \sum_{t=T}^{n-1} RET_t \quad (5.5)$$

ve

$$\hat{\sigma}_{S,C}^2 = \frac{1}{(n-T)-1} \sum_{t=T}^{n-1} (RET_t - \hat{\mu}_{S,C})^2 \quad (5.6)$$

olarak gösterilmektedir. t zamanında işlem maliyetli portföy aşırı getirisi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Ban vd., 2016):

$$RET_t = \hat{w}'_t \mathbf{R}_{t+1} - c(1 + \hat{w}'_t \mathbf{R}_{t+1}) \sum_{j=1}^p |\hat{w}_{t+1,j} - \hat{w}_{t,j}^+| \quad (5.7)$$

burada, $\hat{w}_{t,j}^+ = \hat{w}_{t,j}(1 + r_{t+1,j})/(1 + r_{t+1,p})$ ve $r_{t+1,j}$, j 'nci hisse senedine risksiz faiz oranının eklenmesiyle oluşan getiriyi ve $r_{t+1,p}$ ise risksiz faiz oranının eklenmesiyle oluşan portföy getirisini ifade etmektedir, detaylı bilgi için bakınız Li (2015). Ayrıca, c işlem maliyetiyle orantılı olacak şekilde DeMiguel, Garlappi ve Uppal (2009)'in çalışmasındaki gibi 50 baz puan olarak alınmıştır.

Diğer bir performans kriteri de portföy işlem devir hızıdır:

$$PT = \frac{1}{n - T} \sum_{t=T}^{n-1} \sum_{j=1}^p |\hat{w}_{t+1,j} - \hat{w}_{t,j}^+| \quad (5.8)$$

burada, $\hat{w}_{t,j}^+$ ve $\hat{w}_{t+1,j}$, j , dengeleme öncesi (rebalancing) ve sonrası $t + 1$ zamanında hisse senedinin portföy ağırlıklarını göstermektedir. Son olarak, işlem maliyetleri de hesaplanarak t döneminde elde edilen portföy varlık değeri aşağıda verilmiştir (Ban vd., 2016):

$$W_{t+1} = W_t(1 + \hat{w}'_t r_{t+1}) \left(1 - c \sum_{j=1}^p |\hat{w}_{t+1,j} - \hat{w}_{t,j}^+| \right) \quad (5.9)$$

İşlem maliyetleri de olmadan t döneminde elde edilen portföy varlık (wealth) değeri şu şekilde gösterilmektedir:

$$W_{t+1} = W_t(1 + \hat{w}'_t r_{t+1}) \quad (5.10)$$

Portföy kümülatif varlık değerinin elde edilmesinde BIST-TUM endeks getirisiyle karşılaştırmak için hisse senetleri getirileri üzerinden hesaplamalar yapılmıştır. Diğer bir ifadeyle, hisse senedi aşırı getirilerine risksiz faiz oranı eklenmiştir.

Bölüm 5.2.1'de örneklem dışı portföy performanslarının hesaplanabilmesinde örneklem hacmi n , örneklem içi T ve örneklem dışı $n - T$ olmak üzere ikiye ayrılmıştır. Kayan örneklem dışı öngörü dönemi için her bir portföy tahmincisi için hisse senedi getiri vektörü ve kovaryans matrisi yeniden tahmin edilmektedir. Diğer bir ifadeyle, günlük bir

yıllık bir ($n - T = 252$) öngörü dönemi için global minimum ve Markowitz ortalama varyans portföylerinin hesaplanmasında gerekli olan girdiler 252 kez tahmin edilir. Bu bölümde her bir T için hesaplanan kovaryans matrislerine dayanan örneklem içi global minimum portföy varyansı (3.46) ve örneklem içi Markowitz portföy varyansı (3.48) da elde edilmiştir.

5.2.2 Veri

Örneklem içi ve örneklem dışı portföy performanslarının elde edilmesinde günlük veride kullanılan örneklem 1 Temmuz 2013 - 30 Haziran 2017 tarihleri arasında ($n = 1005$) BIST-TUM endeksinde yer alan tüm firmaları içermektedir ($p = 273$). Temmuz 2006 - Haziran 2017 arasındaki aylık gözlem sayısı ($n = 132$) ve hisse senedi sayısı ise ($p = 214$)'dür. Hedeflenen getiri günlük gözlemde % 0.0378, aylık gözlemde ise %0.7974'tür. Örneklem içi ve örneklem dışı dönemler günlük ve aylık veri için aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur:

A. Günlük Veri

1. Örneklem-içi period $T = 942$ (01.07.2013 - 29.03.2017), örneklem-dışı period $n - T = 63$ (30.03.2017 - 30.06.2017)

2. Örneklem-içi period $T = 879$ (01.07.2013 - 30.12.2016), örneklem-dışı period $n - T = 126$ (02.01.2017 - 30.06.2017),

3. Örneklem-içi period $T = 753$ (01.07.2013 - 27.06.2016), örneklem-dışı period $n - T = 252$ (28.06.2016 - 30.06.2017),

4. Örneklem-içi period $T = 670$ (01.07.2013 - 01.03.2016), örneklem-dışı period $n - T = 335$ (02.03.2016 - 30.06.2017)²

olarak belirlenmiştir.

²Finans literatüründe sıkça kullanılan 2/3 oranında öğrenme veri kümesi (training data) - 1/3 oranında test veri kümesi (testing data) stratejisi esas alınarak oluşturulmuştur.

B. Aylık Veri

1. Örneklem-içi period $T = 126$ (31.07.2006 - 30.12.2016), örneklem-dışı period $n - T = 6$ (31.01.2017 - 30.06.2017),
2. Örneklem-içi period $T = 120$ (31.07.2006 - 30.06.2016), örneklem-dışı period $n - T = 12$ (29.07.2016 - 30.06.2017),
3. Örneklem-içi period $T = 108$ (31.07.2006 - 30.06.2015), örneklem-dışı period $n - T = 24$ (31.07.2015 - 30.06.2017),
4. Örneklem-içi period $T = 96$ (31.07.2006 - 30.06.2014), örneklem-dışı period $n - T = 36$ (31.07.2014 - 30.06.2017),
5. Örneklem-içi period $T = 88$ (31.07.2006 - 31.10.2013), örneklem-dışı period $n - T = 44$ (29.11.2013 - 30.06.2017)³,
6. Örneklem-içi period $T = 84$ (31.07.2006 - 28.06.2013), örneklem-dışı period $n - T = 48$ (31.07.2013 - 30.06.2017)
7. Örneklem-içi period $T = 72$ (31.07.2006 - 29.06.2012), örneklem-dışı period $n - T = 60$ (31.07.2012 - 30.06.2017)

olarak oluşturulmuştur. Her yatırım öngörü dönemi sonuna kadar elde edilen portföylerdeki hisse senetleri elde tutulmuş ve optimizasyon işlemi sonunda yatırımcıya ait risk ve getiri değerleri hesaplanmıştır.

5.2.3 Örneklem Dışı Öngörü Sonuçları

Bu bölümde, $\hat{\Sigma}_{SAM}$, $\hat{\Sigma}_{LWID}$, $\hat{\Sigma}_{FAC}$, $\hat{\Sigma}_{POET}$ ve $\hat{\Theta}$ matrislerinin hesaplamasına dayalı optimal portföy ağırlıkları oluşturulmuş ve farklı yatırım ufkuna sahip yatırımcılar için en düşük riske sahip portföy stratejileri önerilmiştir. Portföy stratejilerinin örneklem dışı performanslarının incelenmesinde farklı öngörü ufukları için kayan-pencere yaklaşımı uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlarda günlük ve aylık gözlemler üzerinden algoritmanın

³2/3 öğrenme veri kümesi - 1/3 test veri kümesi stratejisi esas alınarak oluşturulmuştur.

performansı değerlendirilmiştir. Buna göre, Tablo 5.8’de $n - T = 63$, $n - T = 126$ ve $n - T = 252$ sırasıyla günlük gözlem için üç aylık, altı aylık ve bir yıllık yatırım öngörü dönemlerinde optimal portföy örneklem dışı getiri oranları, örneklem dışı varyansı, Sharpe ve işlem devir hızları verilmiştir. Buna göre, ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi $n - T = 63$, $n - T = 126$ ve $n - T = 252$ yatırım dönemleri için oluşturulan portföy getirileri ve Sharpe oranlarının diğer tahmincilerden daha yüksek olduğu görülmektedir. Örneğin, işlem maliyeti olmayan global minimum varyans portföyünde $n - T = 63$ için farklı ağırlıklara sahip hisse senetlerinden ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi kullanılarak oluşturulan portföyün günlük varyansı $1.829e - 05$ ve üç aylık standart sapması ise %3.39’dur. Böyle bir riske sahip portföyün beklenen günlük getirisi 0.0012726, üç aylık portföy getirisi %8 olarak bulunmuştur. İkinci en iyi ise Faktör modeline dayalı oluşturulan portföy olarak görülmektedir. Faktör modeline dayalı portföyün üç aylık standart sapması %3.75 iken, günlük oluşturulan üç aylık portföy getirisi ise %2.82’dir. Faktör modeliyle oluşturulan portföy ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle oluşturulan portföyden daha düşük portföy getirisine karşılık daha yüksek portföy risk seviyesine sahiptir. Markowitz portföyünde de durum değişmemektedir. Nodewise portföyü %3.5 ile en düşük riske ve % 8.74 ile de en yüksek portföy getirisine sahiptir. Global minimum varyans ve Markowitz ortalama varyans portföylerine işlem maliyetleri dahil edildiğinde ise POET, Ledoit-Wolf ve örneklem kovaryans matris tahmincilerine dayanan portföy getirilerinin ve Sharpe oranlarının negatif seviyelere gerilediği görülmektedir. İşlem maliyetli Markowitz ortalama varyans portföyünde ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi portföy kaybına neden olmadan %6.78 kazandıran tek portföy olarak görülmektedir. $n - T = 126$ yatırım ufkunda işlem maliyetsiz Markowitz ortalama varyans portföyünde ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin altı aylık hesaplanan portföy riski %5.37 buna karşılık gelen portföy getirisi %16.66 iken, Faktör modeline dayalı portföy riski %11.16, portföy getirisi ise %14.20’dir. Yani, Faktör modeli ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle benzer bir getiri oranı elde etmede iki katından fazla riske maruz kalmaktadır. Seyreklik koşulları altında, $\hat{\Theta}$ ’nın pek çok köşegen dışı

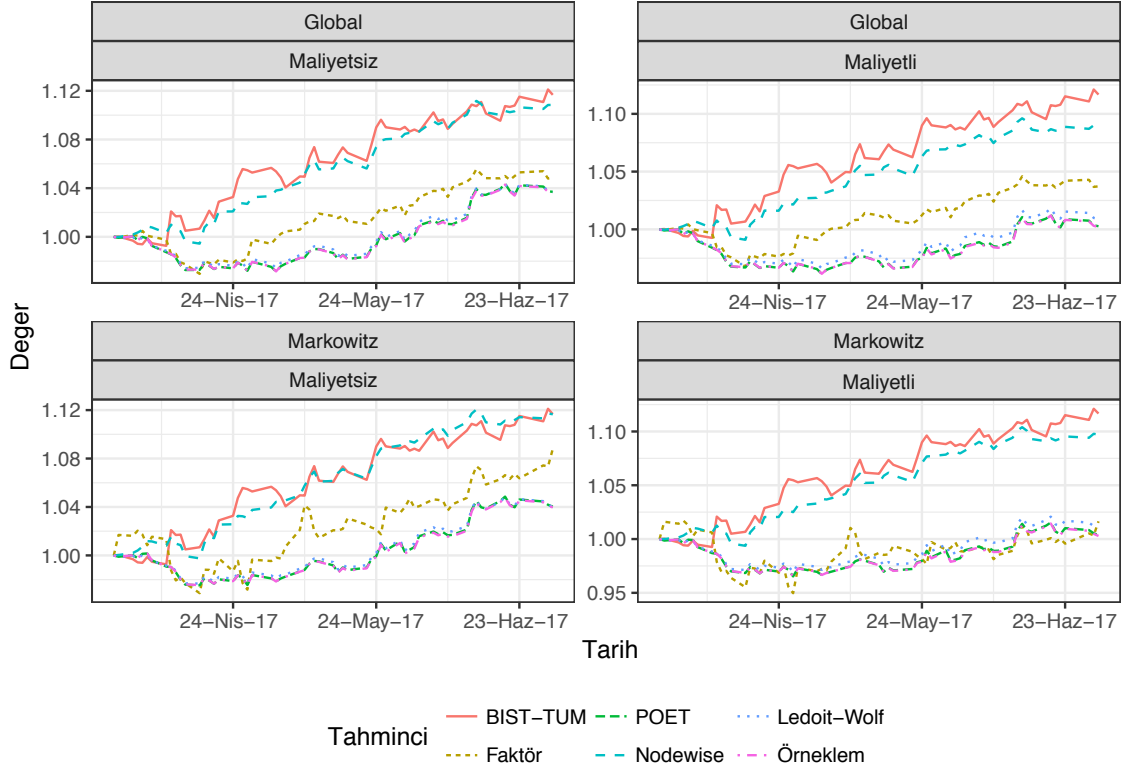
(off-diagonal) elemanlarının sıfıra doğru budanmasının tahmin edilen risk bakımından optimal portföy performansını arttırdığı görülmektedir.

Tablo 5.8’de diğer bir dikkat çeken nokta da negatif getiriler ve Sharpe oranlarıdır. Portföylerdeki bu bozulma esas olarak yüksek işlem devir hızlarından kaynaklanmaktadır. Portföylerde işlem maliyetlerini göz önüne aldığımızda yüksek işlem devir hızına sahip tahmincilerin performansları getiri oranları ve dolayısıyla da Sharpe oranları negatif bir biçimde etkilenmektedir. Nitekim, $n - T = 252$ için işlem maliyetli Faktör modeli Markowitz ortalama varyans portföyü Sharpe oranının ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle elde edilen portföy Sharpe oranından görece olarak yüksek olduğu görünmektedir. Ancak, burada Faktör modeli işlem devir hızı 0.46720 ile ℓ_1 cezalı Nodewise işlem devir hızından oldukça yüksek bir seviyededir. Portföyde hesaplanan işlem maliyeti Faktör modeli Sharpe oranının negatif seviyelere gerilemesine neden olmaktadır. Ayrıca, oluşturulan ℓ_1 cezalı Nodewise portföylerinde işlem devir hızı tahminciler arasında genel olarak en düşük seviyeye sahiptir. Bu durum portföylerde işlem maliyetlerinin diğer tahmincilerden daha az tutarlarda olduğunu göstermektedir.

	Global				Markowitz			
	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı
$T = 942, n - T = 63$								
Maliyetsiz								
Faktör	0.0004479	2.234e-05	0.09476	0.03495	0.0011416	9.308e-05	0.11833	0.21866
POET	0.0002706	2.217e-05	0.05748	0.10832	0.0003149	2.312e-05	0.06548	0.11574
Nodewise	0.0012726	1.829e-05	0.29753	0.05442	0.0013888	1.960e-05	0.31365	0.05711
Ledoit-Wolf	0.0002511	1.998e-05	0.05617	0.08742	0.0003007	2.089e-05	0.06578	0.09435
Örnekleme	0.0002614	2.198e-05	0.05575	0.10831	0.0003050	2.295e-05	0.06367	0.11589
Maliyetli								
Faktör	0.0001739	2.199e-05	0.03708	-	-0.0001155	9.449e-05	-0.01188	-
POET	-0.0003722	2.154e-05	-0.08018	-	-0.0003578	2.318e-05	-0.07431	-
Nodewise	0.0009710	1.858e-05	0.22526	-	0.0010770	1.986e-05	0.24171	-
Ledoit-Wolf	-0.0002754	1.952e-05	-0.06232	-	-0.0002550	2.093e-05	-0.05575	-
Örnekleme	-0.0003817	2.133e-05	-0.08264	-	-0.0003689	2.298e-05	-0.07695	-
$T = 879, n - T = 126$								
Maliyetsiz								
Faktör	2.168e-04	2.141e-05	0.0468583	0.03806	1.127e-03	9.901e-05	0.11323	0.27086
POET	-1.554e-06	2.727e-05	-0.0002976	0.12883	1.003e-04	2.809e-05	0.01892	0.13443
Nodewise	1.219e-03	2.260e-05	0.2563353	0.05627	1.323e-03	2.290e-05	0.27651	0.05937
Ledoit-Wolf	1.086e-04	2.353e-05	0.0223881	0.10020	2.121e-04	2.428e-05	0.04304	0.10512
Örnekleme	-3.154e-06	2.737e-05	-0.0006030	0.12874	9.492e-05	2.824e-05	0.01786	0.13441
Maliyetli								
Faktör	-2.112e-05	2.131e-05	-0.0045737	-	-2.892e-04	9.874e-05	-0.02911	-
POET	-6.872e-04	2.729e-05	-0.1315398	-	-6.058e-04	2.857e-05	-0.11333	-
Nodewise	9.204e-04	2.278e-05	0.1928575	-	1.012e-03	2.311e-05	0.21047	-
Ledoit-Wolf	-4.297e-04	2.350e-05	-0.0886326	-	-3.445e-04	2.463e-05	-0.06942	-
Örnekleme	-6.873e-04	2.741e-05	-0.1312664	-	-6.101e-04	2.873e-05	-0.11381	-
$T = 753, n - T = 252$								
Maliyetsiz								
Faktör	3.581e-04	3.456e-05	0.060910	0.03864	1.568e-03	1.772e-04	0.117822	0.46720
POET	5.904e-05	3.770e-05	0.009614	0.15858	5.578e-05	3.733e-05	0.009129	0.16221
Nodewise	8.185e-04	8.005e-05	0.091485	0.05779	7.434e-04	7.748e-05	0.084450	0.06253
Ledoit-Wolf	9.299e-05	3.396e-05	0.015958	0.11261	9.711e-05	3.355e-05	0.016765	0.11625
Örnekleme	6.870e-05	3.826e-05	0.011108	0.15767	6.220e-05	3.790e-05	0.010103	0.16121
Maliyetli								
Faktör	1.434e-04	3.477e-05	0.024316	-	-8.226e-04	1.765e-04	-0.061921	-
POET	-7.508e-04	3.858e-05	-0.120883	-	-7.698e-04	3.881e-05	-0.123574	-
Nodewise	5.201e-04	8.058e-05	0.057937	-	4.207e-04	7.819e-05	0.047571	-
Ledoit-Wolf	-4.849e-04	3.471e-05	-0.082303	-	-4.976e-04	3.473e-05	-0.084427	-
Örnekleme	-7.358e-04	3.909e-05	-0.117696	-	-7.577e-04	3.934e-05	-0.120810	-

Tablo 5.8: Günlük Portföy Performansı, $n - T = 63, 126, 252$

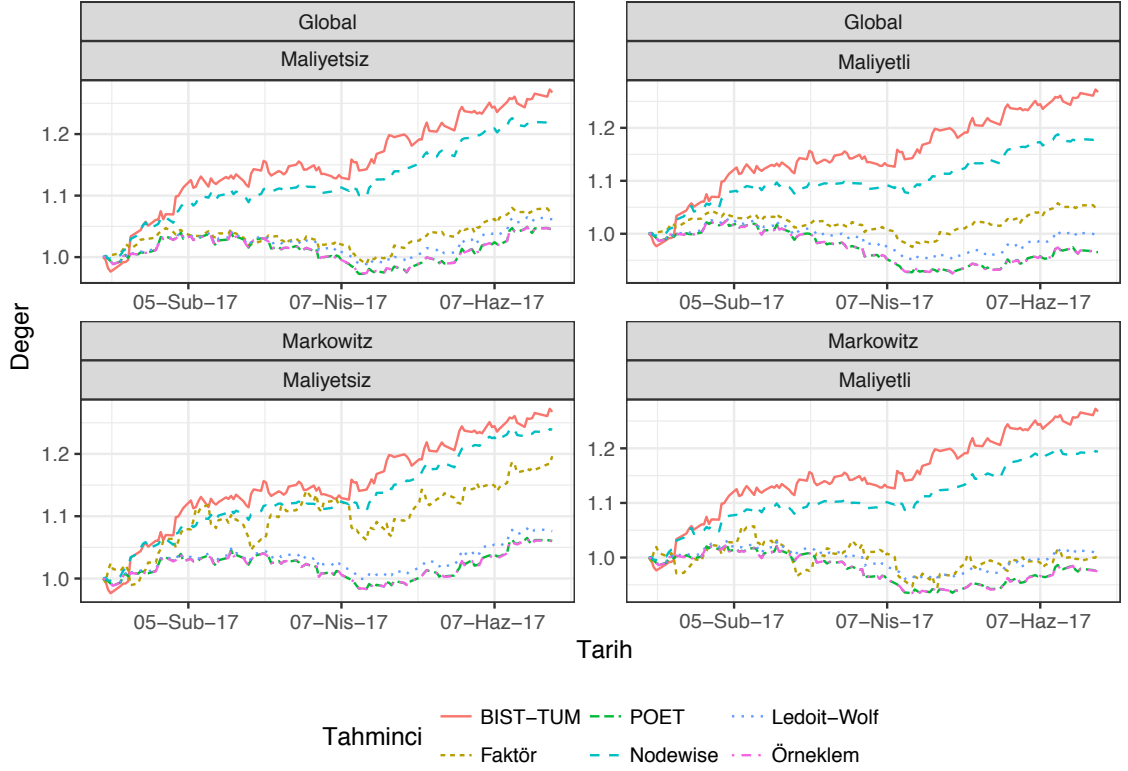
Şekil 5.1, Şekil 5.2 ve Şekil 5.3, $\hat{\Sigma}_{SAM}$, $\hat{\Sigma}_{LWID}$, $\hat{\Sigma}_{FAC}$, $\hat{\Sigma}_{POET}$ ve $\hat{\Theta}$ 'a dayanan global minimum ve Markowitz portföylerinin örnekleme dışı öngörü döneminde elde edilen kümülatif günlük portföy varlıklarını göstermektedir. Tahmincilerle oluşturulan portföy



Şekil 5.1: Günlük Portföy Varlığı, $T = 942$, $n - T = 63$

varlık performanslarını karşılaştırmada pasif olarak yönetilen BIST-TUM endeksi kriter (benchmark) olarak kullanılmıştır. BIST-TUM endeksinde işlem maliyetli ve işlem maliyetsiz her iki durum için başlangıç varlığı 1 TL olarak belirlenmiştir. Ancak, burada BIST-TUM endeksi herhangi bir işlem maliyeti içermemektedir. Diğer tüm tahminciler için işlem maliyeti 50 baz puan olarak kullanılmıştır.

