EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(DOKTORA TEZİ)

SAĞLAM İLETİŞİM AĞLARININ TASARIMINDA YENİ ÖLÇÜMLER

Elgin KILIÇ
Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 619.03.03
Sunuş Tarihi:13.02.2009

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Pınar DÜNDAR

Bornova-İZMİR

Elgin KILIÇ tarafından **Doktora Tezi** olarak sunulan **"Sağlam İletişim Ağlarının Tasarımında Yeni Ölçümler"** başlıklı bu çalışma E. Ü. Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği ile E. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 13.02.2009 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		İmza:
Jüri Başkanı	: Prof.Dr. Pınar DÜNDAR	....
Raportör Üye	: Doç.Dr. Halil ORUÇ	....
Üye	: Prof.Dr. Şennur SOMALI	....
Üye	: Prof.Dr. Urfat NURİYEV	....
Üye	: Doç.Dr. Alpay KIRLANGIÇ	....

ÖZET

SAĞLAM İLETİŞİM AĞLARININ TASARIMINDA YENİ ÖLÇÜMLER

KILIÇ, Elgin
Doktora Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Prof.Dr. Pınar DÜNDAR
Şubat 2009,42 sayfa

Graf teorisi yardımıyla en çok çözülen problemlerden biri, bozulmalara karşı direnci diğerlerine göre daha fazla olan bir ağ modeli tasarımını gerçekleştirmektir. Bu amaçla grafın tüm tepeler ya da ayrıtlar kümesi üzerinden pek çok ölçüm tanımlanmıştır. Son yıllarda ise ölçümler, grafın belirli özellikteki tepeler ya da ayrıtlar kümesi üzerinden tanımlanmaktadır. Bu tezde sözü edilen ikinci tür ölçümlerden yeni bir ölçüm olan Total Accessibility (toplam erişilebilirlik) tanımlanmıştır. Tezin 2. bölümünde temel graf bilgileri ve kararlılık ölçümleri verilmiştir. 3. bölümde Total Redundance kavramı incelenmiş, temel graf sınıflarındaki sonuçları hesaplanmış ve graf işlemleri ile arasındaki ilişki verilmiştir. 4. bölümde temel graf sınıfları ve graf işlemleri altında Total accessibility sayısı incelenmiş, elde edilenler sonuç ve teoremler olarak ifade edilmiştir. Total accessibility sayısını bulan bir algoritma verilmiştir. Aynı tepe sayısına sahip ve bazı zedelenebilirlik ölçüm değerleri aynı olan herhangi iki ağ modeli ele alındığında Total Accessibility sayısı daha büyük olan ağın yapıca daha sağlam olduğu sonucuna varılmıştır. Böylece ağ tasarımında yol gösterici bir ölçüm olduğu kanıtlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Graf teori, accessibility (erişilebilirlik) sayısı, total redundance, total accessibility (toplam erişilebilirlik).

ABSTRACT

NEW MEASURES ON THE DESIGN OF STABLE COMMUNICATION NETWORKS

KILIÇ, Elgin

Phd. Thesis, Mathematics Department

Supervisor: Associate Professors Pınar DÜNDAR

February 2009,42 pages

One of the most solved problems with the help of graph theory is to design a network model whose resistance for the disruptions is more than other networks'. Many vulnerability measures have been defined over all vertices of a graph to this purpose. In recent years, measures are defined over some vertices or edges which have specific property. In this thesis Total Accessibility which is a new measure as the second type of measures mentioned above, is defined. In second section of the thesis general graph types and stability measures are given. In third section Total Redundance is examined on general graph types and its relation between graph operations is given. In fourth section Total Accessibility is examined under graph operations, results obtained and theorems are given. In fifth section an algortihm which calculates Total Accessibility of a graph is given. When any two networks having the same number of vertices and having the same value of some vulnerability measures are compared in stability, it is inferenced that network whose Total Accessibility value higher is more stable than the other. It is proved that Total Accessibility is a directive in design of networks.

Key Words: Graf theory, accessibility number, total redundance, total accessibility.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın her aşamasında yaptığı eleştiri, öneri ve desteği, karşılaştığım her türlü problemde göstermiş olduğu anlayış ve özverisi için hocam sayın Prof.Dr.Pınar DÜNDAR'a, hayatımın her aşamasında olduğu gibi yüksek öğrenimim boyunca, benden destek ve sevgilerini esirgemeyen canım aileme, annem Emriye KILIÇ'a, babam Oğuz KILIÇ'a ve ablam Aysun KILIÇ'a sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Bir iletişim ağı için önemli olan fonksiyonunu gerçekleştirmesidir. Bir ağın bazı işlemci ya da hatlarında meydana gelen bozulmalar ağın etkinliğinin azalmasına neden olur. Bu da ağın fonksiyonunu yerine getirememesi demektir. Zedelenebilirlik, ağın bazı işlemci ya da hatları hasar gördüğünde, ağın bozulmaya karşı direncini gösterir. Bir ağın tasarımı yapılırken, bozulmalara karşı olabildiğince büyük zedelenebilirlikli bir ağ modeli seçilmelidir. Zedelenebilirliği büyük olan ağlara sağlam (kararlı) ağ denir. Bir ağın zedelenebilirliği oldukça büyük önem taşımaktadır. Herhangi türde bir ağ ya da iletişim ağı bir graf ile modellenebilir. Ağlardaki işlemciler graflardaki tepelere, bağlantı hatları da ayrıtlara karşılık gelir. Bir ağ tasarımına ihtiyaç duyulduğunda zedelenebilirlik için belirli ölçümler vardır. Bir ağ graf olarak modellenebildiğinden, ağ üzerinde zedelenebilirliği (kararlılığı) incelemek yerine, graf üzerinde incelemeler yapılabilir.

Leonhard Euler tarafından 1736 da yazılan Köningsberg'in Yedi Köprüsü adlı eser, graf teori tarihindeki ilk yazılı eser olarak yerini almaktadır. Ayrıtların ve tepelerin sayısına, konveks polyhedronun yüzeylerine dayanan Euler' in formülü Cauchy ve L.Huillier tarafından çalışılıp ve genelleştirilmiş ve topolojinin başlangıcında yer almıştır. Euler' in Köningsberg Köprüleri adlı eserinden yaklaşık bir asır sonra Listing topolojiyi tanıtırken, Cayley diferansiyel hesaplamadan grafların özel bir sınıfı olan ağaçlara uzanan önemli analitik formda çalışmalara önderlik etmiştir. Bu çalışma teorik kimyada yer almıştır. Graf teoride bir çok problem sınıfı modern dünyada kendine yer bulmuştur. Bunlardan bazıları örtü kümesi problemi, gezgin satıcı problemi, baskın küme problemi, ayrıt boyama ve tepe boyamadır.

Graf bir ikili bağıntının özel bir gösterilim şeklidir. Bir *G* grafı, *V* tepeler ve *E* ayrıtlar kümesini göstermek üzere, *G=(V, E)* biçiminde ifade edilir. Graflar birleştirilmiş ve birleştirilmemiş olmak üzere iki genel sınıfa ayrılmaktadır. İletişim ağları birleştirilmiş graflarla modellenebilirler. Bir grafın zedelenebilirliği, graftan belirli sayıda tepe ya da ayrıt çıkarıldıktan sonra grafın bazı özelliklerini korumasını belirler. Zedelenebilirlikle ilgili graf teoride pek çok ölçüm çalışılmıştır. Bunlar; connectivity (bağlantılılık), edge connectivity (ayrıt bağlantılılık), toughness (sağlamlık), integrity (bütünlük), tenacity, neighbour-integrity (komşu bütünlük) olarak isimlendirilmişlerdir. Neighbour integrity, grafta bir tepenin komşulukları ile birlikte dikkate alındığı bir ölçümdür. Ancak yukarıda sözü edilen zedelenebilirlik ölçümleri grafın tüm tepeler ya da ayrıtlar kümesi üzerinden tanımlanırlar. (**Barefoot, C. A.- Entringer, R.- Swart, H.,** 1987) Oysa günümüzde bir grafın tüm tepeleri üzerinden ölçümler yapmak yerine grafın belirli özellikteki tepeleri üzerinden ölçümler yapmanın daha elverişli olduğu düşünülmektedir. Bunlardan bir tanesi grafın baskın kümeleri kullanılarak hesaplanan Total Redundance adlı ölçümdür. (**Goddard W.**, 1999) Komşuluk kavramını kullanarak bir grafın erişilebilirlik (accesibility) sayısı da tanımlanmış ve elde edilen sonuçlar yayınlanmıştır. (**Dündar, P**., 2001). Bu ölçüme benzer şekilde grafın erişilebilir (accessible) tepeleri aracılığında hesaplanan Total Accesibility (toplam erişilebilirlik) sayısını bu çalışmada tanımladık. Total Accesibility değerini temel graflar üzerinde ele aldık. Çalışmamızın 2. bölümünde temel graf bilgilerini, tanımlarını, bazı kararlılık ölçümlerini ve bunların temel graf sınıfları ile ilişkisini hesapladık. 3. bölümde Total Redundance tanımını ve bu tanımın temel graf sınıflarındaki sonuçlarını ve

Total Redundance ile graf işlemleri arasındaki ilişkileri verdik. 4. bölümde bizim oluşturduğumuz Total Accessibility (toplam erişilebilirlik) tanımını, bu kavramın temel graf sınıflarındaki sonuçlarını ve graf işlemleri ile olan ilişkisini araştırdık ve elde edilen bilgileri sunduk. 5. bölümde birleştirilmiş bir G grafının toplam erişilebilirlik (Total Accessibility) değerini G grafının bitişiklik matrisini kullanarak bulan bir algoritma verdik. Bu bilgiler göz önüne alınarak; tepe sayısı aynı olan iki farklı graf karşılaştırıldığında Total Accessibility (toplam erişilebilirlik) değeri büyük olan grafın, bir başka deyişle iletişim ağının, seçilmesinin diğerine göre daha kararlı olduğu sonucuna vardık.

2. GRAF SINIFLARI ve GRAFLARDA ÖLÇÜMLER

2.1 Temel Graf Bilgileri

Graf teoride ölçümler öncelikle temel graflar üzerinde çalışılıp daha sonra genelleme yapılmaktadır. Temel grafların belli özellikleri kullanılarak herhangi türde bir graf ile aralarında ilişki kurulmaktadır. Bu şekilde izlenilen yöntem doğruya daha yakın sonuçlar vermekte ve işlemler kısa sürede gerçeklenmektedir. Aşağıda temel graf sınıfları tanımlanmıştır.(**West D.B.,** (2001)). u ve v tepeleri ile tanımlı e ayrıtı $e=(u, v)$ biçiminde gösterilir. u ve v'ye e ayrıtının uç tepeleri denir. Bir ayrıtın uç tepeleri olan iki tepeye bitişik tepeler adı verilir. Aşağıda yer alan tanımlar Distance in Graphs **(Fred B., Frank H. 1989)** adlı kitaptan alınmıştır.

Tanım 2.1.1: Her $e_i=v_{i-1}v_i$ G grafının $(1 \leq i \leq n)$ bir ayrıtı olmak üzere, tepelerin ve ayrıtların bir sıralı dizisi $v_0,e_1,v_1,e_2,\ldots,v_{n-1},e_n,v_n$ bir yürüyüştür. v_0-v_n tepelerini birleştiren bir yürüyüş, bir v_0, v_n **yürüyüş**ü olarak adlandırılır. Bir yürüyüşteki ayrıtların sayısı o yürüyüşün uzunluğunu verir.

Tanım 2.1.2: Tüm ayrıtları birbirinden farklı olan bir yürüyüşe bir **zincir** denir. Bir zincirde bir tepeden birden fazla geçilebilir.

Tanım 2.1.3: Tüm ayrıtları ve tüm tepeleri farklı olan bir yürüyüş bir **yol**dur. n tepeli bir yolda ayrıt sayısı n-1 dir.

Tanım 2.1.4: Bir G grafında tüm tepe çiftleri için bu tepe çiftini birbirine bağlayan bir yol varsa G grafı **birleştirilmiştir** (connected) denir.

Tanım 2.1.5: Bir $G\ (V,\ E)$ grafının bazı ayrıt ve tepelerinden $V' \subset V$ ve $E' \subset E$ olmak üzere $H(V^{'},\ E^{'})$ ile tanımlı graf G nin bir alt grafıdır.

Tanım 2.1.6: Bir $G\ (V,\ E)$ grafından $V'=V$ ve $E' \subset E$ olmak üzere tanımlanan $H\ (V^{'},\ E)$ alt grafı G grafının bir **dallanmış (spanning) alt grafı** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.7: Bir $G\ (V,\ E)$ grafı için $V' \subset V$ olsun. $\forall u,v \in V^{'}$ için $uv \in E$ varsa bu ayrıtları içeren E' ayrıt kümesine ve V' tepeler kümesine sahip $H(V^{'},\ E)$ alt grafı G grafının **etkilenmiş alt grafı (induced subgraph)** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.8: Bir G grafında herhangi bir $v \in V$ tepesinin derecesi, o tepenin bitişik olduğun ayrıtların (tepelerin) sayısıdır ve $deg(v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9: $r \in Z^{+}$ olmak üzere bir G grafında $\forall v \in V$ için $deg(v)=r$ ise G grafı r-regüler' dir.

Tanım 2.1.10: Bir grafın tepe derecelerinin en küçüğüne **grafın minimum tepe derecesi** denir ve $\delta(G)$, G grafının minimum tepe derecesini gösterir.

Tanım 2.1.11: Bir grafın tepe derecelerinin en büyüğüne **grafın maksimum tepe derecesi** denir ve $\Delta(G)$ G grafının maksimum tepe derecesini gösterir.

Tanım 2.1.12: Birleştirilmiş bir G grafında herhangi u,v tepeleri arasındaki uzaklık, u ile v tepelerini birbirine bağlayan en kısa yolun uzunluğudur ve $d(u,\ v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13: Birleştirilmiş bir *G* grafında bir *u* tepesinin **eccentricity** değeri *e(u), u* tepesine en uzak olan tepe ile arasındaki uzaklık değeri olarak tanımlıdır. $e(u)=\max\{d(u, v): u \in V(G)\}$ olarak belirtilir.

Tanım 2.1.14: Bir *G* grafının **çapı**, graftaki tüm tepelerin eccentricity değerlerinin en büyüğüdür. $d(G)=\max\{e(u): u \in V(G)\}$ olarak ifade edilir.

Tanım 2.1.15: Bir *G* grafının **yarıçapı**, graftaki tüm tepelerin eccentricity değerlerinin en küçüğüdür. $r(G)=\min\{e(u): u \in V(G)\}$ olarak ifade edilir.

Tanım 2.1.16: Birleştirilmiş bir *G* grafındaki bir *u* tepesi için $e(u)=r(G)$ oluyorsa *u* tepesi **merkez tepe (central vertex)** olarak adlandırılır. *G* grafının tüm merkez tepelerinin kümesi *C(G)* ile gösterilir

Tanım 2.1.17: Bir *G* grafının bazı tepelerinin veya ayrıtlarının çıkarılmasıyla elde edilen graf en az iki parçadan oluşuyorsa bu parçaların her birine grafın bir **bileşeni** adı verilir.

Tanım 2.1.18: Tüm tepeleri birbirinden farklı ve tepe sayısı $n \geq 3$ olan kapalı bir yürüyüş bir **çevre** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.19: Eğer bir *G* grafı birleştirilmiş ve hiçbir çevreye sahip değilse bu graf **çevre içermeyen** (**acyclic)** bir graftır.

Tanım 2.1.20: Ağaç birleştirilmiş **çevre içermeyen (acyclic)** bir graftır.

Tanım 2.1.21: Bir *G(V, E)* grafının bir *H* dallanmış (spanning) alt grafı çevre içermiyorsa *H* grafı *G* grafının bir **dallanmış (spanning) ağacı** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.22: n sayıda tepeye sahip bir $G(V, E)$ grafının ayrıtlar kümesi tüm tepe ikililerini içeriyorsa bu graf **tam graf (complete graph)** olarak adlandırılır ve K_n ile gösterilir.