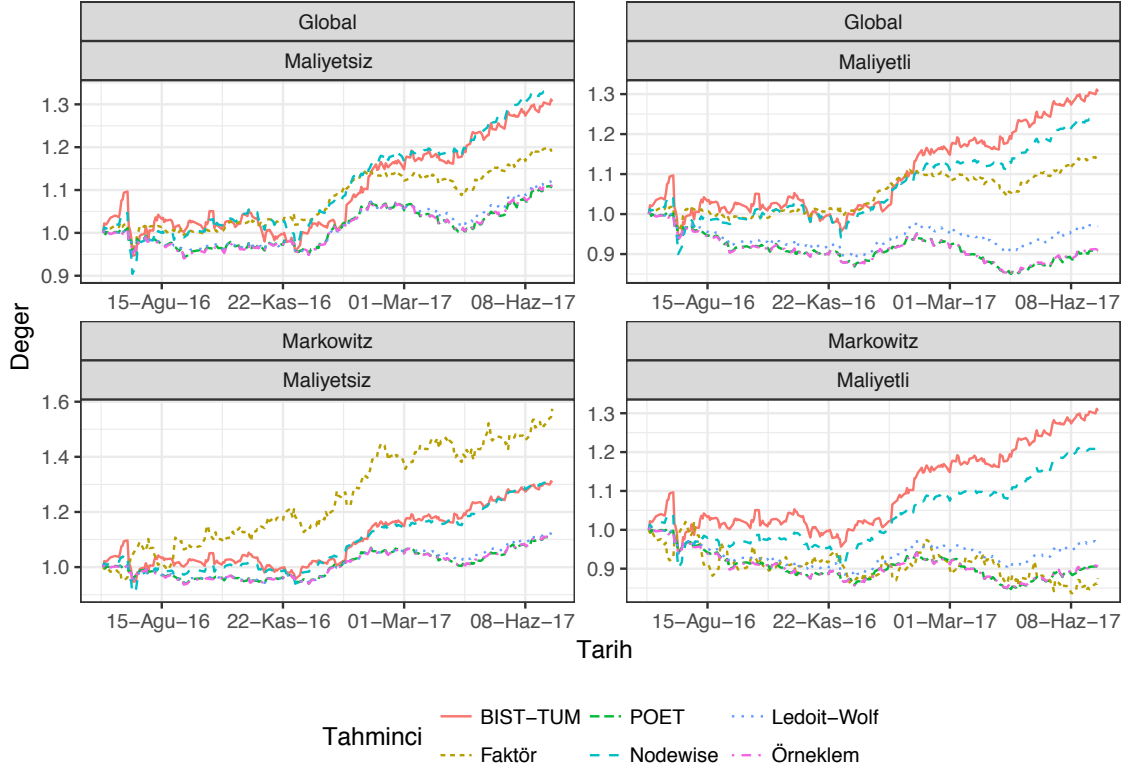
Şekil 5.1’te ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi global minimum ve Markowitz ortalama varyans portföylerinde diğer tahmincilerden üstün performans göstermektedir. ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi ile BIST-TUM endeksi işlem maliyetsiz portföyler üzerinde benzer varlık oranlarına sahiptir. Örneğin, global minimum varyans portföyünde ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin dönem sonu getirisi yaklaşık 1.12 TL’dir. Büyük portföylerde bu oran nominal olarak daha büyük olacaktır. Portföylerin işlem maliyetleriyle birlikte ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi ile BIST-TUM endeksi arasındaki fark artmaktadır. Markowitz



Şekil 5.2: Günlük Portföy Varlığı, $T = 879$, $n - T = 126$

ortalama varyans portföyündeki fark ise nispeten daha azdır. ℓ_1 cezalı Nodewise tahmin-cisinden sonra Faktör modeli en iyi performans göstermektedir. İşlem maliyetli optimal Markowitz ortalama varyans portföyünde ise Faktör modeli, $\hat{\Sigma}_{SAM}$, $\hat{\Sigma}_{LWID}$ ve $\hat{\Sigma}_{POET}$ ile benzer getirilere sahiptir. İşlem maliyetli Markowitz ortalama varyans portföyünde $\hat{\Sigma}_{SAM}$, $\hat{\Sigma}_{LWID}$, $\hat{\Sigma}_{FAC}$, $\hat{\Sigma}_{POET}$ tahmincilerinin getirileri dönem boyunca $1 TL$ 'nin altında inmiş ve dönem sonundaki getirisi ise başlangıç düzeyindedir. Şekil 5.2'da ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin getirisi diğer tahmincilere nazaran daha yüksek, BIST-TUM endeksine göre ise daha düşük durumdadır. Getirilerin nominal değerleri ise üç aylık getirilere göre daha yüksektir. Ancak, $\hat{\Sigma}_{SAM}$ ve $\hat{\Sigma}_{POET}$ tahmincileri işlem maliyetli portföylerde dönem sonu varlığı $1 TL$ 'nin altındadır.

Şekil 5.3'de ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi global minimum portföylerde BIST-TUM endeksinin üstünde seyretmektedir. Ancak, işlem maliyetleri dahil edildiğinde ℓ_1 cezalı

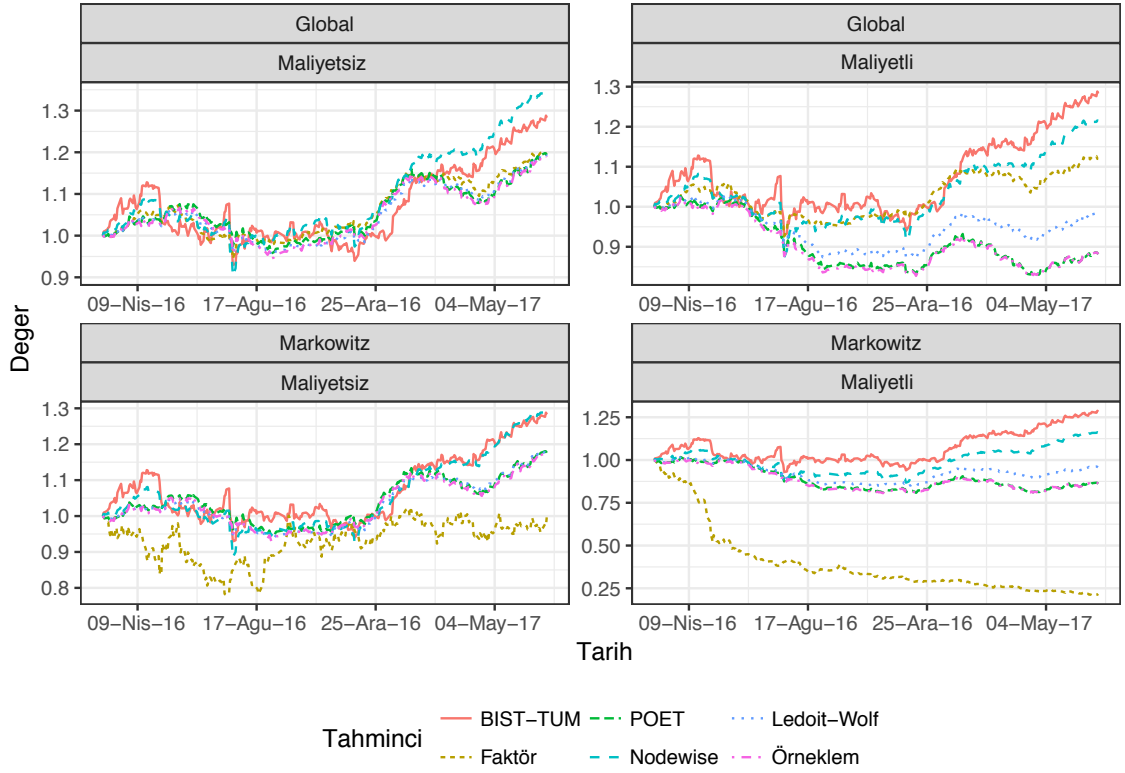


Şekil 5.3: Günlük Portföy Varlığı, $T = 753$, $n - T = 252$

	Global				Markowitz			
	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı
$T = 670$, $n - T = 335$								
Maliyetsiz								
Faktör	1.889e-04	3.266e-05	0.033045	0.03875	-0.0002076	2.705e-04	-0.01262	0.90850
POET	1.906e-04	3.599e-05	0.031774	0.18156	0.0001432	3.612e-05	0.02384	0.18600
Nodewise	5.570e-04	7.031e-05	0.066426	0.06110	0.0004349	6.865e-05	0.05249	0.06393
Ledoit-Wolf	1.771e-04	3.072e-05	0.031943	0.11798	0.0001284	3.088e-05	0.02311	0.12194
Örneklem	1.765e-04	3.630e-05	0.029289	0.17882	0.0001288	3.653e-05	0.02131	0.18327
Maliyetli								
Faktör	-2.199e-05	3.283e-05	-0.003837	-	-0.0047767	3.250e-04	-0.26497	-
POET	-7.352e-04	3.655e-05	-0.121611	-	-0.0008031	3.733e-05	-0.13144	-
Nodewise	2.425e-04	7.069e-05	0.028846	-	0.0001059	6.930e-05	0.01272	-
Ledoit-Wolf	-4.270e-04	3.115e-05	-0.076495	-	-0.0004944	3.173e-05	-0.08776	-
Örneklem	-7.350e-04	3.681e-05	-0.121143	-	-0.0008034	3.766e-05	-0.13090	-

Tablo 5.9: Günlük Porföy Performansı, $T = 670$, $n - T = 335$

Nodewise tahmincisinin performansında bir düşüş gerçekleşmektedir. Markowitz ortalama varyans işlem maliyetsiz portföylerde Faktör modeli üstün performans göstermekte,



Şekil 5.4: Günlük Portföy Varlığı, $T = 670$, $n - T = 335$

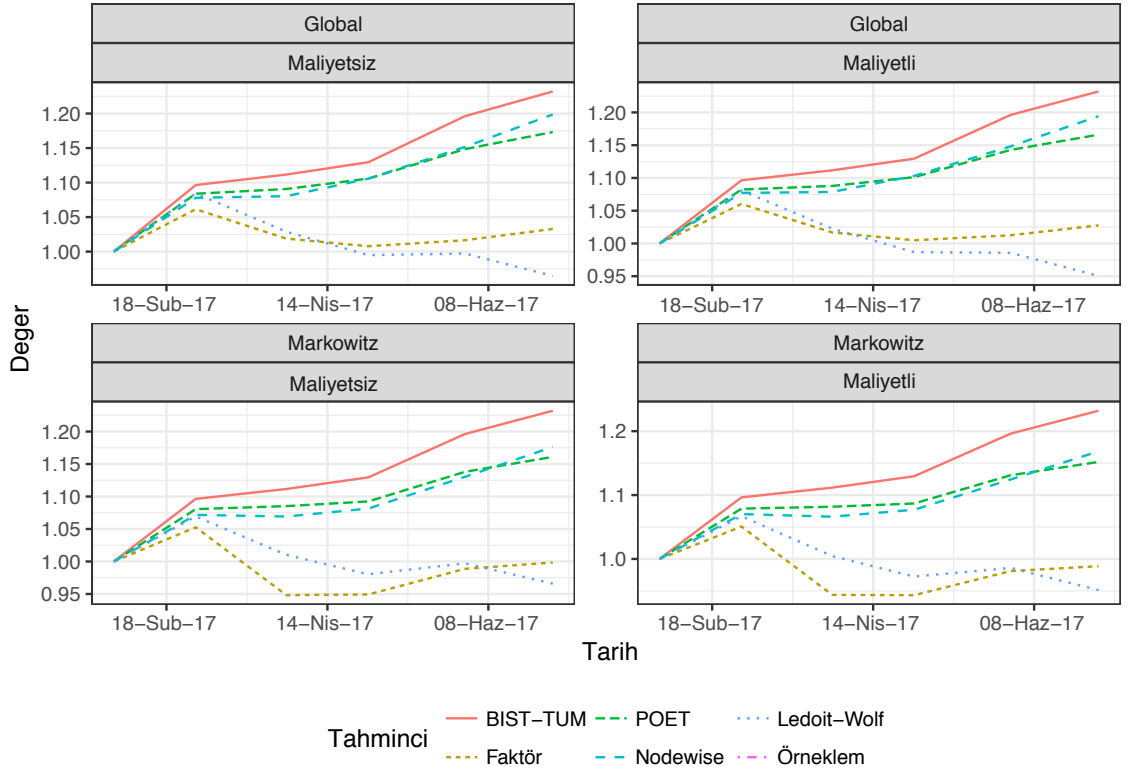
ancak işlem maliyeti göz önüne alındığında portföy varlığında sert bir düşüş dikkati çekmektedir. Bu düşüş esas olarak Faktör modeli işlem devir hızının yüksek olmasından kaynaklanmaktadır.

Tablo 5.9 literatürde sıkça kullanılan $2/3$ öğrenme veri kümesi - $1/3$ test veri kümesi stratejisi esas alınarak oluşturulan portföy performanslarını göstermektedir. $\hat{\Theta}$ kullanılarak oluşturulan portföyler en yüksek getiri ve Sharpe oranlarına sahiptir. ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin en yüksek Sharpe oranına sahip olduğu işlem maliyetsiz global minimum varyans portföyündeki risk ve getiri değerleri sırasıyla %15.34 ve %18.65'dir. Ayrıca, işlem devir hızlarında ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi en düşük seviyeye sahiptir. İşlem maliyetleri hesaplandığında ise ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi hariç diğer tüm tahmincilerde negatif getiri ve Sharpe oranları görülmektedir. Şekil 5.4, işlem maliyeti olmadan oluşturulan portföylerde BIST-TUM endeksinin üzerinde performans göstermek-

	Global				Markowitz			
	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı
$T = 126, n - T = 6$								
Maliyetsiz								
Faktör	-0.002409	0.0011244	-0.07185	0.1949	-0.006611	0.0028967	-0.1228	0.3843
POET	0.023161	0.0007752	0.83186	0.2430	0.019826	0.0008275	0.6892	0.3126
Nodewise	0.026653	0.0006426	1.05143	0.1503	0.022810	0.0007024	0.8606	0.2646
Ledit-Wolf	-0.013258	0.0023670	-0.27251	0.5863	-0.015214	0.0019794	-0.3420	0.6041
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-
Maliyetli								
Faktör	-0.002869	0.0013960	-0.07678	-	-0.009626	0.0036387	-0.1596	-
POET	0.022649	0.0009602	0.73093	-	0.020159	0.0010072	0.6352	-
Nodewise	0.027509	0.0007809	0.98441	-	0.023046	0.0008573	0.7871	-
Ledit-Wolf	-0.017836	0.0028917	-0.33167	-	-0.017833	0.0024935	-0.3571	-
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-
$T = 120, n - T = 12$								
Maliyetsiz								
Faktör	0.002268	0.0009861	0.07224	0.1851	0.0001726	0.001990	0.00387	0.3664
POET	0.015410	0.0013249	0.42337	0.2669	0.0080570	0.001100	0.24288	0.3334
Nodewise	0.017482	0.0012175	0.50101	0.1559	0.0087465	0.001096	0.26419	0.2467
Ledit-Wolf	-0.002165	0.0013780	-0.05832	0.5046	-0.0047616	0.001054	-0.14664	0.5084
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-
Maliyetli								
Faktör	0.001982	0.0010808	0.06028	-	-0.0015097	0.002191	-0.03225	-
POET	0.014387	0.0014580	0.37679	-	0.0073305	0.001195	0.21202	-
Nodewise	0.016553	0.0013398	0.45222	-	0.0071040	0.001207	0.20444	-
Ledit-Wolf	-0.003102	0.0014688	-0.08094	-	-0.0045821	0.001078	-0.13958	-
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-
$T = 108, n - T = 24$								
Maliyetsiz								
Faktör	-0.0004379	0.0009378	-0.014300	0.2208	-0.0016467	0.0025181	-0.03282	0.4163
POET	0.0031947	0.0013975	0.085459	0.5102	-0.0023659	0.0013767	-0.06376	0.5963
Nodewise	0.0043553	0.0013604	0.118082	0.1646	-0.0007574	0.0013439	-0.02066	0.2453
Ledit-Wolf	0.0003867	0.0009347	0.012650	0.4727	-0.0009553	0.0009092	-0.03168	0.4998
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-
Maliyetli								
Faktör	-0.0018296	0.0009684	-0.058793	-	-0.0043926	0.0026002	-0.08614	-
POET	-0.0000517	0.0014599	-0.001353	-	-0.0062284	0.0014499	-0.16357	-
Nodewise	0.0027992	0.0014044	0.074693	-	-0.0029372	0.0013767	-0.07916	-
Ledit-Wolf	-0.0014366	0.0009401	-0.046853	-	-0.0027314	0.0009139	-0.09035	-
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-

Tablo 5.10: Aylık Porföy Performansı, $n - T = 6, 12, 24$

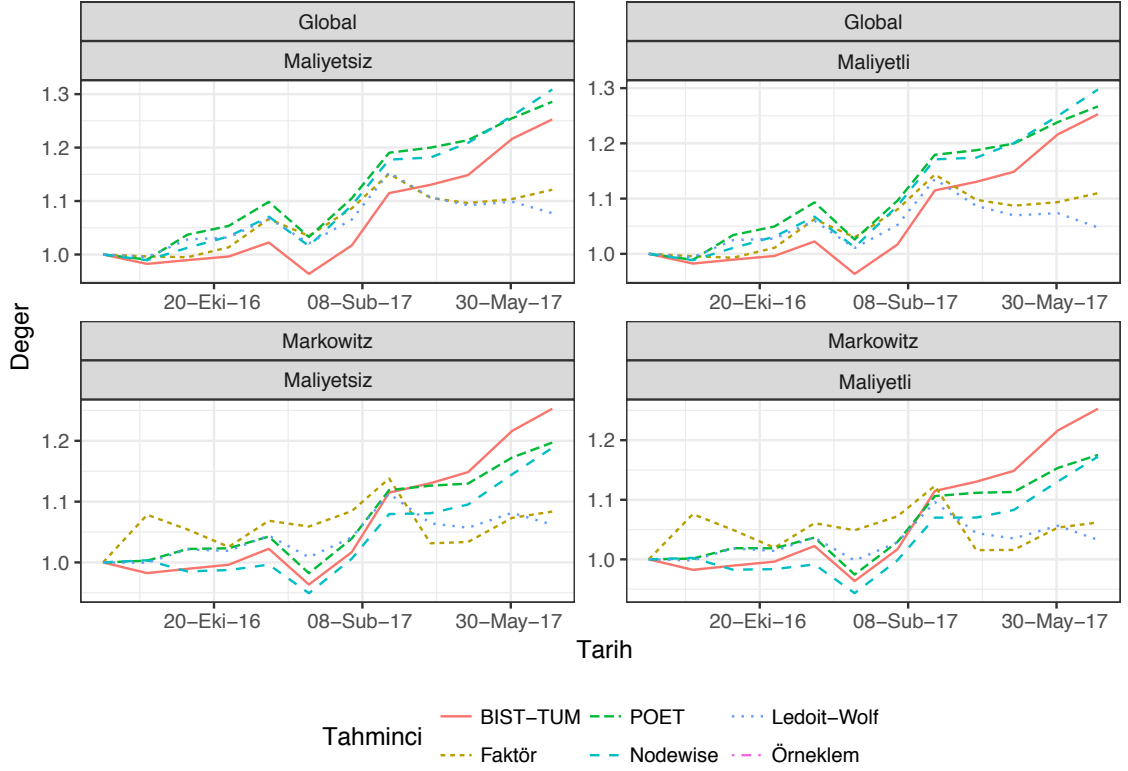
tedir. İşlem maliyeti dahil edildiğinde ise BIST-TUM endeksi ile arasındaki fark büyük boyutlarda görünmemektedir. Markowitz ortalama varyans portföyünde en kötü performans gösteren kovaryans matris tahmincisi Faktör modelidir. İşlem maliyetli Markowitz



Şekil 5.5: Aylık Portföy Varlığı, $T = 126$, $n - T = 6$

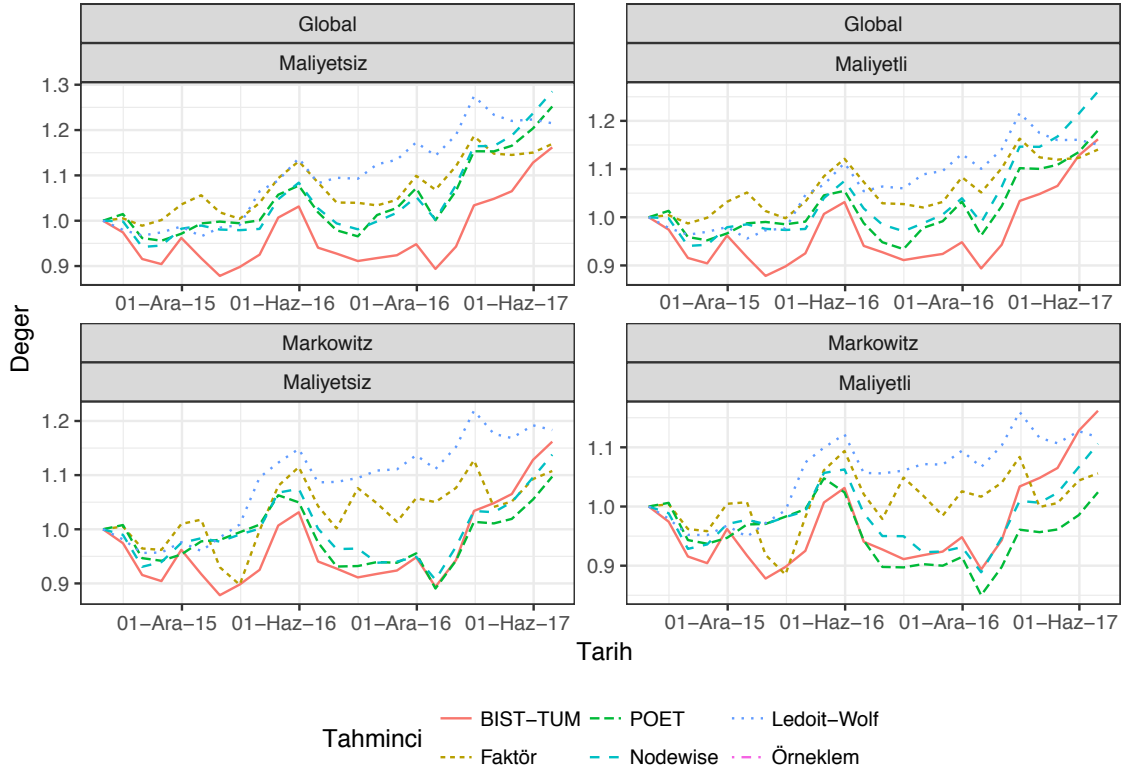
ortalama varyans portföyünde Faktör modeli optimal portföy varlığı $0.25 TL$ seviyesine kadar gerilemiştir.

Aylık gözlemde elde edilen bulgular üç farklı yatırım ufku için Tablo 5.10'de verilmiştir. $n - T = 6$, $n - T = 12$ ve $n - T = 24$ sırasıyla altı aylık, bir yıllık ve iki yıllık yatırım ufukları kullanılarak ve bunlara karşılık gelen optimal portföy performansları karşılaştırılmıştır. Portföye dahil edilen $p = 214$ hisse senedi bulunmaktadır. Gözlem sayısı ise her bir kayan pencere için $n = 126$, $n = 120$ ve $n = 108$ 'dir. Bu nedenle, $\hat{\Sigma}_{SAM}$ matrisine dayalı portföyler $n \ll p$ olduğundan dolayı hesaplanamamıştır. Tablo 5.10'deki tüm yatırım ufukları için ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi Sharpe oranı, portföy getirileri ve işlem devir hızları bakımından diğer tahmincilerden daha üstün performans göstermektedir. Diğer bir ifadeyle, ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi yatırımcıya yüksek işlem maliyetlerine maruz kalmadan düşük riske karşılık daha fazla getiri olanağı sunmaktadır. $n - T = 6$



Şekil 5.6: Aylık Portföy Varlığı, $T = 120$, $n - T = 12$

için ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi en düşük portföy riskine sahiptir. $n - T = 12$ ve $n - T = 24$ yatırım ufuklarında Faktör modeli ve Ledoit-Wolf tahmincisi portföy varyansı açısından daha iyi performans göstermesine rağmen, portföy getirileri ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle elde edilen portföy getirilerinin çok altında kalmaktadır. Örneğin, $n - T = 24$ yatırım ufukunda işlem maliyetinin söz konusu olmadığı global minimum varyans portföyünde Faktör modeli %15 portföy riskine sahip olmasına rağmen, %1.05 portföy kaybı mevcuttur. Ledoit-Wolf tahmincisinin portföy riski %14.97, portföy getirisi ise %0.92'dir. Aynı portföy için Nodewise tahmincisi %10.45 portföy getirisine karşılık portföy riski %18.06'dır. ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin Faktör modeli ve Ledoit-Wolf tahmincisine göre daha başarılı sonuçlar verdiğini, dolayısıyla daha yüksek getiriye sahip portföylere sahip olduğu söylenebilir.



Şekil 5.7: Aylık Portföy Varlığı, $T = 108$, $n - T = 24$

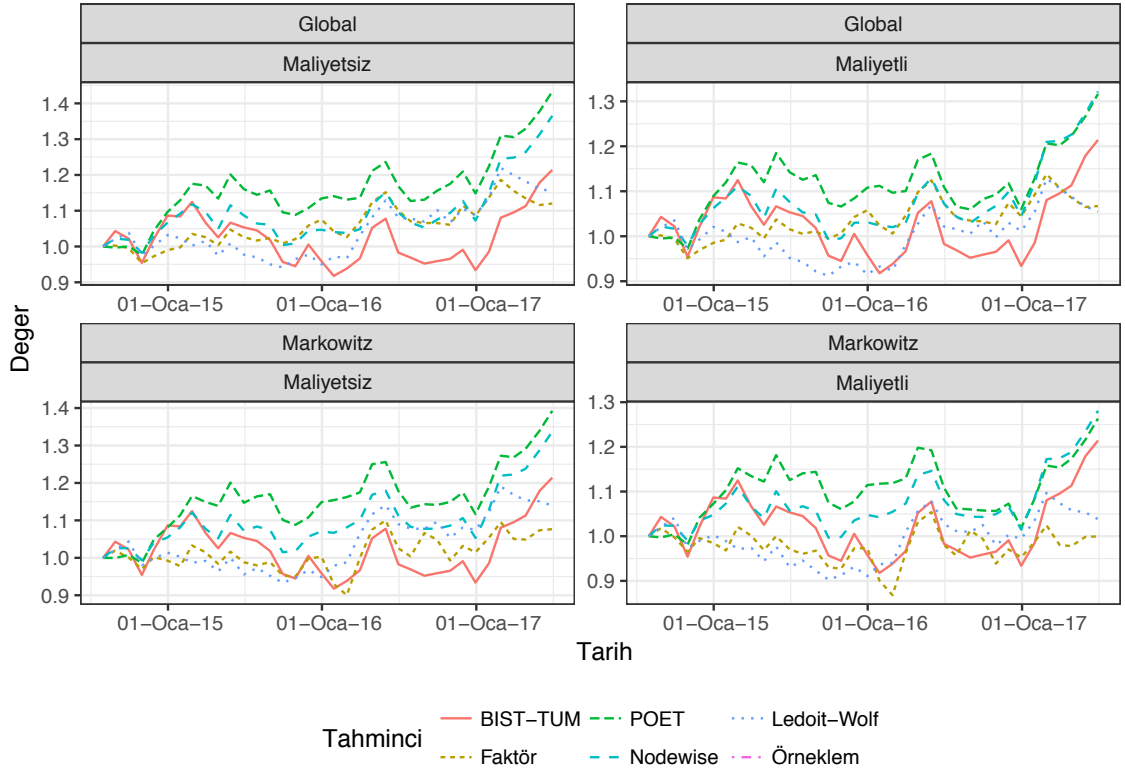
Şekil 5.5’de BIST-TUM endeksi tüm tahmincilerin üzerinde seyretmekte iken, Şekil 5.6 ve Şekil 5.7’de durum tersine dönmektedir. BIST-TUM endeksi özellikle global minimum varyans portföylerinde tahmincilerin altında performans göstermektedir. $n - T = 6$, $n - T = 12$ ve $n - T = 24$ yatırım ufuklarında POET ve ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincileri birbirine çok yakın performans sergilemektedir. Faktör modeli ve Ledoit-Wolf portföyleri $n - T = 6$ ’da varlık kaybına uğrarken, $n - T = 24$ ’de ise endeksin üstünde performans sergilediği görünmektedir.

Tablo 5.11, $n - T = 36, 48, 60$, yani üç yıllık, dört yıllık ve beş yıllık tahmin pencereleri için portföy performanslarını göstermektedir. $n - T = 36$ için POET tahmincisi en yüksek portföy getirisi ve Sharpe oranlarına sahip olmasına rağmen, yüksek işlem devir hızı portföy performansını azaltarak portföy getirisinde ve Sharpe oranında bir düşüşe neden olmaktadır. Nitekim, işlem maliyetsiz global minimum varyans portföyünde ℓ_1 ce-

	Global				Markowitz			
	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı
$T = 96, n - T = 36$								
Maliyetsiz								
Faktör	-0.0035945	0.0007621	-0.13021	0.2777	-3.948e-03	0.0016581	-0.0969480	0.4228
POET	0.0037335	0.0012076	0.10744	0.4839	2.877e-03	0.0011692	0.0841442	0.5548
Nodewise	0.0024196	0.0012348	0.06886	0.1842	1.788e-03	0.0011745	0.0521682	0.2445
Ledit-Wolf	-0.0026898	0.0009959	-0.08524	0.5102	-3.179e-03	0.0009225	-0.1046727	0.5296
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-
Maliyetli								
Faktör	-0.0054770	0.0007712	-0.19723	-	-6.900e-03	0.0016706	-0.1688099	-
POET	0.0008107	0.0012657	0.02279	-	-3.784e-04	0.0012381	-0.0107547	-
Nodewise	0.0009089	0.0012553	0.02565	-	-2.047e-05	0.0011946	-0.0005923	-
Ledit-Wolf	-0.0056566	0.0010201	-0.17710	-	-6.141e-03	0.0009619	-0.1980146	-
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-
$T = 84, n - T = 48$								
Maliyetsiz								
Faktör	-2.670e-03	0.001027	-0.083305	0.2956	-0.0043097	0.001545	-0.109657	0.4029
POET	1.435e-03	0.002077	0.031479	0.3065	-0.0003742	0.002072	-0.008221	0.3684
Nodewise	1.311e-03	0.002032	0.029094	0.1865	-0.0006588	0.002016	-0.014672	0.2408
Ledit-Wolf	-4.057e-03	0.001125	-0.120954	0.5234	-0.0057688	0.001134	-0.171284	0.5468
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-
Maliyetli								
Faktör	-4.671e-03	0.001025	-0.145862	-	-0.0071503	0.001535	-0.182488	-
POET	-5.920e-04	0.002111	-0.012883	-	-0.0027068	0.002102	-0.059039	-
Nodewise	-9.154e-05	0.002062	-0.002016	-	-0.0023437	0.002044	-0.051839	-
Ledit-Wolf	-7.578e-03	0.001101	-0.228337	-	-0.0093825	0.001130	-0.279166	-
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-
$T = 72, n - T = 60$								
Maliyetsiz								
Faktör	-2.202e-03	0.0008594	-0.075104	0.2938	-0.0004017	0.001416	-0.01068	0.4313
POET	7.825e-05	0.0018517	0.001819	0.1996	-0.0014258	0.001896	-0.03275	0.2577
Nodewise	1.067e-03	0.0018322	0.024935	0.1902	-0.0006737	0.001802	-0.01587	0.2410
Ledit-Wolf	-2.804e-03	0.0013000	-0.077780	0.5032	-0.0041042	0.001319	-0.11302	0.5125
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-
Maliyetli								
Faktör	-4.131e-03	0.0008596	-0.140885	-	-0.0030665	0.001426	-0.08121	-
POET	-1.297e-03	0.0018756	-0.029951	-	-0.0031458	0.001921	-0.07178	-
Nodewise	-2.606e-04	0.0018505	-0.006058	-	-0.0022884	0.001821	-0.05363	-
Ledit-Wolf	-6.101e-03	0.0012912	-0.169780	-	-0.0074663	0.001323	-0.20529	-
Örnekleme	-	-	-	-	-	-	-	-

Tablo 5.11: Aylık Porföy Performansı, $n - T = 36, 48, 60$

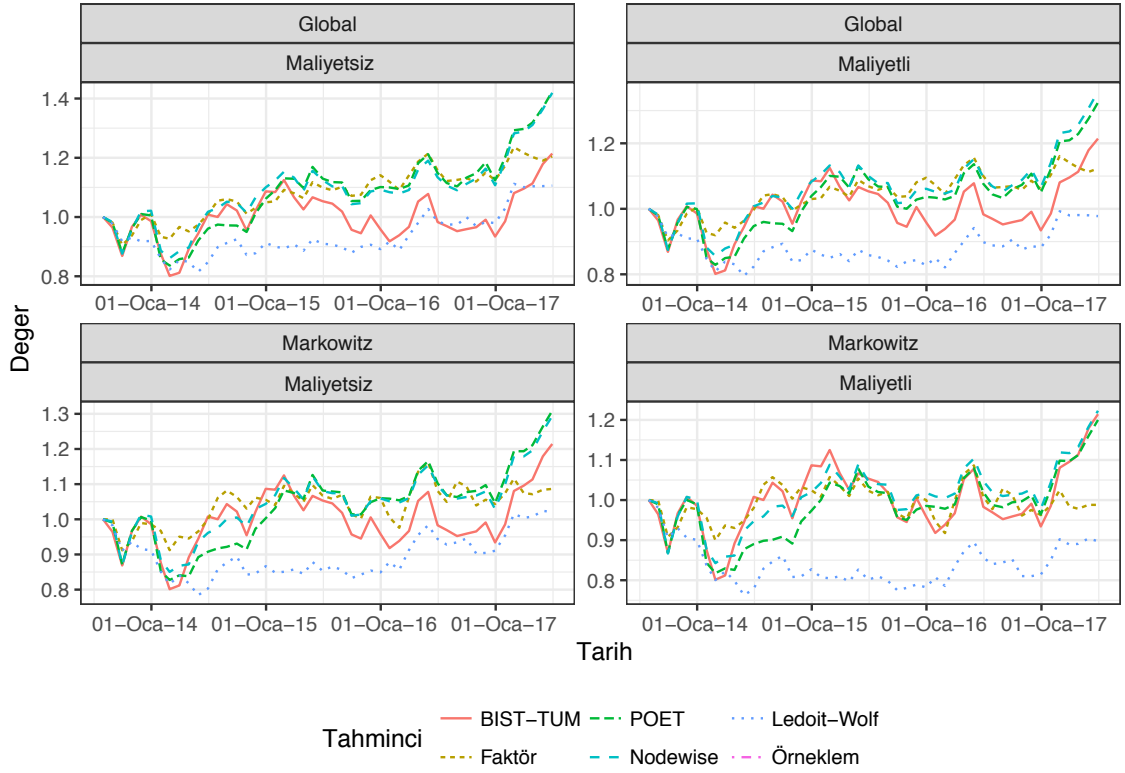
zalı Nodewise tahmincisinin düşük işlem devir hızı işlem maliyetinin söz konusu olduğu portföyde POET tahmincisinin daha yüksek performans sergilemesini sağlamıştır. Tablo 5.11’de, $n - T = 48$ üzerinde ℓ_1 cezalı Nodewise ve POET tahmincilerinin performans-



Şekil 5.8: Aylık Portföy Varlığı, $T = 96$, $n - T = 36$

ları birbirine çok yakındır. Buna karşın, $n - T = 60$ yatırım ufkunda global minimum varyans portföyünün ℓ_1 cezalı Nodewise ve POET tahmincilerinin aktif risk dereceleri incelendiğinde $\hat{\Theta}$ ile oluşturulan portföylerin daha başarılı olduğu görülmektedir. ℓ_1 cezalı Nodewise ve POET tahmincilerinin %33 portföy riskine karşılık sırasıyla portföy getirileri %6.40 ve %0.46'dır. Diğer bir ifadeyle, ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi aynı risk düzeyinde daha yüksek portföy getirisine sahiptir. Bunun yanı sıra, Tablo 5.11'de Faktör modeli ve Ledoit-Wolf tahmincisi tüm portföyler üzerinde negatif getirilere ve Sharpe oranlarına sahiptir.