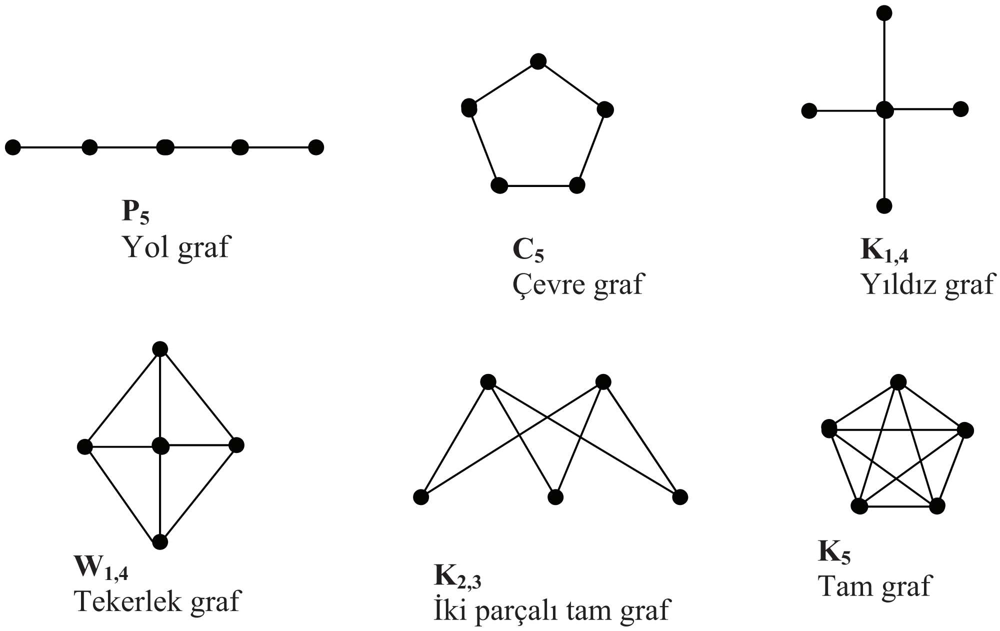
Tanım 2.1.23: Bir $G(V, E)$ grafının tepeler kümesi $V=V_1$ U V_2 ve $V_1 \cap V_2 = \phi$ ve E ayrıtlar kümesinin her bir uv ayrıtı $\exists u \in V_1$ ve $\exists v \in V_2$ den oluşuyorsa ve G grafı birleştirilmiş ise G grafı **iki parçalı (bipartite) graf** olarak adlandırılır

Tanım 2.1.24: Bir $G(V, E)$ grafının tepeler kümesi $V=V_1$ U V_2 ve $V_1 \cap V_2 = \phi$ ve E ayrıtlar kümesinin her bir uv ayrıtı $\forall u \in V_1$ ve $\forall v \in V_2$ den oluşuyorsa G grafı **iki parçalı tam (complete bipartite) graf** olarak adlandırılır ve $K_{m,n}$ ile gösterilir.

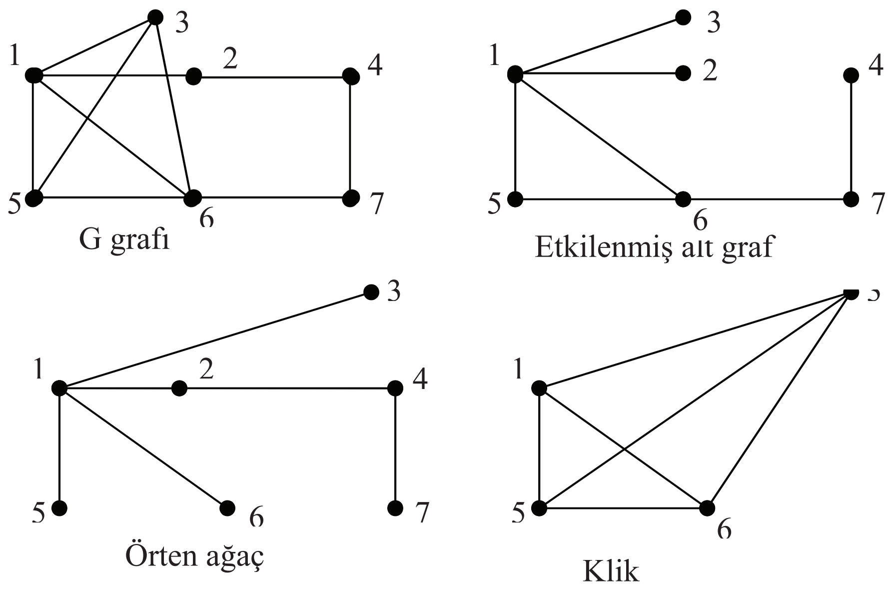
Tanım 2.1.25: Bir k-tam parçalı grafta tepeler kümesi, her bir kümesindeki herhangi iki tepesi bitişik olmayan k tane ayrık kümeye parçalanmıştır. Grafın bu k kümeleri arasındaki her tepe çifti bitişiktir. Eğer grafın tepeler kümesinin k kümelerindeki tepeleri $p, q, \ldots, r$ olarak gösterilirse, bir k-tam parçalı grafı $K_{p, q, \ldots, r}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.26: n tepeli birleştirilmiş bir G grafında n-1 tepe 1.dereceli , bir tepe n-1 dereceli ise bu graf **yıldız (star) graf** adını alır ve $K_{1,n-1}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.27: Bir G grafının alt graflarından tam graf olanlar içersinden, en büyük tam graf G grafında bir **klik (clique)** olarak adlandırılır.



Şekil 2.1 28 tepeli temel graflar



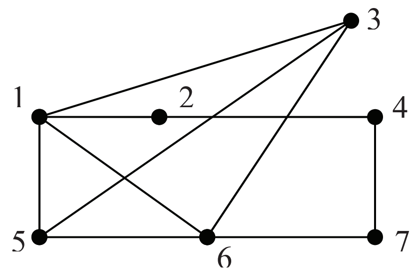
Şekil 2.1.29 tepeli bir G grafı ve bazı alt grafları

Tanım 2.1.30: *n* tepeli birleştirilmiş bir *G* grafında, bir tepenin derecesi *n-1*, geri kalan *n*-1 tane tepenin her birinin derecesi 3 ise bu graf **tekerlek graf** adını alır ve $W_{1,n-1}$ ile gösterilir.Aşağıda bazı temel graf türlerinin ait şekiller verilmektedir.

Tanım 2.1.31: *G* grafının bir $S \subset V$ alt kümesi olsun. *S* kümesindeki herhangi iki tepe bitişik değilse *S* kümesi *G* grafının bir bağımsız kümesidir. *G* grafının maksimum sayıda elemana sahip bir bağımsız kümesinin eleman sayısı bu grafın bağımsızlık sayısını verir ve $\beta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.32: *G* grafının bir $S \subset V$ alt kümesi için, *G* grafındaki her bir ayrıtın en az bir ucu *S* kümesinde ise *S* kümesi *G* grafının bir örtü kümesidir. *G* grafının minimum sayıda elemana sahip bir örtü kümesindeki tepelerin sayısı *G* grafının örtü sayısı olarak adlandırılır ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.33: Her *G* grafı için $\alpha(G)+\beta(G)$=*n*' dir.



Şekil 2.1.34 G grafı ve G grafının $\beta(G)$ ve $\alpha(G)$ değerleri:

B={2, 3, 7} $\beta(G)$=|B|=3 olur.

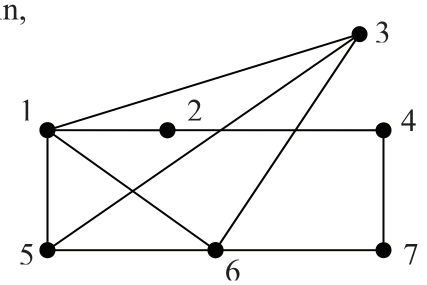
A={1,3,6,4} $\alpha(G)$=|A|=4 olur.

G grafı için $\alpha(G)+\beta(G)$=3+4=7=*n* olduğu görülür.

Tanım 2.1.35: $S \subset V$ olmak üzere G grafındaki her bir tepe ya S kümesindeki bir tepeye bitişik ya da S kümesine ait ise, bu S kümesi G grafının bir tepe baskın (dominance) kümesidir. Bu baskın kümeler içersinden minimum sayıda elemana sahip olan kümenin eleman sayısı G grafının baskınlık (dominating) sayısını verir ve $\sigma(G)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.36: Her G grafı için $\sigma(G) \leq \beta(G)$' dir.

Örneğin,



Şekil 2.1.37 7 tepeli bir G grafı için baskınlık sayısı:

B_1={2, 3, 7}
B_2={1, 7}

B_3={4, 5}

$\sigma(G)=min\{|B_1|, |B_2|, |B_3|\}=2$ elde edilir.

Tanım 2.1.38 Bir Grafın Bitişiklik Matrisi

n tepeye sahip bir *G* grafının tepeleri $v_1, v_2, ..., v_n$ olarak etiketlensin. *G* grafının bitişiklik(adjacency) matrisi $A=A(G)=[a_{ij}]$ nxn türünde bir binary (terimleri 0 veya 1 olan) matristir. A matrisinin satır ve sütunları grafın tepelerine karşılık gelir ve aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{eğer } v_i \text{ ve } v_j \text{ tepeleri bitişik ise} \\ 0 & , \text{eğer } v_i \text{ ve } v_j \text{ tepeleri bitişik değilse} \end{cases}$$

Tanım 2.1.39 Komşuluk Matrisi

n tepeye *m* ayrıta sahip bir *G* grafının tepeleri $v_1, v_2, ..., v_n$ olarak ve ayrıtları da $e_1, e_2, ..., e_m$ olarak etiketlensin. *G* grafının komşuluk (incidence) $B(G)=[b_{ij}]$ ile gösterilen tepe ayrıt matrisidir ve aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & , v_i \text{ tepesi } e_j \text{ ayrıtına bitişik ise} \\ 0 & , v_i \text{ tepesi } e_j \text{ ayrıtına bitişik değilse} \end{cases}$$

2.2 Zedelenebilirlik Ölçümleri

Herhangi bir ağ üzerinde tanımlanan kavramların önemlilerinden birisi zedelenebilirliktir. Bir ağ tasarımına ihtiyaç duyulduğunda göz önüne alınacak olan bu zedelenebilirlik kavramı için belirli ölçümlere gerek duyulmuştur. Bir ağ graf olarak modellenebildiğinden, ağ üzerinde bu zedelenebilirlik ölçümlerini incelemek yerine, graf üzerinde incelemeler yapılabilir. Bağlantılılık (connectivity), ayrıt bağlantılılık (edge connectivity), bütünlük (integrity), komşu bütünlük (neighbour-integrity), tenacity, toughness bu ölçümlerden bazıları olarak bilinmektedir.(**M. Cozzens, D. Moazzami, S. Stueckle**, (1995), **Bagga, K.S. and Deogun, J.S**., (1995), **Bagga, K.S.- Beineke, L.W - Pippert, R.E**., (1994), **Bagga, K.S. - Beineke, L.W. - Pippert, R. E.,** (1992), **Barefoot, C. A.- Entringer, R.- Swart, H.,** (1987), **Cozzens M.,- S. Wu,** (1997)). Bu ölçümlerden, örneğin komşu bütünlük (neighbour integrity) graflardaki komşuluk kavramı kullanılarak oluşturulmuştur. Graflarda iki türde komşuluk söz konusudur: kapalı komşuluk ve açık komşuluk. Birleştirilmiş bir *G* grafında herhangi bir $v \in V$ için bu *v* tepesine bir ayrıt ile bitişik olan tepeler *v* tepesinin komşuları olarak adlandırılır, *v* tepesine komşu tepelerin oluşturduğu küme *v* tepesinin **açık**

komşuluğu'dur ve *N(v)* ile gösterilir. *G* grafının herhangi bir $v \in V$ tepesi için v tepesinin **kapalı komşuluğu** $\{v \cup N(v)\}$ olarak tanımlıdır ve *N[v]* ile gösterilir.

Graflardaki zedelenebilirlik ölçümlerinden çok çalışılan ve bilinenleri aşağıda verilmiştir.

m(G-S); *G* grafından $S \subseteq V$ kümesi çıkarıldığında geri kalan en büyük bileşenin tepe sayısı olmak üzere:

Tanım 2.2.1: Birleştirilmiş bir *G* grafını birleştirilmemiş yapmak veya izole tepe bırakmak için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın **bağlantılılık (connectivity) değeri** denir ve *k(G)* ile gösterilir. $S \subseteq V$ olmak üzere, *G-S* bağlantısız veya *G-S* izole tepe iken $k(G) = \min\{|S|, S \subseteq V\}$ dir.

Tanım 2.2.2: Bir *G* grafı için **toughness** $t(G) = \min\limits_{S \subseteq V} \left\{ \dfrac{|S|}{m(G-S)} \right\}$ olarak tanımlıdır.

Tanım 2.2.3: Bir *G* grafının **integrity (bütünlük) değeri** *I(G)* ile gösterilir. $I(G) = \min\limits_{S \subseteq V} \{|S| + m(G-S)\}$, biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.2.4: Bir *G* grafı için $S \subseteq V$ ve *K(G-S)*, *G-S* grafının bileşen sayısı olmak üzere, bir grafın **tenacity** aşağıdaki biçimde tanımlıdır.

$$T(G) = \min_{S \subseteq V} \left\{ \frac{|S| + m(G-S)}{K(G-S)} \right\}$$

Tanım 2.2.5: Bir G grafında herhangi u tepesi için, eğer u tepesinin $N[u]$ kapalı komşuluğu G den çıkarılırsa, u tepesi subverted edilmiştir denir. Eğer bir S kümesindeki her bir tepe G den subverted edilmiş ise, $S=\{u_1,u_2,...,u_m\}$ kümesi G nin bir tepe subversion stratejisidir. Kabul edelim ki $G-S$, S kümesindeki her bir tepe G den subverted edildikten sonra geriye kalan graf birleştirilmemiş, klik ya da boş graf olsun. G'nin **komşu-bütünlük değeri (neighbour-integrity),**

$NI(G)=\min_{S\subseteq V}\{|S|+m(G-S)\}$, olarak tanımlıdır.

Tanım 2.2.6: Bir G grafı için binding, $N(S)\neq V$ $S\neq\varnothing$ ve $N(S)$, S kümesinin en az bir tepesine bitişik G grafının tüm tepelerini içeren S kümesinin komşuluğu olmak üzere $b(G)=\min_{S\subset V}\left\{\dfrac{N(S)}{|S|}\right\}$ olarak belirlenir.

Tanım 2.2.7: Bir G grafının **ayrıt-bağlantılılık (edge connectivity)** değeri, graftan çıkarıldıklarında grafı birleştirilmemiş yapıya dönüştüren ayrıtların minimum sayısıdır ve $\kappa'(G)$ olarak gösterilir.

Tanım 2.2.8: Bir G grafı için $S\subseteq E$ olmak üzere G grafının **ayrıt-bütünlük (edge-integrity) değeri,** $I'(G)=\min_{S\subseteq E}\{|S|+m(G-S)\}$'dir.

Tanım 2.2.9: Bir G grafında $T=\{e_1,e_2,...,e_r\}$ E ayrıtlar kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer geri kalan G-T alt grafı ayrık, bir tepeli veya boş graf ise, T bir ayrıt kesim stratejisi olarak adlandırılır, G grafının **ayrıt-komşu bağlantılılık (edge-neighbour-connectivity) değeri** G grafının T ayrıt kesim stratejileri içinden minimum sayıda tepeye sahip olanıdır.

3. TOTAL REDUNDANCE ve GRAFLAR ÜZERİNDEKİ HESAPLAMALARI

Bölüm 2' de verilen zedelenebilirlik ölçümleri grafın tüm tepeler kümesi üzerinden tanımlanırken, bu bölümde verilecek olan ölçümler ise belirli özelliği sağlayan tepeler kümesi esas alınarak tanımlanmışlardır.