Şekil 5.8'da $n - T = 36$ yatırım ufku için BIST-TUM endeksi diğer tahmincilerden daha düşük varlık değerine sahiptir. POET, ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinden çok az bir farkla üstündür. Ayrıca, ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin işlem maliyetli portföylerdeki kazancı nispeten daha yüksektir. Şekil 5.9'da ise BIST-TUM endeks performansı tahmin-

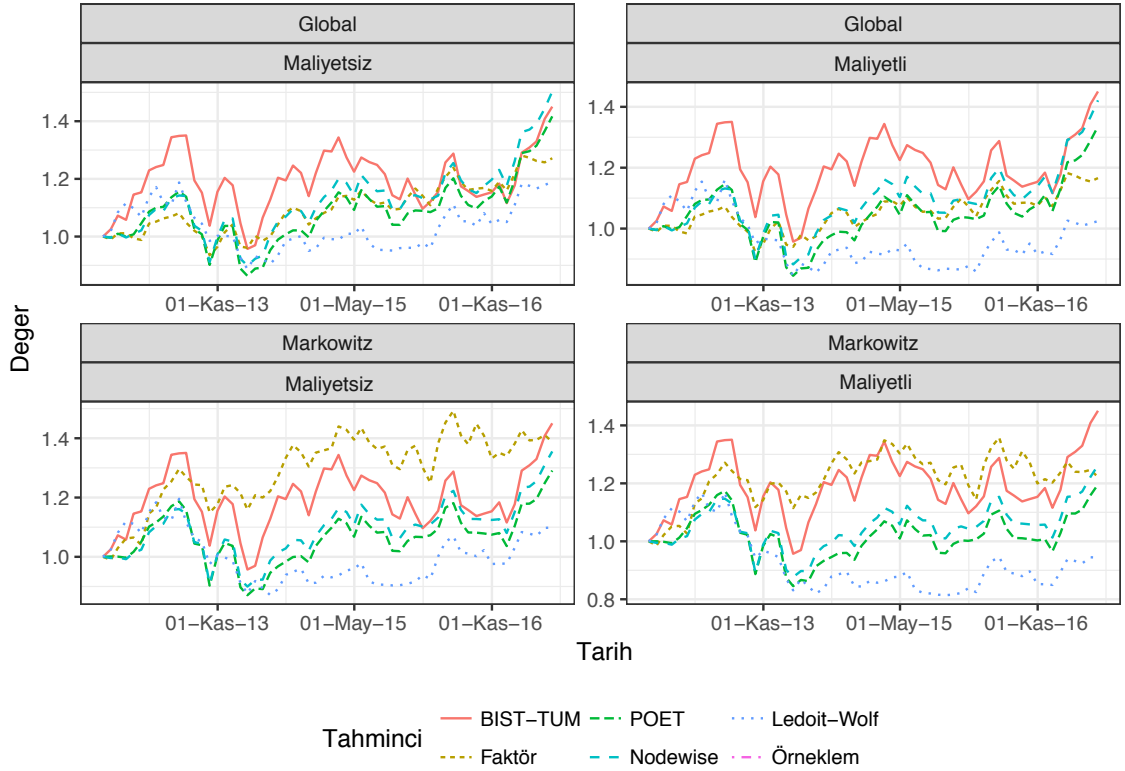


Şekil 5.9: Aylık Portföy Varlığı, $T = 84$, $n - T = 48$

	Global				Markowitz			
	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı
$T = 88$, $n - T = 44$								
Maliyetsiz								
Faktör	-2.378e-03	0.0008413	-0.082000	0.2879	-3.843e-03	0.001386	-0.103221	0.4048
POET	3.497e-04	0.0017870	0.008273	0.3408	-1.224e-03	0.001660	-0.030043	0.4017
Nodewise	1.509e-03	0.0016726	0.036888	0.1828	-4.764e-05	0.001516	-0.001223	0.2372
Ledoit-Wolf	-1.948e-03	0.0011652	-0.057074	0.5277	-3.740e-03	0.001102	-0.112646	0.5301
Örneklem	-	-	-	-	-	-	-	-
Maliyetli								
Faktör	-4.231e-03	0.0008471	-0.145374	-	-6.593e-03	0.001379	-0.177544	-
POET	-1.863e-03	0.0018367	-0.043460	-	-3.698e-03	0.001710	-0.089434	-
Nodewise	4.571e-05	0.0016969	0.001110	-	-1.739e-03	0.001544	-0.044262	-
Ledoit-Wolf	-5.141e-03	0.0011761	-0.149914	-	-6.827e-03	0.001128	-0.203249	-
Örneklem	-	-	-	-	-	-	-	-

Tablo 5.12: Aylık Porföy Performansı, $T = 88$, $n - T = 44$

çilerin altındadır. POET ve ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincilerinin performansları arasındaki fark yok denecek kadar azdır. Ledoit-Wolf tahmincisi ise en kötü performans gösteren

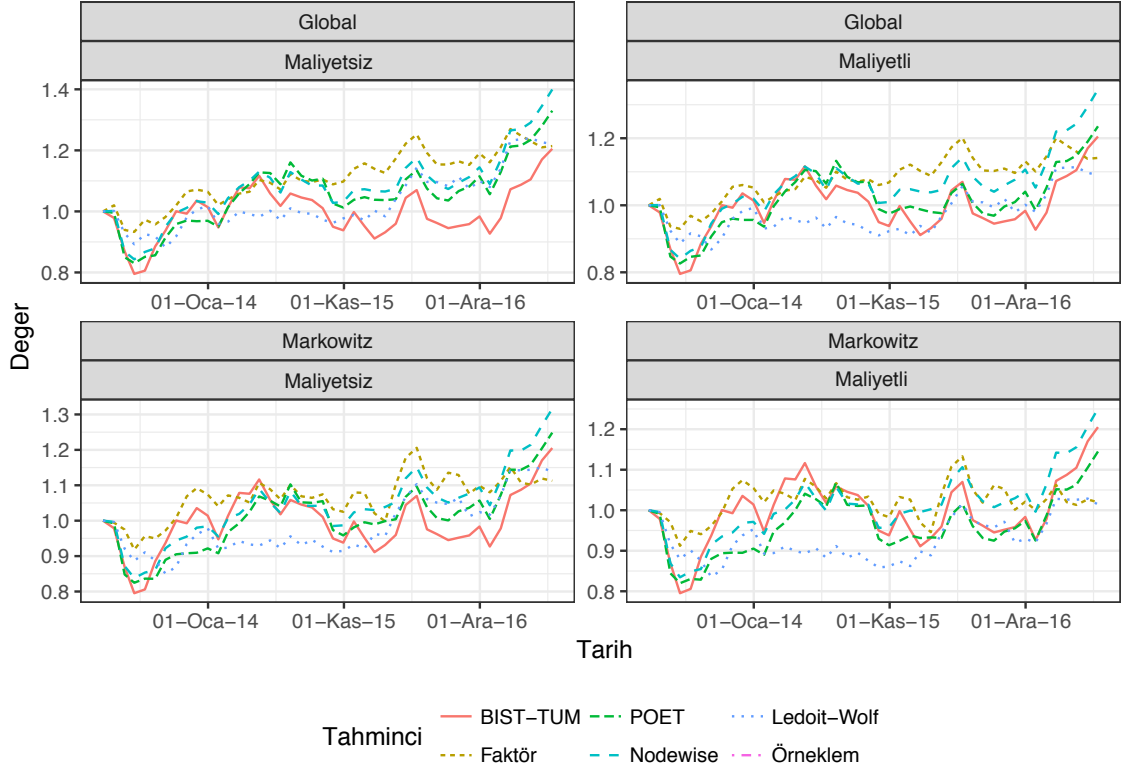


Şekil 5.10: Aylık Portföy Varlığı, $T = 72$, $n - T = 60$

tahmincidir. Şekil 5.10’da ise Faktör modeli işlem maliyetli portföylerde üstün performans göstermektedir. Global minimum portföy performansında ise ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin dönem sonu varlığı daha büyüktür.

Tablo 5.12’de 2/3 öğrenme veri kümesi - 1/3 test veri kümesi stratejisi sonuçlarında en yüksek Sharpe oranı ve en düşük işlem devir hızı ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisine aittir. İşlem maliyetli global minimum varyans portföyünde pozitif Sharpe oranı yalnızca ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisine ait olmakla birlikte portföy riski %4.48, portföy getirisi ise %7.46 olarak hesaplanmıştır. Markowitz portföyünde ise oranların negatif seviyelere gerilediği görülmektedir. Şekil 5.11’de en kötü performansı Ledoit-Wolf tahmincisi sergilemektedir. En yüksek dönem sonu varlığı ise ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisine aittir.

Tablo 5.13 ve Tablo 5.14’de Lasso cezalı Nodewise regresyonunun örneklem dışı portföy performans kriterleri bakımından günlük ve aylık veri üzerinden tahminciler içindeki



Şekil 5.11: Aylık Portföy Varlığı, $T = 88$, $n - T = 44$

sıralaması özetlenmiştir. Bulguları kısaca özetlemek gerekirse; günlük öngörü dönemlerinde tahmincilerin performansları değerlendirildiğinde, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonunun örneklem dışı portföy getirileri ve Sharpe oranları bakımından diğer tahmincilerin üzerinde bir performans sergilediği görülmektedir. Söz konusu portföylere işlem maliyetleri dahil edildiğinde ise ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonuyla elde edilen portföyler dışındaki diğer tahmincilerle elde edilen portföy getirileri ve Sharpe oranları negatif seviyelerdedir. Öngörü dönemi arttıkça (bakınız, $n - T = 252$ ve $n - T = 335$) ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin portföy varyansında meydana gelen artış işlem maliyetli portföylerde pozitif en yüksek getiriye sahip olan tek portföy olmasından kaynaklanmaktadır. Diğer bir önemli husus da ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi Markowitz ortalama varyans portföylerinde tahminciler arasında en düşük işlem devir hızına sahip olmasıdır. Global minimum varyans portföylerinde ise gözlemlenen Faktör modelinden sonra ise ikinci en

iyi olarak karşımıza çıkmaktadır. Ancak, gözlemlenen Faktör modeliyle oluşturulan optimal portföylerin getiri oranları ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle oluşturulan portföylerinden daha düşük olduğundan dolayı işlem maliyetleri göz önüne alındığında portföy kayıpları meydana gelmektedir. Ayrıca, öngörü dönemi boyunca elde edilen portföy varlığı açısından ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin performansı diğer tahmincilerin oldukça üstündedir. Aylık yatırım dönemleri için ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle hesaplanan optimal portföylerin performansı portföy getirileri ve Sharpe oranlarının genel olarak diğer tahmincilerin daha üstünde olduğu söylenebilir. İşlem devir hızında ise en iyi performansı yine ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi göstermektedir. Aylık yatırım öngörü dönemleri arttıkça $\hat{\Theta}$ ile oluşturulan portföylerin varyansında meydana gelen artış portföy getirilerinin artmasından kaynaklanmaktadır. Belirli bir risk düzeyinde ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle oluşturulan portföy getirileri diğer tahmincilerin üzerinde seyretmektedir.

	Global				Markowitz			
	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı
$T = 942, n - T = 63$								
Maliyetsiz								
Nodewise	1	1	1	2	1	1	1	1
Maliyetli								
Nodewise	1	1	1	-	1	1	1	-
$T = 879, n - T = 126$								
Maliyetsiz								
Nodewise	1	2	1	2	1	1	1	1
Maliyetli								
Nodewise	1	2	1	-	1	1	1	-
$T = 753, n - T = 252$								
Maliyetsiz								
Nodewise	1	5	1	2	2	4	2	1
Maliyetli								
Nodewise	1	5	1	-	1	4	1	-
$T = 670, n - T = 335$								
Maliyetsiz								
Nodewise	1	5	1	2	1	4	1	1
Maliyetli								
Nodewise	1	5	1	-	1	4	1	-

Not: Sıralamada 1 numara getiri ve Sharpe oranında en yüksek, varyans ve işlem devir hızında ise en düşük seviyeyi ifade etmektedir.

Tablo 5.13: Günlük Porföy Performans Sıralaması

	Global				Markowitz			
	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı	Getiri	Varyans	Sharpe	Devir Hızı
$T = 126, n - T = 6$								
Maliyetsiz								
Nodewise	1	1	1	1	1	1	1	1
Maliyetli								
Nodewise	1	1	1	-	1	1	1	-
$T = 120, n - T = 12$								
Maliyetsiz								
Nodewise	1	2	1	1	1	2	1	1
Maliyetli								
Nodewise	1	2	1	-	1	3	2	-
$T = 108, n - T = 24$								
Maliyetsiz								
Nodewise	1	3	1	1	1	2	1	1
Maliyetli								
Nodewise	1	3	1	-	2	2	1	-
$T = 96, n - T = 36$								
Maliyetsiz								
Nodewise	2	4	2	1	2	3	2	1
Maliyetli								
Nodewise	1	3	1	-	1	2	1	-
$T = 88, n - T = 44$								
Maliyetsiz								
Nodewise	1	3	1	1	1	3	1	1
Maliyetli								
Nodewise	1	3	1	-	1	3	1	-
$T = 84, n - T = 48$								
Maliyetsiz								
Nodewise	2	3	2	1	2	3	2	1
Maliyetli								
Nodewise	1	3	1	-	1	3	1	-
$T = 72, n - T = 60$								
Maliyetsiz								
Nodewise	1	3	1	1	2	3	2	1
Maliyetli								
Nodewise	1	3	1	-	1	3	1	-

Not: Sıralamada 1 numara getiri ve Sharpe oranında en yüksek, varyans ve işlem devir hızında ise en düşük seviyeyi ifade etmektedir.

Tablo 5.14: Aylık Porföy Performans Sıralaması

Bölüm 6

Sonuç ve Değerlendirme

6.1 Sonuç

Markowitz ortalama varyans portföy seçim modeline göre optimal portföy, belirli bir risk seviyesi için en yüksek getiriyi sağlayan ya da belirli bir getiri düzeyi için en düşük riske maruz olan portföydür. Modern portföy teorisinin ortaya çıkmasıyla birlikte, beklenen getiri düzeyi için portföyü oluşturan hisse senetlerinin korelasyonundan faydalanılmak suretiyle portföy içindeki hisse senetlerinin ağırlıklarının değiştirilerek portföy riskinin azaltılabileceği ortaya konulmuştur. Bu durum, hisse senetlerinin birbirleriyle ilişkisini gösteren kovaryans matrisi ve her bir hisse senedinin portföy içindeki ağırlığını belirlemede kesinlik matrisi tahmininin önemini göstermektedir. Literatürde gözlem sayısının n hisse senetlerinin sayısını p geçtiği $p < n$ durumda kesinlik matrisi tahminine yönelik birçok yaklaşım önerilmiş ve kullanılmıştır. Ancak, son yıllarda ekonomik ve finansal uygulamalarda geniş veri setlerinin varlığı, literatürde boyutsallık problemini ortaya çıkarmış ve buna yönelik istatistik alanında cezalandırma ve seyreklik tabanlı pek çok çözüm getirilmiştir. Hisse senedi sayısının gözlem sayısını aştığı $n \ll p$ durumda geleneksel yöntemler kesinlik matrisi tahmininde yetersiz kalmıştır. Bu durum tahmin hatalarının

esas kaynağı olan hisse senetlerinin tersi alınabilir kovaryans matrisi ve kesinlik matrisi tahmininin önemini daha da arttırmıştır.

Bu tezin amacı, portföy optimizasyonunda sıkça karşılaşılan bir durum olan $n \ll p$ altında, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon aracılığıyla tersi alınamayan tekil kovaryans matrisinin yaklaşık ters matrisinin hesaplanması ve bu matrise dayalı optimal portföy ağırlıklarının oluşturularak farklı yatırım ufkuna sahip yatırımcılar için minimum riskli portföy stratejilerinin belirlenmesi ve önerilmesidir. Literatürde bildiğimiz kadarıyla BIST üzerine Markowitz ortalama varyans portföy optimizasyonunda ampirik Gram matrisinin hesaplanmasına ilişkin seyreklik varsayımı ve düzenleme yaklaşımına dayalı yöntemleri içeren bir çalışma bulunmamaktadır. Bu doğrultuda bu tez, BIST endeksinde işlem gören hisse senetlerinin yüksek boyutlu tersi alınamayan kovaryans matrisinin yaklaşık ters matrisini elde etmek için ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisini önererek portföy optimizasyon literatürüne kuramsal ve ampirik olarak özgün bir çalışma ile katkı yapmıştır.

Ayrıca, portföy optimizasyonu problemine yönelik önerilen ve literatürde sıkça kullanılan mevcut yöntemlerle alternatif optimal çözümler sunulmuş ve ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon aracılığıyla oluşturulmuş portföy performanslarıyla teorik ve ampirik olarak karşılaştırmalı analizi yapılmıştır. Bu yöntemler, örneklem kovaryans matris tahmincisi, Ledoit ve Wolf (2004)'un küçülme tahmincisi, Fan vd. (2008)'in gözlemlenen Faktör modeline dayalı kovaryans matris tahmincisi ve Fan vd. (2015)'in POET tahmincisi olarak belirlenmiştir. Bildiğimiz kadarıyla gözlemlenen Faktör modeline dayalı kovaryans matris tahmincisi ve POET tahmincisine ilişkin BIST üzerine yapılmış bir çalışma bulunmamaktadır. $n \ll p$ durumunda Markowitz portföy seçim modelinde BIST üzerine söz konusu kovaryans matris tahmincilerinin karşılaştırmalı analizine de rastlanmamıştır. Bu sebeple, tezin $n \ll p$ iken portföy seçim sürecinde farklı tahmin edicilerle oluşturulan portföy setlerinin gerçekleşen risk değerlerinin belirlenmesi açısından literatüre önemli bir katkı sağladığı düşünülmektedir.

ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonunun diğer kovaryans matris tahmincilerinden farkı doğrudan hisse senetleri kovaryans matrisinin yaklaşık ters matrisini oluşturmasıdır. Yani, diğer yöntemlerden farklı olarak ilk önce kovaryans matrisinin küçültülmesi gerekmez. İlk olarak kovaryans matrisinin küçülmesine dayanan yöntemler, araştırmacının hangi hisse senedi getirilerinin diğerleri ile ilişkisiz olduğuna ilişkin bir ön bilgiye sahip olduğu varsayımına dayanmaktadır. Seyreklik varsayımına dayalı hesaplanan yaklaşık ters matriste ilişkisiz hisse senetlerini verinin belirlemesi beklenmektedir. Böylece, yaklaşık ters matris hisse senetleri arasındaki ilişkiye dayalı bir şekilde optimal portföylerin oluşturulması dolayısıyla da portföy riskinin minimize edilmesini mümkün kılmaktadır.

Tezde, öncelikle global minimum varyans portföyü ve Markowitz ortalama varyans portföyünün türetilişi ele alınmış ve literatürde kullanılan mevcut yöntemler hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra, küçülme normları incelenmiş, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon yoluyla hesaplanan yaklaşık ters matrisin $\hat{\Theta}$ elde edilişi gösterilmiş ve $\hat{\Theta}$ hesaplanmasında yardımcı algoritmaya yer verilmiştir. ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonunun asimptotik özellikleri ve seyreklik varsayımları incelenmiştir. Ayrıca, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonuyla tahminlenen global minimum portföy varyansı ve Markowitz optimal portföy varyansı ile gerçek varyansları arasındaki tahmin hata oranları verilmiştir. Global minimum varyans ve Markowitz ortalama varyans portföylerinin tahminlenen optimal portföy ağırlıkları ile gerçek ağırlıkları arasındaki farkın ℓ_1 normunun tahmin hata oranları incelenmiştir. ℓ_1 normundan yararlanılarak elde edilen optimal hisse senedi ağırlıklarının brüt risk toplamları artan p değerleri için test edilmiştir. Ayrıca, tahminlenen kovaryans matrislerinin çeşitli normlara dayalı hata ölçümleri yapılmıştır. Tahminlenen kovaryans matrislerinin ve $\hat{\Theta}$ 'nın oluşturulan portföyler üzerindeki performanslarını ölçmede bahsi geçen kriterler üzerinden simülasyon çalışmaları yapılmıştır. Simülasyonlarda gözlemlenen faktör modeline ve S&P 500 endeksinde yer alan hisse senedi momentlerine dayalı olmak üzere iki farklı veri türetme süreci izlenmiştir. Her iterasyonda p 'nin artan değerleri için n sayısı sabitlenmiş ve p sayısı n sayısından giderek uzaklaşırken yakınsama oranları hesaplanmıştır.