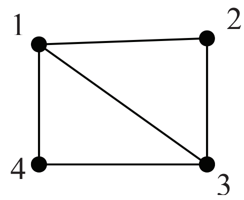
Tanım 3.1: Bir grafın Total Redundance değeri

$$TR(G) = \min\left\{\sum_{v\in S}(1+\deg(v)) \ : S\subseteq V \quad ve \quad \left|N\left[x\right]\cap S\right|\geq 1 \quad \forall x\in V\right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada S kümesi G grafının dominating (baskın) kümelerinden bu ifadeyi minimum yapan küme olarak seçilmektedir. (**Goddart, W., Oellermann, O., Slater R., , J. Peter, Swart, Henda C.,**2000)

Örnek:



Şekil 3.1 4 tepeli G grafının Total Redundance değeri:

S1={1} *TR(G)*=min{1+deg(1)}=1+3=4

S2={2} *TR(G)*=min{1+deg(2)}=1+2=3

Bu durumda *TR(G)*=3 olur.

Teorem 3.2: Eğer G grafı r-regüler ise $TR(G) = \sigma(G)(r+1)$'dir. (**Goddart, W., Oellermann, O., Slater R., , J. Peter, Swart, Henda C.,**2000)

Belirli graf türleri P_n , C_n , $K_{1,n-1}$, K_m, $K_{m,n}$, $K_{m,n,q,r}$ için bu değerler, grafın dominating sayısına bağlı olarak hesaplanmış ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. (Kılıç E., Dündar P.)

Teorem 3.3: P_n yol grafı için, n tepe sayısı ve σ baskınlık (dominating) sayısı olmak üzere,

$$TR(P_n) = \begin{cases} 3\sigma & , \quad n = 3k \quad , \quad k = \sigma \\ 3\sigma - 2 & , \quad n = 3k+1, \quad k = \sigma - 1 \\ 3\sigma - 1 & , \quad n = 3k+2, \quad k = \sigma - 1 \end{cases}$$

İspat: P_n grafının baskın (dominance) kümesi için V' den bir tepe ele alındığında, bu tepe kendisi dahil olmak üzere en fazla 3 tane tepeyi bastırır (domine eder). Bu durumda mod 3'e göre inceleme yapmak gereklidir.

- Grafın tepe sayısı n=3k olsun. $TR(G) = \min\left\{\sum_{v \in S}(1 + deg(v))\right\}$ tanımından seçilecek v tepelerinin sayısı $\frac{n}{3}$ olur. Grafın baskınlık (dominating) sayısı $\sigma = \frac{n}{3}$ dir. Bu durumda seçilen her tepe bir iç tepe olacaktır ve her seçilen her v tepesi için $deg(v)$=2 dir. Buradan TR tanımı kullanılarak $TR(P_{3k})$=3σ elde edilir.

- Grafın tepe sayısı n=3k+1 olsun. Yani bastırılmayan (domine edilemeyen) 1 tepe var olsun. Sonuç olarak bu tepe sadece kendini bastıracaktır. Bu tepe, bir uç tepe olacaktır ve derecesi ise $deg(v)$=1 dir. Bu durumda *TR* değerinin tanımından $TR(G) = \min\left\{\sum_{v\in S}(1+deg(v))\right\}$den seçilecek v tepelerinin sayısı $\frac{n}{3}$ olur. Grafın baskınlık (dominating sayısı) $\sigma = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ dir. Ancak burada bu *v* tepesi için fazladan 2 tane olmayan tepe bastırılmış (domine edilmiş) olur. Bu nedenle *TR* tanımı kullanılarak $TR(P_{3k+1})=3\sigma-2$ olarak hesaplanır.

- Grafın tepe sayısı $n=3k+2$ olsun. Yani bastırılmayan (domine edilemeyen) 2 tepe var olsun. Sonuç olarak bu tepelerden biri seçildiğinde, seçilen bu tepe kendini ve diğer tepeyi bastırır. Grafın baskınlık (dominating) sayısı $\sigma = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ dir. Ancak *TR* tanımından geri kalan tepelerin ikisi de uç tepelerden alınırsa, tepe dereceleri azalacağından, *TR* değeri daha da küçülür. Bu nedenle fazladan bu tepeler için 1 er tepe domine edildiğinden

  $TR(P_{3k+2})=3\sigma-1$ olarak hesaplanır.

Teorem 3.4: C_n çevre grafı için $TR(C_n) = 3.\sigma(C_n)$

İspat: Çevre grafta her bir tepe kendisi dahil olmak üzere 3 tepeyi domine eder. Bu durumda seçilebilecek tüm baskın (dominance) kümeler için deg(v) değerleri aynı olacağından baskın (dominance) kümeyi bulmak yeterlidir. Buradan $TR(C_n) = 3.\sigma(C_n)$ elde edilir.

Teorem 3.5: $K_{1,n-1}$ star grafı için

$TR(K_{1,n-1}) = \sigma(K_{1,n-1}) + n$

İspat: *TR* değerinin tanımından minimum değer için az sayıda ve az dereceye sahip tepe seçilmelidir. $K_{1,n}$ star grafı için derecesi n olan tepe veya derecesi 1 olan tepelerin hepsinin seçilmesi gibi iki durum söz konusudur.

Durum1. Derecesi n olan merkez tepe seçilirse, geri kalan tüm tepeler bu tepe tarafından bastırılmış olur ve *TR* değeri n+1 olarak bulunur.

Durum2. Derecesi 1 olan tepelerin hepsi alınmalıdır. Böylece 1 dereceli n tane tepe olduğundan ve *TR* nin tanımından $1.n+n=2n$ elde edilir.

$n+1<2n$ den $TR(K_{1,n}) = \sigma(K_{1,n}) \;+\; n$ sonucu elde edilir.

Teorem 3.6: K_m tam grafı için $TR(K_m) = m$ dir.

İspat: Tam graf tanımından $\forall v \in V(G)$ tepesi geri kalan $V - v$ kümesindeki her bir u tepesi ile bitişiktir. Bu durumda K_m grafının her bir baskın (dominance) kümesi sadece bir u tepesinden oluşmaktadır. m tepeli bir tam grafta her v tepesi için deg(v)=m-1'dir. *TR* nin tanımından $\min\left\{\sum_{v\in S}(1+\deg(v))\right\}$ ifadesinde 1+m-1 den $TR(K_m)=m$ olarak bulunur.

Teorem 3.7: $K_{m,n}$ tam iki parçalı (complete bipartite) grafı için $TR(K_{m,n}) = 2+m+n$ dir.

İspat: $m<n$ olmak üzere $K_{m,n}$ grafında m tane tepe n dereceli ve n tane tepe m derecelidir. *TR* tanımında $\min\left\{\sum_{v\in S}(1+\deg(v))\right\}$ de baskın (dominance) kümeden tepeleri seçmek gereklidir. Burada tepe derecesinin küçük olması da göz önüne alındığında deg(v)=m olan bir tepe ile başlanılır. Bu tepe kendisi dahil m+1 tane tepeyi bastırır. Geri kalan $m+n-m-1=n-1$ tepeyi

bastırmak için ve $K_{m,n}$' nin tanımından dolayı deg(v)=n olan bir diğer tepe seçilmelidir. Bu seçilen tepede kendisi ile beraber n+1 tepeyi bastırır. Ancak seçilen bu tepe daha önceden bastırıldığından aslında n-1 tepenin tamamı bastırılmış olur. TR de bu seçilen iki tepeden dolayı 1+m+1+n=2+m+n olarak bulunur.

Teorem 3.8: $K_{m,n,q,r}$ parçalı grafı için

$m=p_1$, $n=p_2$, $q=p_3$, $r=p_4$ olarak indisli biçimde seçilmek üzere,

$$TR(K_{m,n,p,q}) = \sum_{i=1}^{4} p_i + \sum_{i=1}^{2} p_i + 2 \quad TR(K_{p_1,p_2,p_3,p_4}) = \sum_{i=1}^{4} p_i + \sum_{i=1}^{2} p_i + 2 \text{ dir.}$$

İspat: $m<n<q<r$ olmak üzere $K_{m,n,q,r}$ grafında m tane tepe $n+q+r$ dereceli ve r tane tepe $m+n+q$ derecelidir. TR tanımında $\min\left\{\sum_{v\in S}(1+\deg(v))\right\}$ de baskın (dominance) kümeden tepeleri seçmek gereklidir. Burada tepe derecesinin küçük olması da göz önüne alındığında $deg(v)=m+n+q$ olan bir tepe ile başlanılır. Bu tepe kendisi dahil $m+n+q+1$ tane tepeyi bastırır. Geri kalan $m+n+q+r-(m+n+q+1) = r-1$ tepeyi bastırmak için ve $K_{m,n,q,r}$ grafının tanımından dolayı $deg(v)=m+n+r$ olan bir diğer tepe seçilmelidir. Bu seçilen tepede kendisi ile beraber $m+n+r+1$ tepeyi bastırır. Ancak seçilen bu tepe daha önceden bastırıldığından aslında n-1 tepenin tamamı bastırılmış olur. Seçilen iki tepeden $TR=(1+m+n+q)+(m+n+r+1)=m+n+q+r+(m+n)+2$ olarak bulunur.

Teorem 3.9: $K_{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n}$ n parçalı (n-partite) grafı için

$$TR(K_{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n}) = \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{n-2} p_i + 2 \text{ dir.}$$

İspat: Teorem 3.8 deki ispata benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.10: n boyutlu bir Q_n küpü için $TR(Q_n)=\sigma(Q_n)(n+1)$ dir.

İspat: Q_n hypercube grafı her tepesi n dereceye sahip n-regüler bir graftır. Dolasıyla Q_n grafının baskınlık (dominating) sayısını belirlemek Total Redundance değerini hesaplarken yeterli olacaktır. Her tepesinin derecesi n olduğundan baskın (dominance) kümedeki eleman sayısı kadar n ve TR tanımından bu kümedeki her tepe için 1 değeri gelecektir. Bu durumda $TR(Q_n)=\sigma(Q_n).n+\sigma(Q_n).1=\sigma(Q_n)(n+1)$ olur.

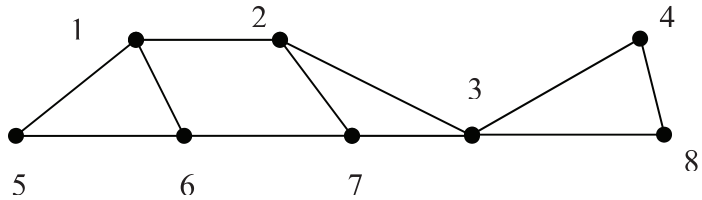
4. TOTAL ACCESSIBILITY ve GRAF İŞLEMLERİ ALTINDA HESAPLAMALAR

4.1 Accessibility

Son yıllarda graf teoride zedelenebilirlik ölçümlerinin, belirli özelliğe sahip tüm tepe ya da ayrıt alt kümeleri üzerinden tanımlanarak kullanılması düşüncesi kabul görmektedir. Örnek verecek olursak total bağlantılılık (connectivity), total uzaklık (distance), total baskınlık (domination) ve total redundance bunlardan bazılarıdır. Total Redundance tanımından esinlenerek, $S \subset V$ kümesini accessible alt kümelerden seçerek Total Accessibility tanımlanmıştır. Bu bölümde Total Accessbility tanımına geçmeden, bir G grafının accessibility değeri tanımı verilmiş ve daha önce elde edilmiş temel graf türleri üzerindeki genel teoremler ve sonuçları belirtilmiştir. (**Dündar P.,** 2000) Yeni tanım accessibility kavramı üzerine dayandırılmıştır. Accessibility bir *G* grafında, bitişik olmayan herhangi iki tepe arasında bir başka tepe aracığında erişim sağlamayı hedefleyen komşuluk ilişkisine dayalı bir kavramdır.

Tanım 4.1.1: *G=(V, E)* olmak üzere $\forall x \in \{V - S\}$ için , x tepesi *S* kümesine, *N(S)*' ye veya *N[S]*' ye komşu ise, $S \subset V$ kümesi *G* grafının bir accessible kümesidir. Accessibility sayısı *G* grafının tüm *S* accessible kümeleri içinden minimum elemanlı kümenin eleman sayısıdır ve $\eta(G)$ olarak gösterilir.(**Dündar P.,** 2000), (**Dündar P**., **Aytaç A.** 2005)

Örnek:



Şekil 4.1.2 Birleştirilmiş bir G grafı ve Accessibility sayısı:

AS_1={1, 4}

AS_2={6,8}

AS_3={7}

$\eta(G)$=min{$|AS_1|$, $|AS_2|$, $|AS_3|$}=1 elde edilir.

Accessibility sayısı ile ilgili bazı sonuç ve teorem 4.1.9, teorem 4.1.10, teorem 4.1.11, teorem 4.1.12, teorem 4.1.13 (**Dündar P.,** 2000) tarafından verilmiştir.

Sonuç 4.1.3: n tepeli P_n grafı için $\eta(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1$ dir.

Sonuç 4.1.4: n tepeli C_n grafı için $\eta(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1$ dir.

Sonuç 4.1.5: K_n n tepeli bir tam graf olsun. $\eta(K_n) = 1$ dir.

Sonuç 4.1.6: $K_{1,n}$ n+1 tepeli bir star graf olsun. $\eta(K_{1,n}) = 1$ dir.

Sonuç 4.1.7: $K_{m,n}$ $m+n$ tepeli bir tam iki parçalı (complete bipartite) graf olsun. $\eta(K_{m,n})=1$ dir.

Sonuç 4.1.8: $W_{1,n}$ $n+1$ tepeli bir tekerlek graf olsun. $\eta(W_{1,n})=1$ dir.

Teorem 4.1.9: Eğer G grafı bir dallanmış (spanning) alt graf olarak bir starı içeriyorsa $\eta(G)=1$ dir.

Teorem 4.1.10: G grafının her bir accessible kümesi, bir bağımsızlık (independent) kümesi, bir örtü (cover) kümesi veya bir baskın (dominance) kümesidir.

Teorem 4.1.11: G birleştirilmiş bir graf olsun ve $\beta(G)$ G grafının bağımsızlık sayısı olmak üzere, $\eta(G)\leq\beta(G)$ dir.

Teorem 4.1.12: G birleştirilmiş bir graf olsun ve $\alpha(G)$ G grafının örtü sayısı olmak üzere, $\eta(G)\leq\alpha(G)$ dir.

Teorem 4.1.13: G birleştirilmiş bir graf olsun ve $\sigma(G)$ G grafının baskınlık (dominating) sayısı olmak üzere, $\eta(G)\leq\sigma(G)$ dir.

4.2 Total Accessibility

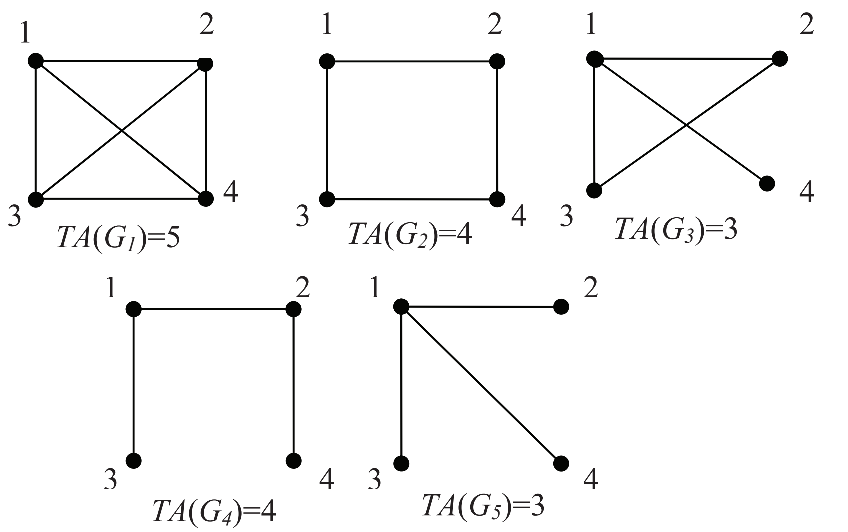
Bu bölümde bir grafın Total Accessibility (toplam erişilebilirlik) değeri tanımlanarak üzerinde çalışılmıştır.