Elde edilen bulgulara göre, ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle oluşturulan optimal portföy varyansı tahmin hatası türetilen her iki veri üzerinde de p 'nin artan değerleri için sıfıra doğru daha hızlı yakınsama oranlarına sahiptir. ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonuyla tahminlenen portföy riski her bir p değeri için diğer tahmincilerin altındadır ve p arttıkça portföy riskinin hızla azaldığı saptanmıştır. ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle oluşturulan hisse senedi ağırlıkları tahmin hatası ise p arttıkça giderek azalmakta ve diğer tahmincilere göre daha durağan seyretmektedir. Örneklem kovaryans matrisinin hesaplanan optimal portföy ağırlıklarının tahmin hatası ise $p < n$ değerleri için giderek artmakta ve bütün tahmincilerin üzerinde seyretmektedir. Ayrıca, $n \ll p$ değerleri için örneklem kovaryans matrisinin tekillik problemi sebebiyle simülasyon sonuçları elde edilememiştir. Son olarak, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonuyla oluşturulan portföy ağırlık vektörünün ℓ_1 normunun brüt risk toplamları minimum seviyededir. Özetlemek gerekirse, $\hat{\Theta}$ 'nın seyrek yapısı tahmin hatalarını önemli oranda azaltarak daha doğru ve istikrarlı hisse senedi ağırlıkları elde etmede ve dolayısıyla portföy riskinin minimize edilmesinde büyük bir avantaj sağladığı bulgusuna ulaşılmıştır.

Tezin ampirik uygulamasında öncelikle BIST endeksinde işlem gören tüm hisse senetleri kullanılarak Fama-French üç faktör modeli metodolojisine dayalı gözlemlenen faktörler oluşturulmuş ve Faktör modeline dayalı kovaryans matrisi hesaplanmıştır. Ayrıca, literatürdeki diğer kovaryans matris tahmincileriyle BIST endeksinde yer alan hisse senetlerinin kovaryans matrisleri hesaplanmış ve karşılaştırmalı analizleri gerçekleştirilmiştir. Portföy performanslarının ölçülmesinde örneklem içi varyans ve kayan-pencere yaklaşımıyla örneklem dışı varyans, Sharpe oranı ve işlem devir hızı gibi performans kriterlerinden yararlanılmıştır. Portföy stratejilerinin örneklem dışı portföy performanslarının incelenmesinde günlük ve aylık veri üzerinden farklı öngörü dönemleri belirlenmiştir.

ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin günlük ve aylık öngörü dönemlerinde örneklem dışı portföy getirileri ve Sharpe oranları bakımından diğer tahmincilerden daha iyi bir performans sergilemektedir. İşlem devir hızında ise en iyi performansı yine ℓ_1 cezalı No-

dewise tahmincisi göstermektedir. Günlük öngörü dönemlerinde işlem maliyetleri göz önüne alındığında ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi hariç diğer tahmincilere dayanan portföy getirilerinin ve Sharpe oranlarının negatif seviyelere gerilediği gözlemlenmiştir. Bu portföyler için ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi pozitif en yüksek getiriye sahiptir.

Günlük ve aylık kısa dönem yatırımlarında global minimum varyans ve Markowitz ortalama varyans portföylerinde ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon daha düşük portföy riskine karşılık daha yüksek Sharpe oranlarına sahiptir. Başka bir deyişle, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonunun sağladığı benzer getiri oranını elde etmede diğer kovaryans matris tahmincileriyle oluşturulan portföylerde daha yüksek risk oranlarına katlanmak gerekmektedir. Buna karşın, günlük ve aylık öngörü dönemleri uzadıkça ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle hesaplanan portföylerin örneklem dışı varyanslarında genel olarak bir artış görünmektedir. Bu artışın esas kaynağı, ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisiyle oluşturulan portföylerin yüksek getiriye sahip olmasıdır. Son olarak, ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisinin günlük öngörü dönemi sonu portföy varlığı diğer tahmincilerden daha yüksektir. Aylık öngörü dönemlerinde ise çoğunlukla endeksin üzerinde bir portföy varlığı sunmaktadır.

Tezin sonucunda, ℓ_1 cezalı Nodewise regresyonu aracılığıyla hesaplanan $\hat{\Theta}$ 'nın portföy optimizasyonu için risk ve getiri açısından yatırımcıya optimal çözümler sunma potansiyelinin yüksek olduğu görülmüştür. Çok işlem yapan risk almayı seven yatırımcılar için yüksek portföy getirileri sunmakta kullanılacak bir araç olarak değerlendirilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır.

ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon yoluyla oluşturulan $\hat{\Theta}$ matrisi ile portföy optimizasyonu birçok açıdan geliştirmeye açık bir metot olarak düşünülebilir. İlk olarak, $\hat{\Theta}$ matrisine hisse senetleri arasındaki ilişkiyi daha iyi açıklayabilmek amacıyla bir eşik değer uygulanabilir. İkinci olarak, seyrek portföyler elde etmek amacıyla Markowitz ortalama varyans portföy amaç fonksiyonuna ℓ_1 norm cezası eklenerek yeniden formüle edilebilir ya da portföy ağırlık vektörüne açığa satış kısıtı uygulanabilir, $w < 0$. Böylece, sıfır değerine yakın hisse senetleri ağırlıkları sıfıra doğru küçültülebilir. Hisse senedi ağırlıklarının

değiştirilmesine odaklanan söz konusu iki yaklaşım karşılaştırılarak daha düşük portföy riskine sahip portföyler oluşturulabilir. Son olarak, makine öğrenimi (*machine learning*) metodlarının entegre edilmesiyle daha doğru tahminler üretebilen bir algoritmanın elde edilmesi ileriki çalışma olarak düşünülebilir.

Ek A

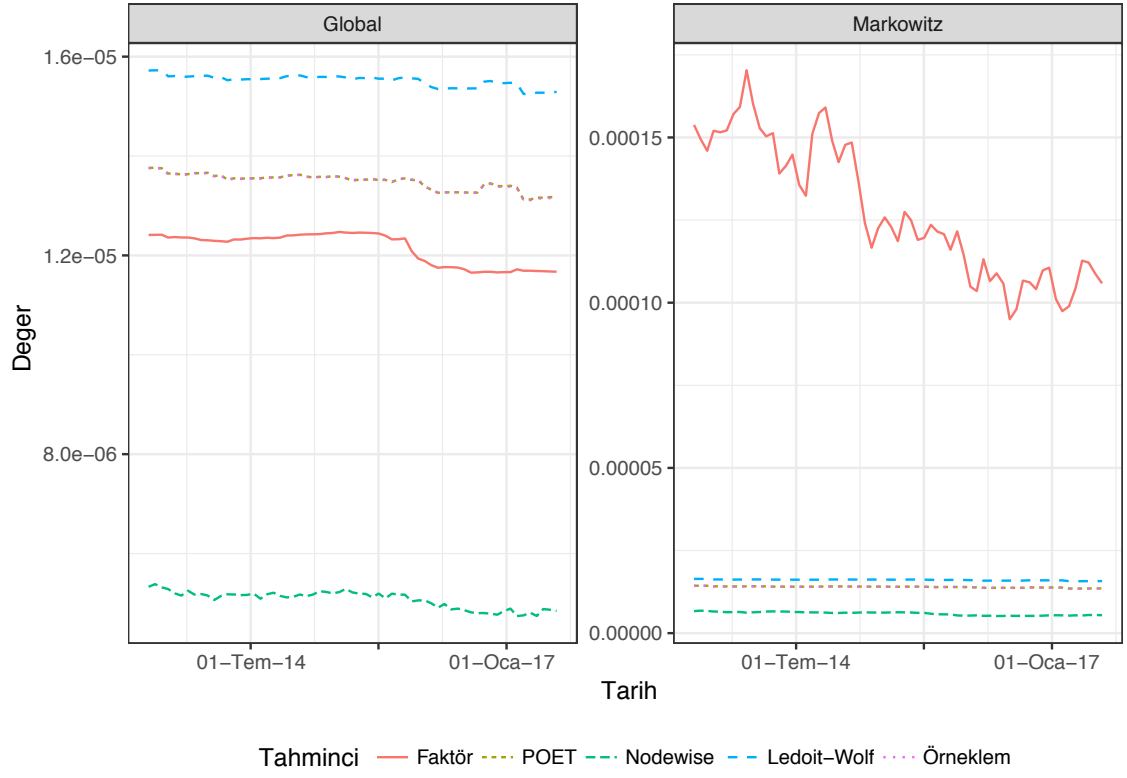
A.1 Örneklem İçi Portföy Performansı

Bu bölümde, günlük ve aylık gözlemler üzerinden oluşturulan portföy stratejilerinin örneklem içi portföy varyansları hesaplanmıştır. Örneğin, günlük gözlemde oluşturulan örneklem içi period $T = 942$, 01.07.2013 – 29.03.2017 tarihlerini, örneklem dışı period ise $n - T = 63$, 30.03.2017 – 30.06.2017 tarihlerini kapsamaktadır. Kayan-pencere yaklaşımında örneklem içi ilk simülasyon 01.07.2013 – 29.03.2017 tarihlerini kapsamaktadır. İkinci simülasyon 02.07.2013 – 30.03.2017, üçüncü simülasyon 03.07.2013 – 31.03.2017 tarihlerini kapsamaktadır. Her bir kayan-pencere simülasyonu için örneklem içi dönem başlangıcından bir gözlem atılıp örneklem dışı dönem başlangıcından ise bir gözlem periyoda dahil edilerek optimizasyon işlemi gerçekleştirilmektedir. Her bir örneklem içi dönem için hisse senedi getiri vektörü ve kovaryans matrisi yeniden tahmin edilmektedir. Diğer bir ifadeyle, $n - T = 63$ için portföy optimizasyonu için gerekli girdiler 63 kez tahmin edilmektedir. Bu süreç, $n - T - 1$ perioduna kadar devam etmektedir. Kayan-pencere yaklaşımıyla elde edilen öngörülerin örneklem dışı portföy performansları Bölüm 5.2.3’de detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu bölümde, her bir simülasyonu kapsayan örneklem içi periodun portföy performansları ele alınacaktır.

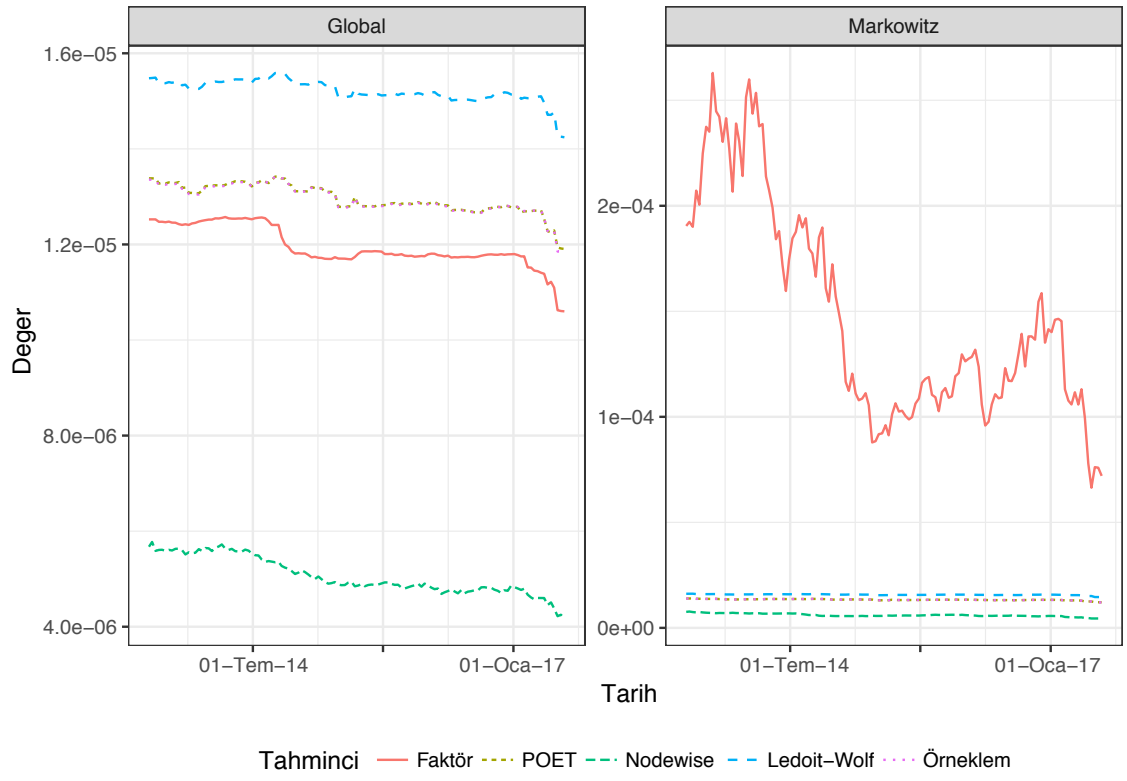
Günlük veri kullanılarak oluşturulan portföy stratejilerinde $\hat{\Theta}$ ile oluşturulan portföylerin örneklem dışı portföy varyanslarının diğer tahmincilerden daha düşük olduğu görül-

mektedir (bakınız, Tablo 5.8). Günlük gözlemlerde örneklem içi portföy varyansı örneklem dışı portföy performansını destekler niteliktedir. Şekil A.1 $T = 942$, Şekil A.2 $T = 879$, Şekil A.3 $T = 753$ ve Şekil A.4 $T = 670$ örneklem içi periodun her simülasyon için örneklem içi global minimum varyans ve Markowitz ortalama varyans portföy varyanslarını göstermektedir. Buna göre, $\hat{\Theta}$ matrisi kullanılarak oluşturulan portföy varyanslarının $\hat{\Sigma}_{SAM}$, $\hat{\Sigma}_{LWID}$, $\hat{\Sigma}_{FAC}$ ve $\hat{\Sigma}_{POET}$ matrisleriyle oluşturulan portföy varyanslarından daha düşük olduğu görülmektedir. Günlük gözlemlerde ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisi diğer kovaryans matrisi tahmincilerine göre daha düşük riske maruz bırakan portföyleri yönetmede daha başarılı sonuçlar verdiğini göstermiştir. Düşük risk konusunda başarılı olan ikinci tahminci ise global minimum varyans portföyünde Faktör modeli, Markowitz ortalama varyans portföyünde ise örneklem kovaryans tahmincisi ve POET tahmincileri olarak görünmektedir.

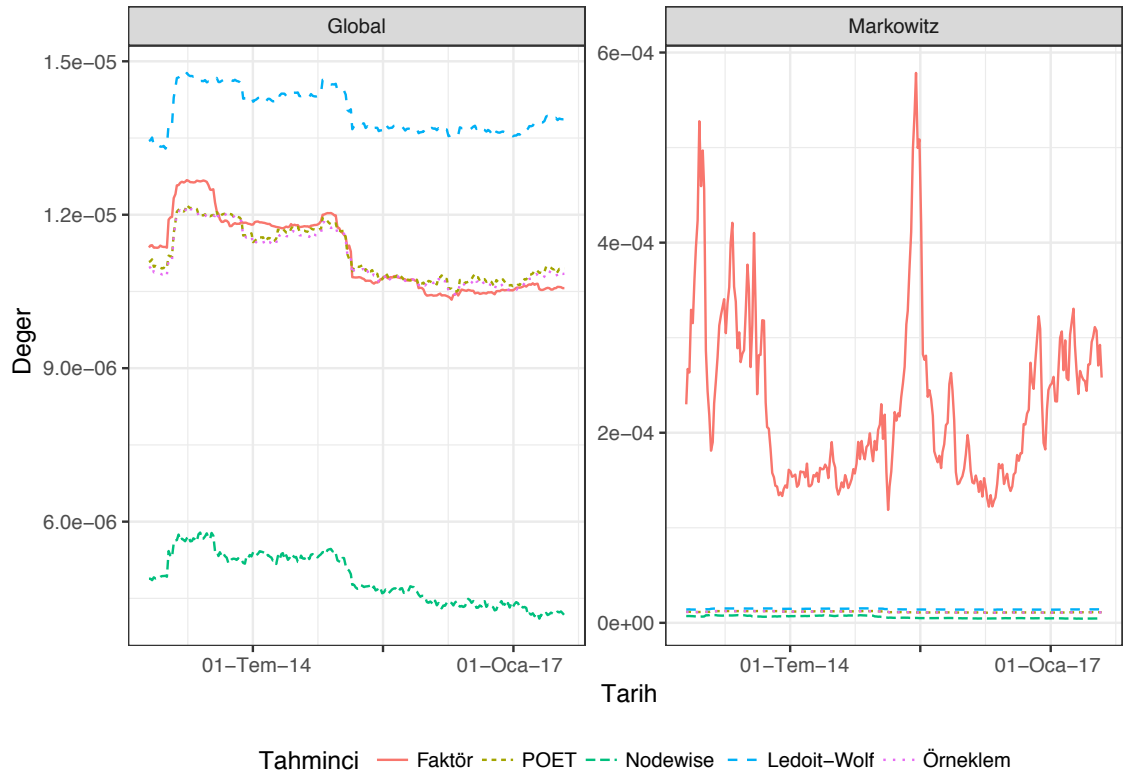
Aylık gözlemlerde ise örneklem içi portföy varyansları Şekil A.5, Şekil A.6, Şekil A.7, Şekil A.8, Şekil A.9, Şekil A.10 ve Şekil A.11’de gösterilmektedir. $T = 126$ ve $T = 120$ için POET tahmincisi düşük örneklem içi portföy varyansı sergilemektedir. İkinci en iyi tahminci ise ℓ_1 cezalı Nodewise tahmincisidir. $T = 108$, $T = 96$, $T = 88$, $T = 84$ ve $T = 72$ için $\hat{\Theta}$ ile oluşturulan portföylerin örneklem için risk değeri ile $\hat{\Sigma}_{POET}$ matrisine dayanan portföylerin risk değerleri arasındaki fark gittikçe kapanmaktadır.



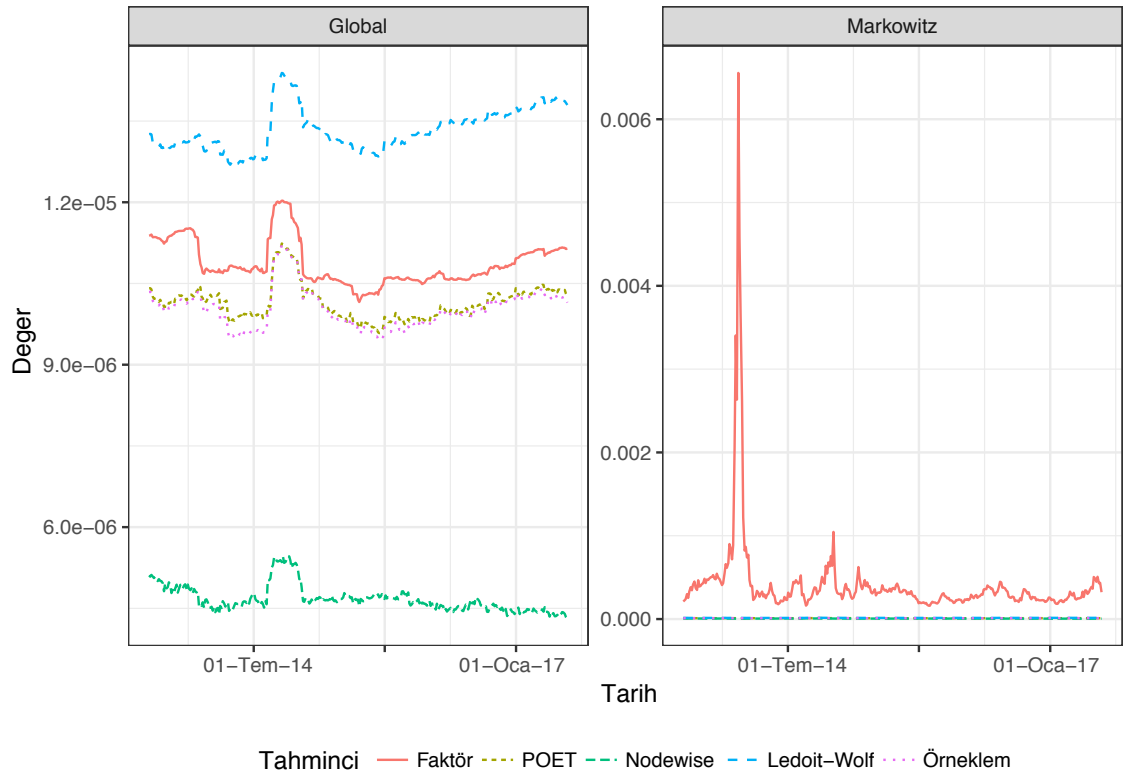
Şekil A.1: Örneklem-içi Portföy Varyansı, $T = 942$, $n - T = 63$



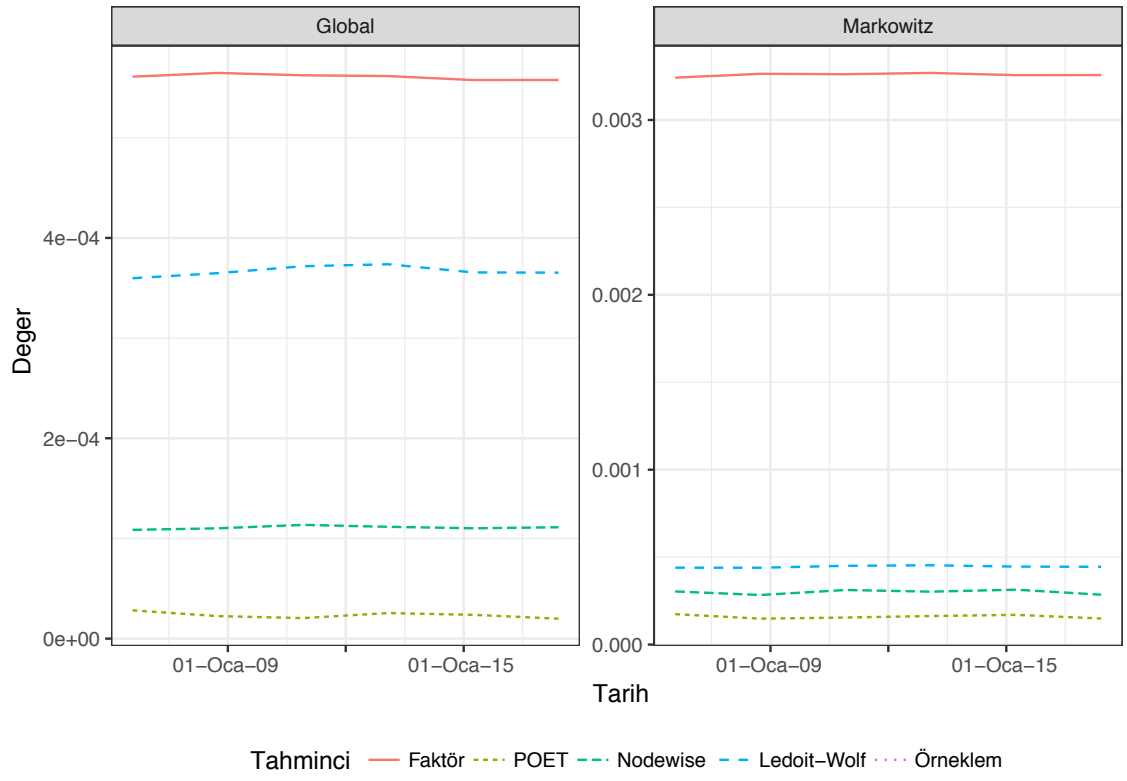
Şekil A.2: Örneklem-içi Portföy Varyansı, $T = 879$, $n - T = 126$



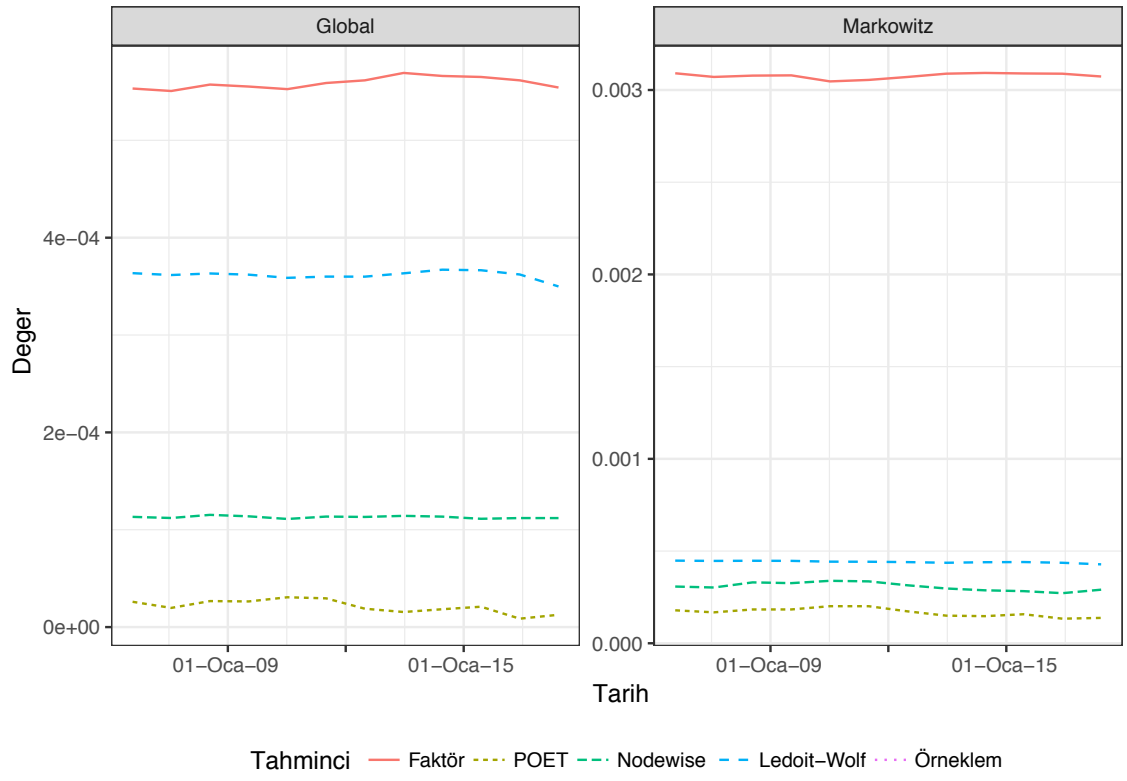
Şekil A.3: Örneklem-İçi Portföy Varyansı, $T = 753$, $n - T = 252$



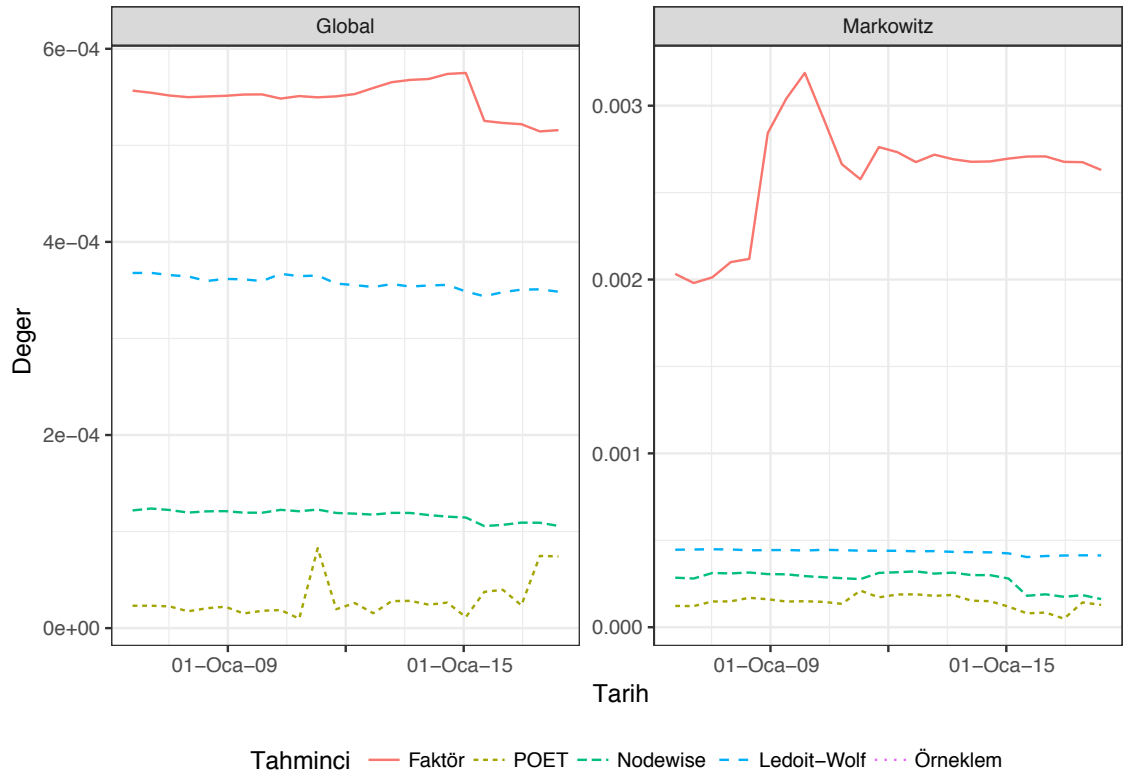
Şekil A.4: Örneklem-içi Portföy Varyansı, $T = 670$, $n - T = 335$



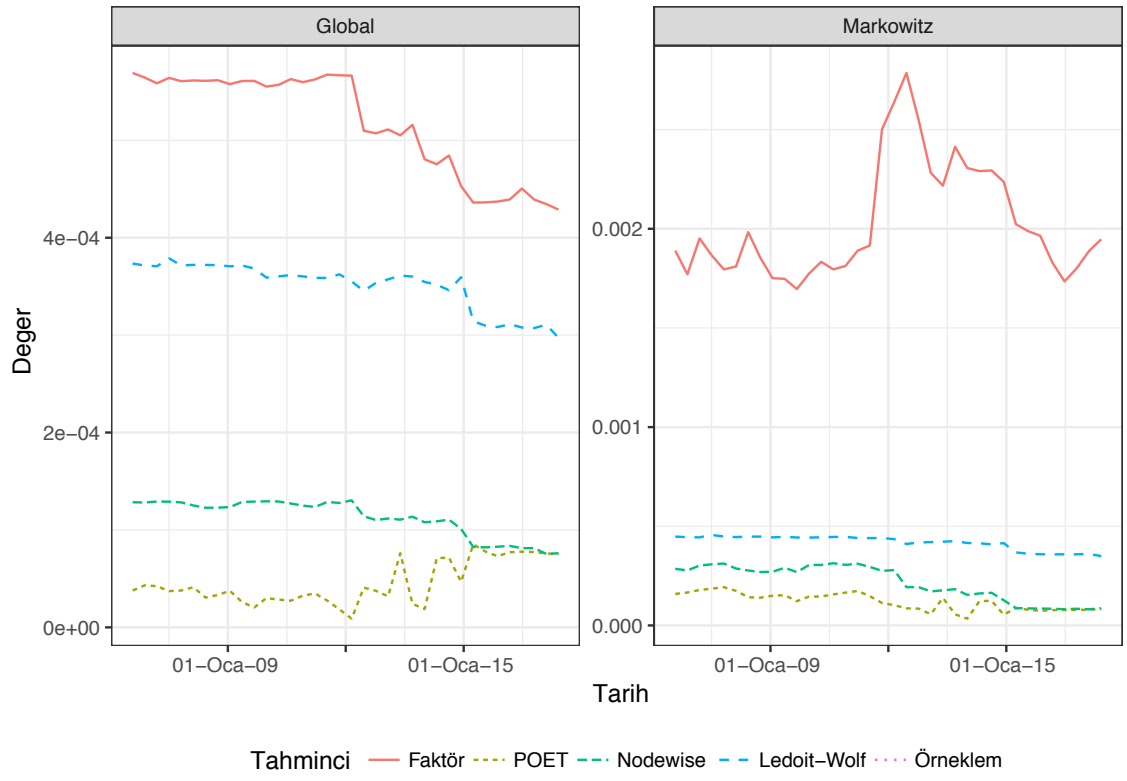
Şekil A.5: Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 126$, $n - T = 6$



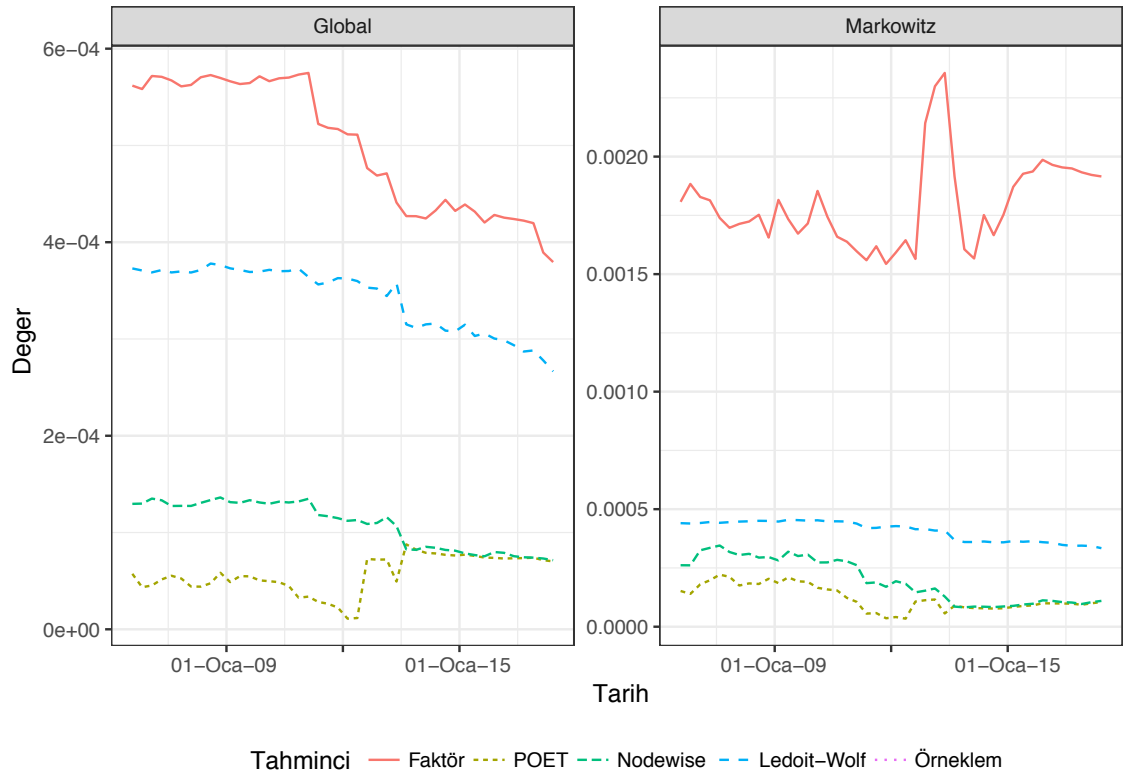
Şekil A.6: Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 120$, $n - T = 12$



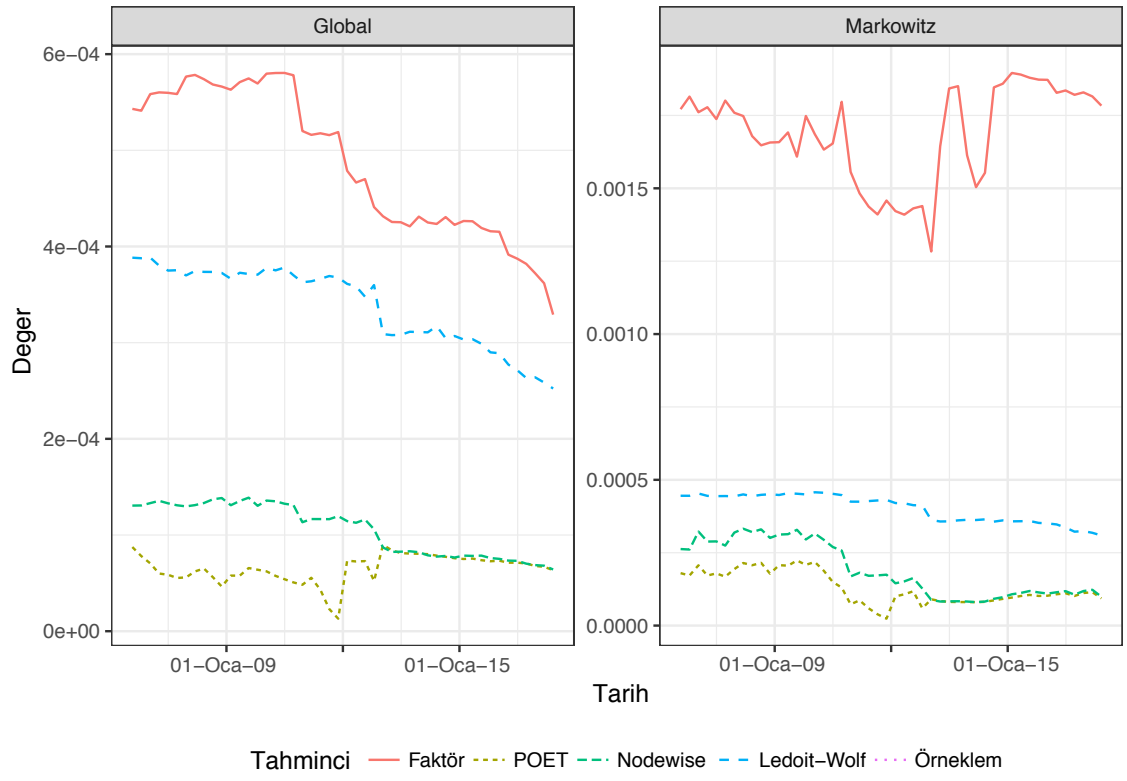
Şekil A.7: Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 108$, $n - T = 24$



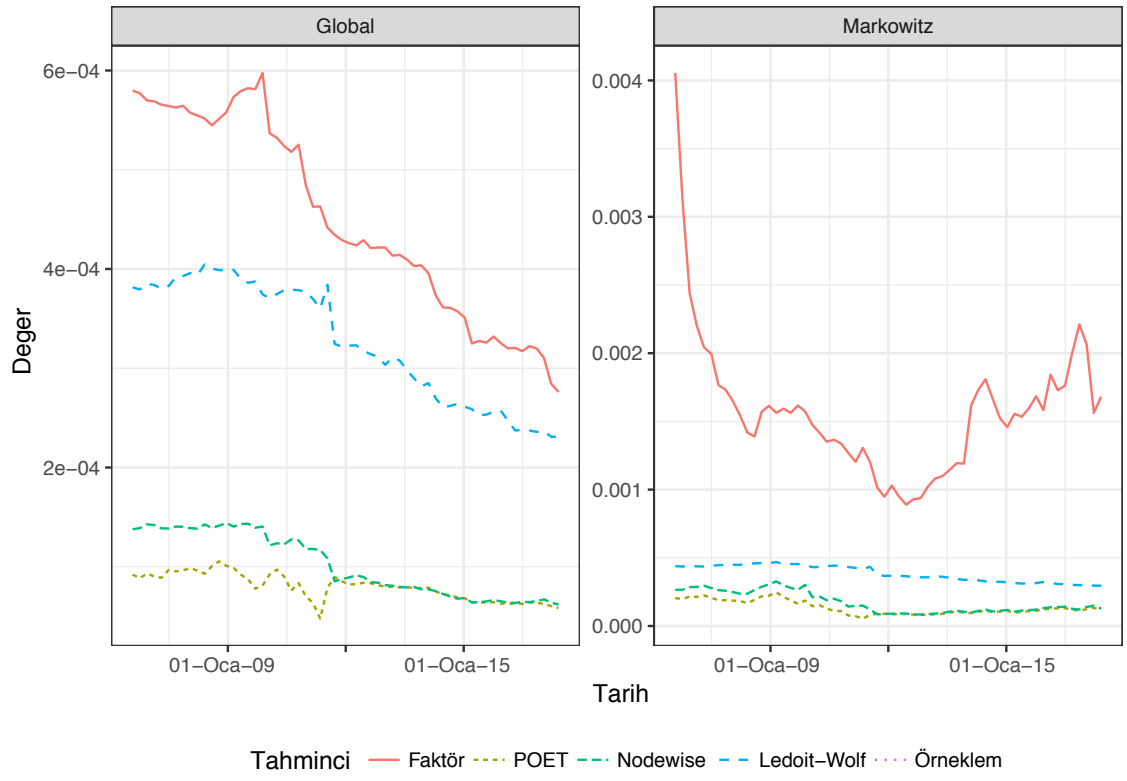
Şekil A.8: Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 96$, $n - T = 36$