Tanım 4.2.1: Bir G birleştirilmiş grafının Total Accessibility (toplam erişilebilirlik) değeri

$$TA(G) = \min\left\{\sum_{v\in S}(2+\deg(v)):\ S\subseteq V\quad ve\quad \left|N\left[x\right]\cap N[S]\right|\leq 1\ \ \forall\, x\in V\right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada S kümesi G grafının accesible kümelerinden bu toplam ifadeyi minimum yapan küme olarak. Bu tanımda S yerine $N[S]$ alınmasının nedeni accessibility (erişilebilirlik) tanımından kaynaklanmaktadır. Accessibility (erişilebilirlik) tanımına göre alınan herhangi bir tepe S ye ve S kümesinin komşuluğuna bitişik olmalıdır. Burada $|N[x]\cap N[S]|\leq 1$ ifadesi, S kümesindeki farklı her u-v tepe çifti için, u-v arasındaki uzaklığın en az 3 olmasını belirtmektedir.



Şekil 4.2.2 4 tepeli bazı G grafları ve Total Accessibility değerleri

Şekil 4.2.2' de verilen graflar için sırayla Total Accessibility (toplam erişilebilirlik) değerlerini hesaplanırsa,

AS(G_1)= {1} TA(G1)=deg(1)+2=3+2=5

AS(G_2)= {1} TA(G_2)=deg(1)+2=2+2=4

AS(G_3)= {4} TA(G_3)=deg(4)+2=1+2=3

AS(G_4)= {3} TA(G_4)=deg(3)+2=1+2=3

AS(G_5)= {2} TA(G_5)=deg(2)+2=1+2=3

elde edilir.

Teorem 4.2.3: Bir G grafında eğer $rad[G] \leq 4$ ise X merkez tepelerin kümesi (Bkz. Tanım 2.1.16) olmak üzere $TA(G) = \sum_{v \in X} \deg(v)$ dır.

İspat: Bir grafın yarı çapının 4 e eşit ve küçük olması, bu grafın erişilebilirlik değerinin merkez tepe sayısı ile belirlenebildiğini gösterir. Çünkü erişilebilirlik (accessibility) tanımında 2 uzaklıklı olan tepeler incelenmektedir. TA değerini hesaplayacağımız küme grafın merkez tepelerden oluşur. Burada seçilen tepelerin her biri bir merkez tepedir.

Teorem 4.2.4: Eğer G grafı r-regüler ise $TA(G) = \eta(G)(r+2)$'dir.

İspat: Bir grafın regüler olmasından erişilebilir (accessible) kümeleri içinden en küçük kardinaliteye sahip olanı seçmek önem taşır. Bu durumda grafın accessibility (erişilebilirlik) sayısı bulunursa, her tepe aynı dereceli olduğundan total accessibility (toplam erişilebilirlik) değeri $TA(G) = \eta(G)(r+2)$ olarak hesaplanır.

Belirli graf türleri için bu değerler grafın accessibility (erişilebilirlik) sayısına bağlı olarak hesaplanmış ve sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.2.5: P_n yol grafı için

$$TA(P_n)=\begin{cases}4\eta(P_n), & n\equiv 0,\ 4 \pmod 5\\ 4\eta(P_n)-1, & n\equiv 2,\ 3 \pmod 5\\ 4\eta(P_{n-1})-2, & n\equiv 1 \pmod 5\end{cases}$$

dir.

İspat: η' in tanımından her v tepesi kendisi dışında 4 tepe ile komşuluk ilişkisi içindedir bu nedenle mod 5 e göre inceleme yapılmıştır. n tepe sayısı olmak üzere

- Eğer n=5k ise, TA nın tanımından accessible (erişilebilir) kümeden seçilen her v tepesi için, bu tepeler iç tepe olacağından dereceler toplamından 2k olur. Ayrıca her tepe için tanımdan gelen eklenmekte olan 2 değerinden 2k elde edilir. Sonuç olarak $TA(P_{4k})=4\eta(P_{4k})$ bulunur.

- Eğer n=5k+2 veya n=5k+3 ise, TA nın tanımından accessible (erişilebilir) kümeden seçilen her v tepesi için her tepe iç tepe olacağından dereceler toplamından 2k elde edilir.

- Eğer n=5k+1 ise, TA nın minimum değerini elde etmek için, P_{5k+1} in 1. dereceden olan ilk ve son tepelerini accessible (erişilebilir) kümesine almak gerekir. Bu seçilen tepelerin her biri kendisi ile beraber 3 tepeyi etkiler yani 6 tepe etkilenmiş olur. Geri kalan tepelerin sayısı 5k+1-6 dan 5k_1 olur. Bu kısım için n=5k daki gibi $4\eta(P_{5k_1})$ değeri elde edilir. Bu durumda,

$$\frac{5k+1-6}{5}=\frac{5k+1-5-1}{5}=\frac{5(k-1)}{5}=k-1$$

TA nın tanımından 2(*k*-1)+2(*k*-1)+(2(1+2))=4(*k*-1)+6
=4t-4+6
=4*k*+2 olarak bulunur.

Teorem 4.2.6: C_n çevre grafı için

$TA(C_n) = 4\eta(C_n)$

İspat: C_n çevre grafında her tepe 2 dereceli olacağından, *TA* tanımı gereği seçilecek tepe sayısı önem taşımaktadır. Burada seçilecek accessible (erişilebilir) kümeler içinden minimum sayıda eleman içeren *TA* değerini verecektir. Bu da C_n in accessible sayısıdır. Sonuç olarak her tepe 2 dereceli olduğundan $\eta(C_n)$ tane tepe için $2.\eta(C_n)$ ve *TA* tanımından 2x2x($\eta(C_n)$) den $4.\eta(C_n)$ elde edilir.

Teorem 4.2.7: $K_{m,n}$ tam iki parçalı (complete bipartite) grafı için

$TA(K_{m,n}) = 2 + \min\{m, n\}$ dir.

İspat: $\eta(K_{m,n}) = 1$ dir. (Dündar, 2001). Bu durumda TA değerinin tanımı gereğince seçilecek tepenin derecesi önem taşımaktadır. Bu durumda deg(u)=m veya deg(v)=n olacaktır. $TA(K_{m,n}) = 2 + \min\{m, n\}$ olarak hesaplanır

Teorem 4.2.8: $W_{1,n-1}$ tekerlek grafı için

$TA(W_{1,n-1}) = 5$

İspat: $W_{1,n-1}$ grafı bir dallanmış alt graf olarak star graf içermektedir. Star grafta *TA* minimum değerini uçlardan alınan bir tepe seçildiği anda alır. Bu nedenle tekerlek grafın merkez tepesi dışında seçilen herhangi bir tepesi bu özelliği korur. Tekerlekte merkez tepe dışındaki her tepenin derecesi 3 tür. *TA* nın tanımından $deg(v)+2=3+2=5$ olur.

Teorem 4.2.9: Eğer bir *G* grafının bir dallanmış (spanning) alt grafı bir yıldız (star) graf ise $TA(G)=\delta(G)+2$ 'dir.

İspat: Bir yıldız grafta erişilebilirlik sayısı 1 dir. (Dundar P. 2001) Bu durumda seçilecek olan tepenin derecesi *TA* değerini belirleyecektir. *TA* tanımının minimum olmasından dolayı grafı en küçük tepe derecesini bulmak yeterli olacaktır. Sonuç olarak $TA(G)=\delta(G)+2$ elde edilir.