Şekil A.9: Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 88$, $n - T = 44$



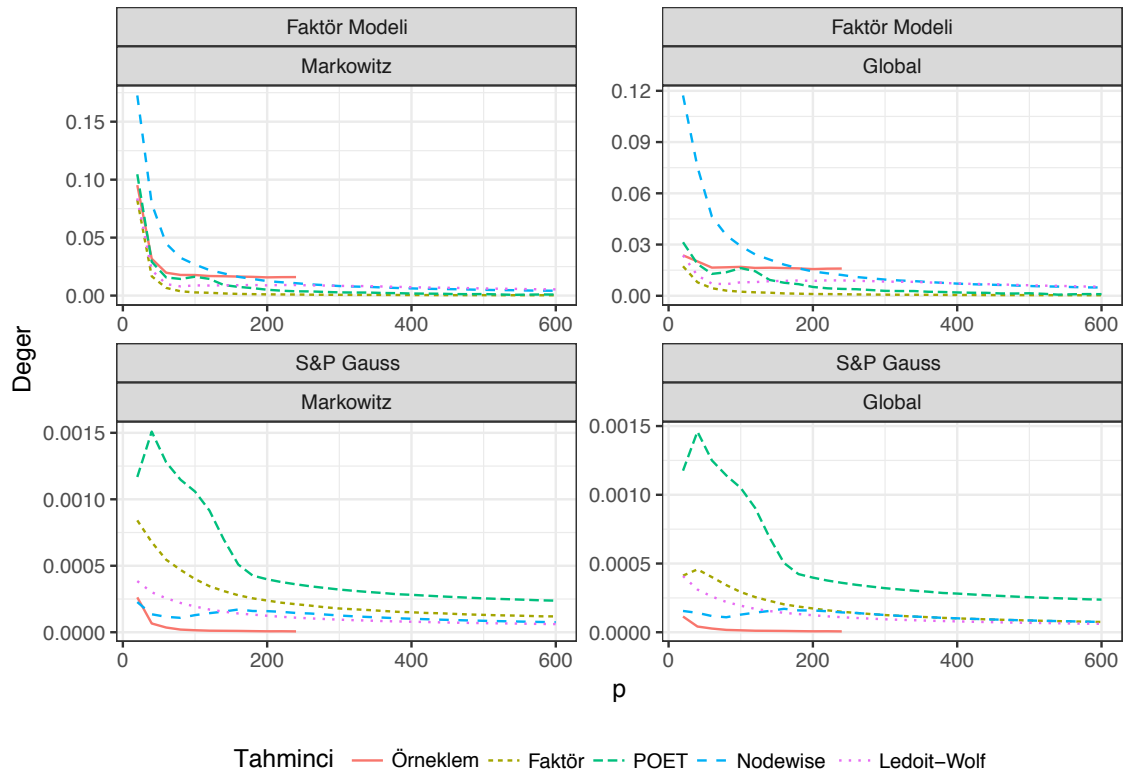
Şekil A.10: Örneklem-içi Portföy Varyansı, $T = 84$, $n - T = 48$



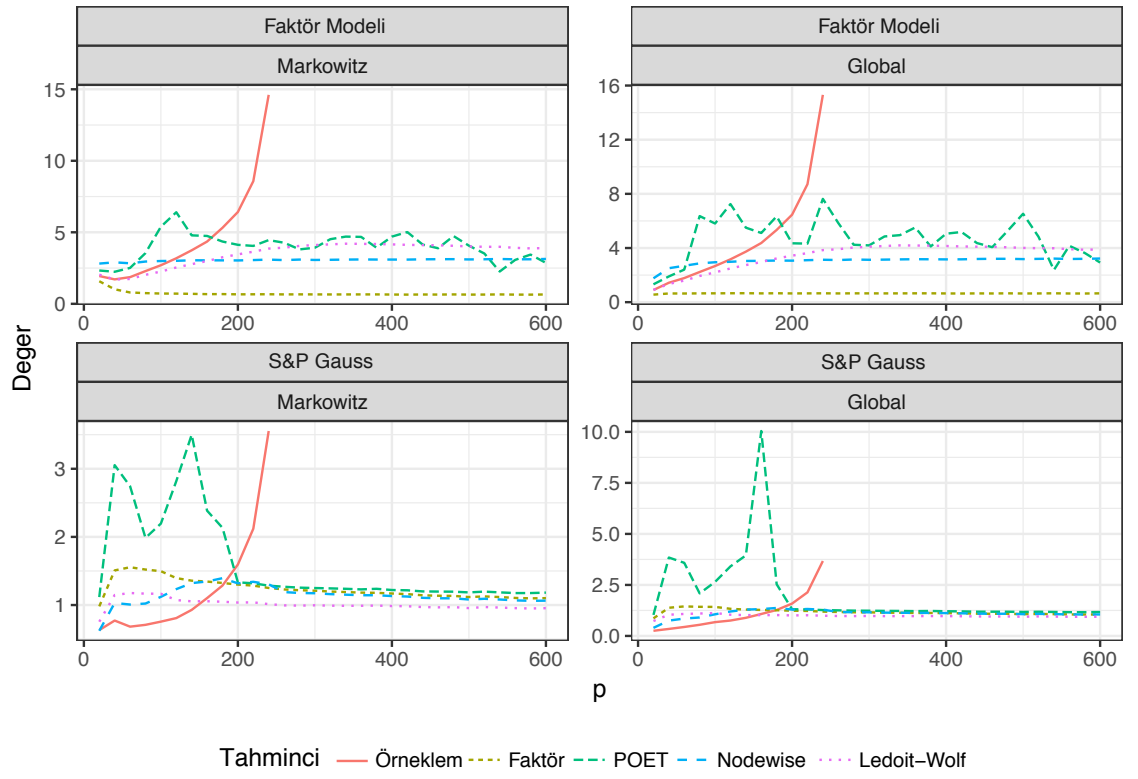
Şekil A.11: Örnekleme-içi Portföy Varyansı, $T = 72$, $n - T = 60$

Ek B

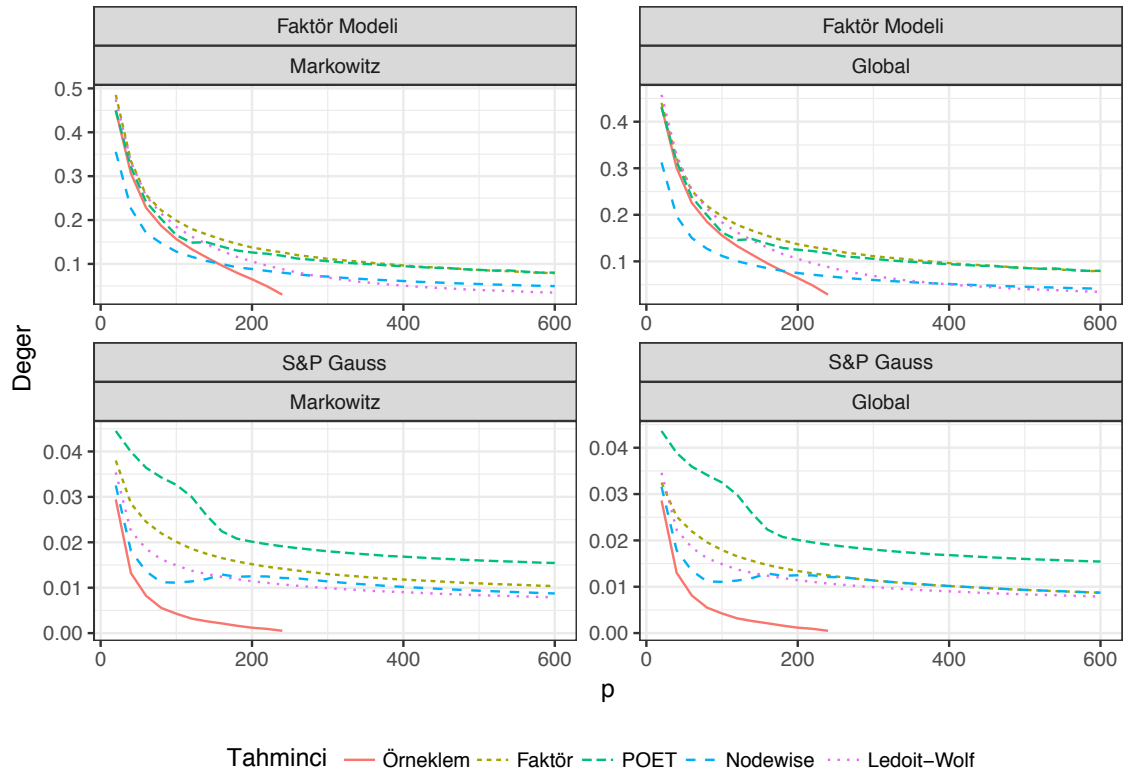
B.1 Simülasyon Sonuçları



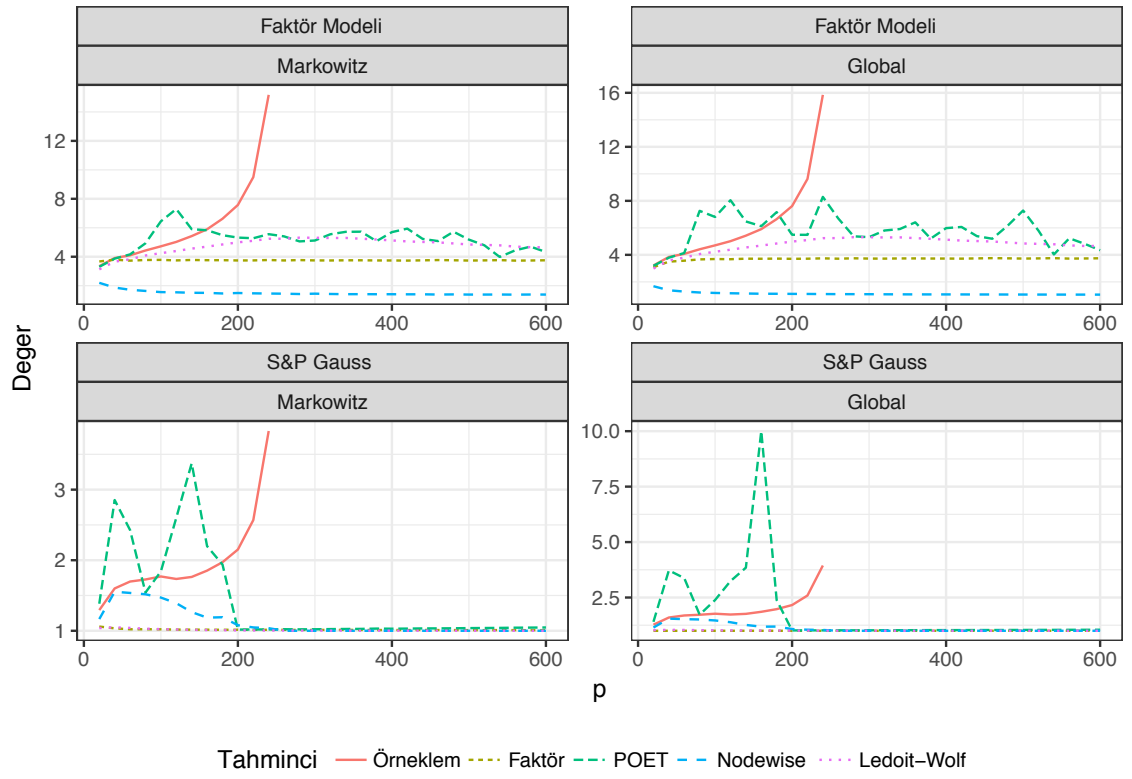
Şekil B.1: Portföy Varyans Tahmin Hatası, Hata Kareler Ortalamalarının Karakökü



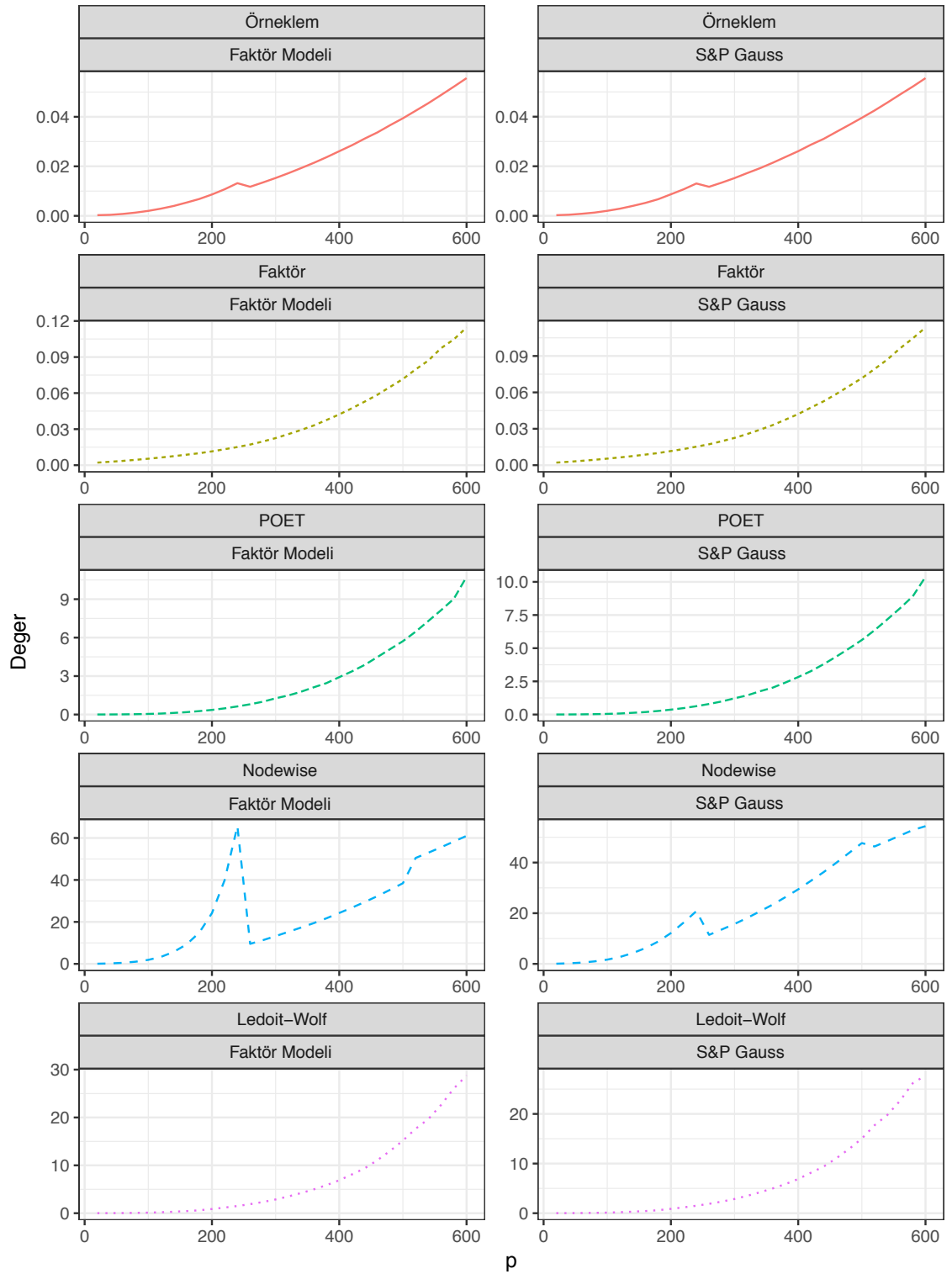
Şekil B.2: Portföy Ağırlıkları Tahmin Hatası, Hata Kareler Ortalamalarının Karakökü



Şekil B.3: Portföy Riski, Hata Kareler Ortalamalarının Karakökü



Şekil B.4: Portföy Brüt Risk Toplamı, Hata Kareler Ortalamalarının Karakökü



Tahminci — Örneklem — Faktör — POET — Nodewise — Ledoit-Wolf

Şekil B.5: Kovaryans Matris Tahmini Hesaplama Süresi

Kaynakça

- Antoniadis, A. ve Fan, J. (2001), ‘Regularization of wavelet approximations’, *Journal of the American Statistical Association* **96**, 939–967.
- Bai, J. ve Ng, S. (2002), ‘Determining the number of factors in approximate factor models’, *Econometrica* **70**(1), 191–221.
- Ban, G. Y., El Karoui, N. ve Lim, A. E. (2016), Machine learning and portfolio optimization, Accepted. Management Science.
URL: <https://doi.org/10.1287/mnsc.2016.2644>
- Bickel, P. J. ve Levina, E. (2008a), ‘Covariance regularization by thresholding’, *The Annals of Statistics* **36**(6), 2577–2604.
- Bickel, P. J. ve Levina, E. (2008b), ‘Regularized estimation of large covariance matrices’, *The Annals of Statistics* **36**(1), 199–227.
- Bodnar, T., Gupta, A. K. ve Parolya, N. (2014), ‘On the strong convergence of the optimal linear shrinkage estimator for large dimensional covariance matrix’, *Journal of Multivariate Analysis* **132**, 215 – 228.
- Bodnar, T., Mazur, S. ve Podgórski, K. (2016), ‘Singular inverse wishart distribution and its application to portfolio theory’, *Journal of Multivariate Analysis* **143**, 314–326.

- Brodie, J., Daubechies, I., De Mol, C., Giannone, D. ve Loris, I. (2009), ‘Sparse and stable markowitz portfolios’, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **106**(30), 12267–12272.
- Cai, T., Liu, W. ve Lou, X. (2011), ‘A constrained l_1 minimization approach to sparse precision matrix estimation’, *Journal of American Statistical Association* **106**(494), 594–607.
- Cai, T. ve Liu, W. (2011), ‘Adaptive thresholding for sparse covariance matrix estimation’, *Journal of the American Statistical Association* **106**(494), 672–684.
- Cai, T. ve Yuan, M. (2012), ‘Adaptive covariance matrix estimation trough block thresholding’, *The Annals of Statistics* **40**(4), 2014–2042.
- Cai, T. ve Zhou, H. (2012), ‘Optimal rates of converge for covariance matrix estimation’, *The Annals of Statistics* **40**(5), 2389–2420.
- Callot, L. A. F., Kock, A. B. ve Medeiros, M. C. (2016), ‘Modeling and forecasting large realized covariance matrices and portfolio choice’, *Journal of Applied Econometrics* .
- Caner, M., Ulasan, E., Callot, L. ve Önder, A. O. (2017), A relaxed approach to estimating large portfolios, Working paper, Department of Economics, The Ohio State University.
URL: <https://arxiv.org/abs/1611.07347v2>
- Caner, M. ve Kock, A. (2014), Asymptotically honest confidence regions for high dimensional parameters by the desparsified conservative lasso, Creates research papers, School of Economics and Management, University of Aarhus.
- Chamberlain, G. ve Rothschild, M. (1983), ‘Arbitrage, Factor Structure, and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets’, *Econometrica* **51**(5), 1281–1304.
- Chen, B., Huang, S.-F. ve Pan, G. (2015), ‘High dimensional mean–variance optimization through factor analysis’, *Journal of Multivariate Analysis* **133**, 140–159.

- Daniels, M. ve Kass, R. (2001), ‘Shrinkage estimator for covariance matrices’, *Biometrics* **57**(4), 1173–1184.
- d’Aspremont, A., Banerjee, O. ve El Ghaoui, L. (2008), ‘First-order methods for sparse covariance selection’, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **30**(56).
- DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F. J. ve Uppal, R. (2009), ‘A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms’, *Management Science* **55**(5), 798–812.
- DeMiguel, V., Garlappi, L. ve Uppal, R. (2009), ‘Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?’, *Review of Financial Studies* **22**(5), 1915–1953.
- Dey, D. K. (1987), ‘Improved estimation of a multinormal precision matrix’, *Statistics & Probability Letters* **6**(2), 125 – 128.
- Dey, D. K. ve Srinivasan, C. (1985), ‘Estimation of a covariance matrix under stein’s loss’, *The Annals of Statistics* **13**(4), 1581–1591.
- Efron, B. ve Morris, C. (1976), ‘Multivariate empirical bayes and estimation of covariance matrices’, *The Annals of Statistics* **4**(1), 22–32.
- El Karoui, N. (2008), ‘Operator norm consistent estimation of large-dimensional sparse covariance matrices’, *The Annals of Statistics* **36**(6), 2717–2756.
- Fama, E. F. ve French, K. R. (1993), ‘Common risk factors in the returns on stocks and bonds’, *Journal of Financial Economics* **33**(1), 3–56.
- Fan, J., Fan, Y. ve Lv, J. (2008), ‘High dimensional covariance matrix estimation using a factor model’, *Journal of Econometrics* **147**(1), 186–197.

- Fan, J., Feng, Y. ve Wu, Y. (2009), 'Network exploration via the adaptive LASSO and SCAD penalties', *The Annals of Applied Statistics* **3**(2), 521–541.
- Fan, J., Liao, Y. ve Mincheva, M. (2011), 'High-dimensional covariance matrix estimation in approximate factor models', *The Annals of Statistics* **39**(6), 3320–3356.
- Fan, J., Liao, Y. ve Mincheva, M. (2013), 'Large covariance estimation by thresholding principal orthogonal complements', *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* **75**(4), 603–680.
- Fan, J., Liao, Y. ve Shi, X. (2015), 'Risks of large portfolios', *Journal of Econometrics* **186**(2), 367 – 387.
- Fan, J. ve Li, R. (2001), 'Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties', *Journal of the American Statistical Association* **96**, 1348–1360.
- Fan, J., Zhang, J. ve Yu, K. (2012), 'Vast portfolio selection with gross-exposure constraints', *Journal of the American Statistical Association* **107**(498), 592–606.
- Friedman, J., Hastie, T. ve Tibshirani, R. (2008), 'Sparse inverse covariance estimation with the graphical lasso', *Biostatistics* **9**(3), 432–441.
- Friedman, J., Hastie, T. ve Tibshirani, R. (2010), 'Regularization paths for generalized linear models via coordinate descent', *Journal of Statistical Software* **33**(1), 1–22.
- Green, R. C. ve Hollifield, B. (1992), 'When will Mean-Variance efficient portfolios be well diversified?', *The Journal of Finance* **47**(5), 1785–1809.
- Hautsch, N., Kyj, L. M. ve Oomen, R. C. (2012), 'A blocking and regularization approach to high-dimensional realized covariance estimation', *Journal of Applied Econometrics* **27**(4), 625–645.

- Hocking, R. R. ve Leslie, R. N. (1967), 'Selection of the best subset in regression analysis', *Technometrics* **9**(4), 531–540.
- Hoerl, A. E. ve Kennard, R. W. (1970), 'Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems', *Technometrics* **12**(1), 55–67.
- Huang, J. Z., Liu, N., Pourahmadi, M. ve Liu, L. (2006), 'Covariance matrix selection and estimation via penalised normal likelihood', *Biometrika* **93**(1), 85–98.
- Jagannathan, R. ve Ma, T. (2003), 'Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps', *The Journal of Finance* **58**(4), 1651–1684.
- Javanmard, A. ve Montanari, A. (2014), 'Hypothesis testing in high-dimensional regression under the gaussian random design model: Asymptotic theory', *IEEE Transactions on Information Theory* **60**(10), 6522–6554.
- Jorion, P. (1986), 'Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis', *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **21**(03), 279–292.
- Kourtis, A., Dotsis, G. ve Markellos, R. N. (2012), 'Parameter uncertainty in portfolio selection: Shrinking the inverse covariance matrix', *Journal of Banking & Finance* **36**, 2522–2531.
- Kubokawa, T. ve Srivastava, M. S. (2008), 'Estimation of the precision matrix of a singular wishart distribution and its application in high-dimensional data', *Journal of Multivariate Analysis* **99**(9), 1906–1928.
- Lam, C. ve Fan, J. (2009), 'Sparsistency and rates of convergence in large covariance matrix estimation', *The Annals of Statistics* **37**(6B), 4254–4278.
- Ledoit, O. ve Wolf, M. (2003), 'Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection', *Journal of Empirical Finance* **10**(5), 603–621.

- Ledoit, O. ve Wolf, M. (2004), ‘A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices’, *Journal of Multivariate Analysis* **88**(2), 365–411.
- Ledoit, O. ve Wolf, M. (2012), ‘Nonlinear shrinkage estimation of large-dimensional covariance matrices’, *The Annals of Statistics* **40**(2), 1024–1060.
- Ledoit, O. ve Wolf, M. (2015), ‘Spectrum estimation: A unified framework for covariance matrix estimation and pca in large dimensions’, *Journal of Multivariate Analysis* **139**, 360–384.
- Levina, E., Rothman, A. ve Zhu, J. (2008), ‘Sparse estimation of large covariance matrices via a nested lasso penalty’, *The Annals of Applied Statistics* **2**(1), 245–263.
- Li, J. (2015), ‘Sparse and stable portfolio selection with parameter uncertainty’, *Journal of Business & Economic Statistics* **33**(3), 381–392.
- Liu, Q. (2009), ‘On portfolio optimization: How and when do we benefit from high-frequency data?’, *Journal of Applied Econometrics* **24**(4), 560–582.
- Markowitz, H. (1952), ‘Portfolio selection’, *The Journal of Finance* **7**(1), 77–91.
- Markowitz, H. (1990), *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, 1st edn, Basic Blackwell, Incorporated.
- Meinshausen, N. ve Bühlmann, P. (2006), ‘High-dimensional graphs and variable selection with the lasso’, *The Annals of Statistics* **34**(3), 1436–1462.
- Michaud, R. O. (1989), ‘The markowitz optimization enigma: Is optimized optimal’, *Financial Analysts Journal* **45**(1), 31–42.
- Mincheva, M. Z. (2014), High-Dimensional Structured Covariance Matrix Estimation with Financial Applications, PhD dissertation, Princeton University.

- O.Banerjee, El Ghaoui, L. ve d'Aspremont, A. (2008), 'Model selection through sparse maximum likelihood estimation for multivariate gaussian or binary data', *Journal of Machine Learning Research* **9**, 485–516.
- Ravikumar, P., Wainwright, M. J., Raskutti, G. ve Yu, B. (2011), 'High-dimensional covariance estimation by minimizing l_1 -penalized log-determinant divergence', *Electronic Journal of Statistics* **5**, 935–980.
- Ross, S. A. (1976), 'The arbitrage theory of capital asset pricing', *Journal of Economic Theory* **13**(3), 341–360.
- Ross, S. A. (1977), 'The capital asset pricing model (capm), short-sale restrictions and related issues', *Journal of Finance* **32**(1), 177–83.
- Rothman, A. J., Bickel, P. J., Levina, E. ve Zhu, J. (2008), 'Sparse permutation invariant covariance estimation', *Electronic Journal of Statistics* **2**, 494–515.
- Rothman, A. J., Levina, E. ve Zhu, J. (2009), 'Generalized thresholding of large covariance matrices', *Journal of the American Statistical Association* **104**(485), 177–186.
- Rothman, A. J., Levina, E. ve Zhu, J. (2010), 'A new approach to cholesky-based covariance regularization in high dimensions', *Biometrika* **97**(3), 539–550.
- Schäfer, J. ve Strimmer, K. (2005), 'A shrinkage approach to large-scale covariance matrix estimation and implications for functional genomics.', *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology* **4**(1).
- Sharpe, W. (1963), 'A simplified model for portfolio analysis', *Management Science* **9**(2), 277–293.
- Stein, J. (1956), Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution, in J. Neyman, ed., 'Proceedings of the Third Berkeley Symposium

- on Mathematical Statistics and Probability', University of California Press, pp. 197–206.
- Stock, J. H. ve Watson, M. W. (2002), 'Forecasting using principal components from a large number of predictors', *Journal of the American Statistical Association* **97**(460), 1167–1179.
- Tibshirani, R. (1996), 'Regression shrinkage and selection via the lasso', *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **58**, 267–288.
- Tibshirani, R. ve Wasserman, L. (2017), Sparsity, the lasso, and friends, Technical report.
URL: <http://www.stat.cmu.edu/~ryantibs/statml/lectures/sparsity.pdf>
- Tsukuma, H. ve Konno, Y. (2006), 'On improved estimation of normal precision matrix and discriminant coefficients', *Journal of Multivariate Analysis* **97**(7), 1477–1500.
- van de Geer, S., Bühlmann, P., Ritov, Y. ve Dezeure, R. (2014), 'On asymptotically optimal confidence regions and tests for high-dimensional models', *The Annals of Statistics* **42**(3), 1166–1202.
- Wang, H., Li, B. ve Leng, C. (2009), 'Shrinkage tuning parameter selection with a diverging number of parameters', *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* **71**(3), 671–683.
- Warton, D. (2011), 'Penalized sandwich estimators for analysis of high-dimensional data using generalized estimating equations', *Biometrics* **67**, 116–123.
- Wong, F., Carter, C. K. ve Kohn, R. (2003), 'Efficient estimation of covariance selection models', *Biometrika* **90**(4), 809–830.
- Wu, W. B. ve Pourahmadi, M. (2003), 'Nonparametric estimation of large covariance matrices of longitudinal data', *Biometrika* **90**(4), 831–844.

- Yang, R. ve Berger, J. O. (1994), ‘Estimation of a covariance matrix using the reference prior’, *The Annals of Statistics* **22**(3), 1195–1211.
- Yuan, M. ve Lin, Y. (2006), ‘Model selection and estimation in regression with grouped variables’, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **68**, 49–67.
- Yuan, M. ve Lin, Y. (2007), ‘Model selection and estimation in the gaussian graphical model’, *Biometrika* **94**(1), 19–35.
- Zou, H. (2006), ‘The adaptive lasso and its oracle properties’, *Journal of the American Statistical Association* **101**(476), 1418–1429.
- Zou, H., Hastie, T. ve Tibshirani, R. (2007), ‘On the “degrees of freedom” of the lasso’, *The Annals of Statistics* **35**(5), 2173–2192.
- Zou, H. ve Hastie, T. (2005), ‘Regularization and variable selection via the elastic net’, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **67**, 301–320.

Özgeçmiş

ESRA ULAŞAN

1.1 İletişim

DOĞUM YERİ VE TARİHİ: Uşak | 4 Aralık 1985

ADRES: Ege Üniversitesi, İktisat Bölümü, İzmir, Türkiye

TEL: +90 2323115481

EMAIL: esra.ulasan@ege.edu.tr

1.2 Uzmanlık Alanları

Finansal Ekonometri, Yüksek Boyutlu Ekonometri, Büyük Veri, Uygulamalı Ekonometri, Makine Öğrenmesi, Yatırımlar ve Portföy Yönetimi

1.3 Eğitim

PH.D. 2017 İktisat

Ege Üniversitesi, İzmir

M.S. 2011 İktisat

Uşak Üniversitesi, Uşak

B.S. 2007 Çalışma Ekonomisi ve Endüstri İlişkileri

Marmara Üniversitesi, İstanbul

1.4 Deneyim

Eylül 2012- Ekim 2017	Araştırma Görevlisi, EGE ÜNİVERSİTESİ, İzmir İktisat Bölümü
2016	Bursiyer 1001, TÜBİTAK Onaylandı
YÜRÜTÜCÜ	A.Özlem Önder
YURTDIŞI DANIŞMAN	Mehmet Caner, OHIO STATE UNIVERSITY, Columbus OH, USA Portföy Optimizasyonunda Ampirik Gram Matris Tahminine Node-Wise Yaklaşımı: Gelişmekte Olan Hisse Senedi Piyasaları Örneği
2015-2016	Bölüm Erasmus Koordinatör Yardımcısı, EGE ÜNİVERSİTESİ İktisat Bölümü
2014-2015	Misafir Araştırmacı NC STATE UNIVERSITY, Raleigh NC, USA İktisat Bölümü
2010-2012	Araştırma Görevlisi (ÖYP), ŞIRNAK ÜNİVERSİTESİ, Şırnak İktisat Bölümü

1.5 Dil ve Programlama Bilgisi

PROGRAMLAR: R, Matlab, RapidMiner, Weka, OxMetrics, RATS, Stata, GAUSS, Eviews

EDITING: L^AT_EX, Scientific Workplace, MS Office

DİL: İngilizce

1.6 Konferans ve Yayınlar

- 2017 | *A Relaxed Approach to Estimating Large Portfolios*, joint work with Mehmet Caner, Laurent Callot and A. Özlem Önder, SUBMITTED TO JOURNAL OF ECONOMETRICS.
- 2017 | *The Impacts of Interest Expenditure on Income Distribution and an Application on the Factors Distorting Income Distribution: An Empirical Analysis for Turkey*, joint work with İbrahim Halil Sığözü and Savaş Erdoğan, TURKISH STUDIES ECONOMICS, FINANCE AND POLITICS, 2(2), 231-250.
- 2017 | Ulasan, E. and Önder, A.Ö. (2017). *Empirical Gram Matrix Estimation Using High-Frequency Data for Portfolio Optimization and Gross Exposure: Evidence from Emerging Stock Markets*, EcoMod2017, 5 - 7 July, Faculty of Economics, University of Ljubljana, Ljubljana, Slovenia.
- 2017 | Caner, M., Ulasan, E., Callot, L. and Önder, A.Ö. (2017). *A Relaxed Approach to Estimating Large Portfolios and Gross Exposure*, The Society for Financial Econometrics (SoFiE) Conference 2017, 21 - 23 June, NYU Stern School of Business, New York, USA.

1.6 Konferans ve Yayınlar (Devam)

- 2016 Ulasan, E., Caner, M., Callot, L. and Önder, A.Ö. (2016). *A Relaxed Approach to Estimating Large Portfolios*, The 26th Annual Meeting of the Midwest Econometrics Group (MEG 2016), 21 - 22 October, Department of Economics: University of Illinois at Urbana-Champaign, Champaign, IL, USA.
- 2016 Ulasan, E., Callot, L., Caner, M. and Önder, A.Ö. (2016). *A Relaxed Approach to Estimating Large Portfolios and Gross Exposure*, 31st Annual Congress of the European Economic Association & 69th European Meeting of the Econometric Society (EEA-ESEM 2016 Conference), 22 - 26 August, Geneva, Switzerland.
- 2015 Caner, M., Ulasan, E. and Önder, A.Ö. (2015). *Node-Wise Approach to Precision Matrix Estimation of Portfolio Optimization*, International Association for Applied Econometrics (IAAE) Annual Conference, 25 - 27 June, University of Macedonia, Thessaloniki, Greece.
- 2014 Değer, Ç. and Ulasan, E. (2014). *Impact of Arab Spring on International Trade: A Gravity Analysis*. EURO-MED, Broader Middle East and North Africa (BMENA) Society, Politics, Economics, Security and International Relations after the Arab Spring. 15 - 17 May, Rhodes, Greece.

1.6 Konferans ve Yayınlar (Devam)

- 2013 | Ulasan, E., Atış G., Aydanur and Altay, N.O. (2013). *Küresel Finansal Kriz Sonrası Para Politikalarındaki Dönüşümün FED, ECB ve TCMB Yönünden Karşılaştırmalı Analizi* (After the Global Financial Crisis A Comparative Analysis of the Monetary Policies Transformation in terms of FED, ECB and CBRT), International Istanbul Finance Congress, 30 - 31 May, Istanbul, Turkey.

1.7 Kitaplar

- 2015 | Ulasan, E., Atış G., Aydanur and Altay, N.O. (2015). *Küresel Finansal Kriz ve Para Politikası Uygulamaları*, (Global Financial Crisis and Monetary Policy Applications, Book Chapter) Para İktisadı Teori ve Politika, (Ed.) Prof.Dr. N.Oğuzhan Altay, Palme Yayıncılık, Ankara.
- 2014 | Altay, N.O. and Ulasan, E. (2014). *Küresel Finansal Kriz ve Krizden Günümüze FED'in Uyguladığı Para Politikaları ve Etkileri*, (Global Financial Crisis, FED's Monetary Policies and the Impacts of the Policies from the Crisis to Present, Book Chapter) Prof.Dr. Fevzi Devrim'e Armağan, (Ed.) Prof.Dr. Kamil Tüğen, Prof. Dr. Asuman Altay, Dokuz Eylül Üniversitesi Yayınları, İzmir.

1.9 Kurs ve Seminerler

- TEMMUZ 2017 DATA MINING
EYS, Pamukkale Üniversitesi, Denizli
EĞİTMEN ŞADI EVREN ŞEKER
- AĞUSTOS 2016 STATISTICAL METHODS IN RISK MANAGEMENT
LSE Methods Summer Programme, İngiltere
EĞİTMEN HAO XING
- AĞUSTOS 2016 FACTOR MODELS IN TIME SERIES WITH APPLICATIONS IN
MACROECONOMICS AND FINANCE
LSE Methods Summer Programme, İngiltere
EĞİTMEN MATTEO BARIGOZZI
- AĞUSTOS 2016 HIGH-DIMENSIONAL ECONOMETRICS
EYS, Pamukkale Üniversitesi, Denizli
EĞİTMEN MEHMET CANER
- NISAN 2015 MARKET RISK
Risktürk, İstanbul
EĞİTMEN BURAK SALTOĞLU
- 2008-2009 BUSINESS ENGLISH CERTIFICATE/ ADVANCED SKILLS
ETC International College, İngiltere

1.8 Üyelikler

International Association for Applied Econometrics

Aegean Finance Association

Özet

Son yıllarda seyreklik varsayımı ve cezalandırma metodlarına dayalı yöntemler yüksek boyutlu kovaryans matrisi ve tersinin tahminini mümkün hale getirmektedir. Bu tezde, Markowitz ortalama varyans portföy optimizasyonu çerçevesinde tersi alınamayan tekil kovaryans matrisinin tahmininde ℓ_1 cezalı Nodewise regresyon modeli uygulanarak ampirik Gram matrisine yönelik hisse senetlerinin yaklaşık ters matrisi oluşturulmuştur. Hisse senedi sayısı p gözlem sayısını n aştığında $n \ll p$ yaklaşık ters matrisde tahmin edilecek veriyi en iyi açıklayan parametre sayısının azaltılarak birbiriyle korelasyon halinde olmayan hisse senetlerinin ortaya çıkarılmasında seyreklik varsayımından yararlanılmıştır. Yapılan simülasyon çalışmalarında p, n sayısından uzaklaştıkça yaklaşık ters matris ile oluşturulan portföy varyansının ve optimal portföy ağırlıklarının tahmin hatalarının tutarlı bir şekilde sifira yakınsadığı gözlemlenmiştir. Ayrıca, kayan pencere simülasyonu yaklaşımıyla elde edilen farklı yatırım ufukları için örneklem dışı öngörü sonuçlarında yaklaşık ters matris ile oluşturulan portföylerin finans literatüründe yer alan diğer kovaryans matris tahmincileriyle elde edilen portföylerden belirgin şekilde üstün olduğunu gösteren ampirik bulgulara ulaşılmıştır.

Abstract

In recent years, methods based on sparsity assumptions and penalization have made possible and practical the estimation of high dimensional covariance matrix and inverse. In this dissertation, we have constructed an approximate inverse of stocks for the empirical Gram matrix by applying Nodewise regression with ℓ_1 penalty to estimate the non-invertible singular covariance matrix in the Markowitz mean variance portfolio optimization framework. When the number of stocks p exceeds the number of observations n , $n \ll p$, sparsity assumption is used by reducing the number of parameters that best describe the data to be estimated in the approximate inverse matrix in the purpose of exploiting stocks that are not correlated with each other. It has been observed in the simulation studies that the estimation errors of the portfolio variance and optimal portfolio weights generated by the approximate inverse matrix converge to zero consistently as p diverges to n . In addition, we find empirical evidence that optimal portfolios estimated with approximate inverse matrix in the out-of-sample forecasting results for the different investment horizons are significantly superior to the portfolios obtained by the existing covariance matrix estimators in the finance literature with the rolling window simulation procedure.