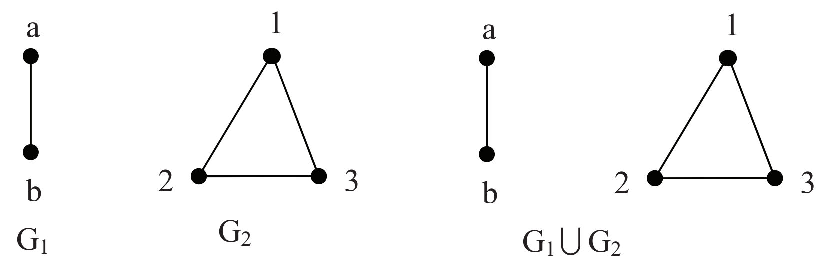
4.3 Graf işlemleri Altında Total Accessibility

Herhangi birleştirilmiş $G_1=(V_1, E_1)$ ve $G_2=(V_2, E_2)$ grafları için
$V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ $|V_1| \neq |V_2|$ olsun.

Tanım 4.3.1: Graflarda Birleşim İşlemi

İki grafın birleşim işlemi, $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ olarak tanımlıdır.

Örneğin,



Teorem 4.3.2: $TA(G_1 \cup G_2) = TA(G_1) + TA(G_2)$ ' dir.

İspat: Graflarda bileşim işlemi ayrık ayrıtlı ve ayrık tepeli graflar arasında tanımlandığından bu işlem *TA* tanımı gereğince tepe dereceleri ve accessible kümeleri değiştirmeyeceğinden, *TA* değeri de değişmez ve $TA(G_1)$ ile $TA(G_2)$ değerleri aynı kalır ve sonuç olarak $TA(G_1 \cup G_2) = TA(G_1) + TA(G_2)$ elde edilir.

Teorem 4.3.3: $G_1, \ldots, G_{m-1}, G_m$ grafları için,

$$TA(G_1 U \ldots UG_{m\text{-}1} UG_m) = TA(G_1) + \ldots + TA(G_{m\text{-}1}) + TA(G_m)$$

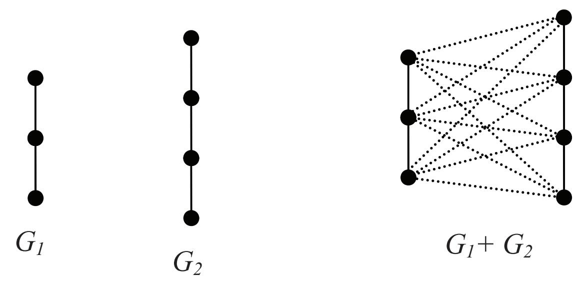
elde edilir.

İspat: Teorem 4.3.2'ye benzer şekilde yapılır.

Tanım 4.3.4 Graflarda Toplama İşlemi

Herhangi G_1, G_2 graflarının toplamı $G=G_1+G_2$ ile gösterilir $G(V,E) = G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2)$ grafının tepeler kümesi V=$V_1 \cup V_2$ den ve ayrıtlar kümesi de $E_1 \cup E_2$ ile V_1 kümesindeki her bir tepeyi V_2 kümesindeki her bir tepeyle birleştiren tüm ayrıtlardan oluşur.

Örnek 4.3.5: P_3 ve P_4 graflarında toplama işlemi altındaki sonucu inceleyelim.



Teorem 4.3.6: P_n+P_m grafları için $m<n$ olmak üzere

$TA(P_n+P_m)= m+3$' dür.

İspat: P_m ve P_n yol grafları için $m<n$ olmak üzere, burada accessible kümeyi oluşturacak v_j tepeleri P_n' den alınmalıdır ki TA tanımı gereği bulunacak sonuç minimum olsun. Çünkü tepeleri P_n' den seçilecek her bir erişilebilirlik özelliğini sağlayan v_j tepesinin derecesi $m<n$ den dolayı küçük olacaktır. Bu durumda TA değeri minimum olarak hesaplanabilir. Toplama işleminde P_m deki her v tepesi P_n deki her bir u tepesi ile bir ayrıt ile birleştirildiğinden seçilen v tepesinin derecesi ya $2+m$ ya da $1+m$ olacaktır. Her iki durumda da P_m grafındaki her tepe v ile bitişiktir ve geri kalan tüm tepeler v' ye bitişik tepelerin komşuluğundadır. Bu durumda $TA(P_m+P_n)=(1+m)+2=m+3$ olarak elde edilir.

Teorem 4.3.7: $K_{1,n-1}$, $K_{1,m-1}$ yıldız (star) grafları için $n<m$ olmak üzere $TA(K_{1,n-1}+K_{1,m-1}) \geq TA(K_{1,n-1}) + TA(K_{1,m-1})$ ' dir.

İspat: *TA*’ nın tanımından minimum değer için accessible kümenin elemanı $K_{1,m-1}$’ dan seçilmelidir ki deg(v) küçük olsun. Eğer v tepesi $K_{1,n-1}$ den seçilirse deg(v)=1+m olur. $n<m$ den deg(v)=1+n olan tepenin seçilmesi gereklidir. Buradan $TA(K_{1,n-1}+K_{1,m-1})=(1+m)+1=2+m$ olarak bulunur. Ayrıca $TA(K_{1,n-1})=1+2$ ve $TA(K_{1,m-1})=1+2$ den,

$TA(K_{1,n-1}, K_{1,m-1}) \geq TA(K_{1,n-1}) + TA(K_{1,m-1})$ sonucu elde edilir.

Teorem 4.3.8: $W_{1,n-1}$, $W_{1,m-1}$ tekerlek grafları için $n<m$ olmak üzere $TA(W_{1,n-1}+W_{1,m-1}) \geq TA(W_{1,n-1}) + TA(W_{1,m-1})$ ’ dir.

İspat: *TA*’ nın tanımından minimum değer için accessible kümenin elemanı $W_{1,m-1}$’ dan seçilmelidir. Bu durumda seçilen v tepesi için deg(v)=n olur. Böylece $TA(W_{1,n-1}+W_{1,m-1})=(n+2)+3=n+6$ elde edilir. $TA(W_{1,n-1})=3+2=5$ benzer şekilde $TA(W_{1,m-1})=3+2=5$ dir. Buradan

$TA(W_{1,n-1}+W_{1,m-1}) \geq TA(W_{1,n-1}) + TA(W_{1,m-1})$ elde edilir.

Teorem 4.3.9: $K_{m,n}$, $K_{p,r}$ grafları için $m<n<p<r$ olmak üzere $TA(K_{m,n}+K_{p,r}) = TA(K_{m,n}) + TA(K_{p,r})$ ’ dir.

İspat: *TA*’ nın tanımından minimum değer için accessible kümenin elemanı $K_{p,r}$’ den alınmalıdır. Bu durumda seçilen tepenin derecesi $(m+n)+p$ olacaktır. Buradan *TA* değeri $m+n+p+2$ bulunur. Ayrıca benzer koşullar $K_{m,n}$ ve $K_{p,r}$ için ele alındığında her birinin *TA* değeri sırasıyla $m+2$ ve $p+2$ dir. Sonuç olarak $TA(K_{m,n})+TA(K_{p,r})=m+p+4$. Bipartite grafın tanımından $n \geq 2$ dir. Böylece $m+n+p \geq m+p+4$ olarak bulunur.

Teorem 4.3.10: $P_m+K_{1,n-1}$ için ,

(i) $m<n$ ise $TA(P_m+K_{1,n-1})=(m+1)+2$

(ii) $m>n$ ise $TA(P_m+K_{1,n-1})=(n+1)+2$ dir.

İspat: P_m ve $K_{1,n-1}$ grafları üzerinde toplama işlemi için sonucu $K_{1,n-1}$ deki tepe derecesi belirler. Çünkü bir yıldız (star) graftaki erişilebilir (accessible) küme tek elemandan oluşur. Burada oluşan iki durum için *TA* tanımı gereğince seçilecek tepe bir tane olduğundan tepe derecesi önem taşır. Accessible küme için eleman seçimini derecesi küçük olan tepeden yapmak ile *TA* tanımı (i) ve (ii) olarak gerçekleşir.

Teorem 4.3.11: C_m ve $K_{1,n-1}$ grafları için

(i) m<n ise $TA(C_m+K_{1,n-1})=(m+1)+2$.

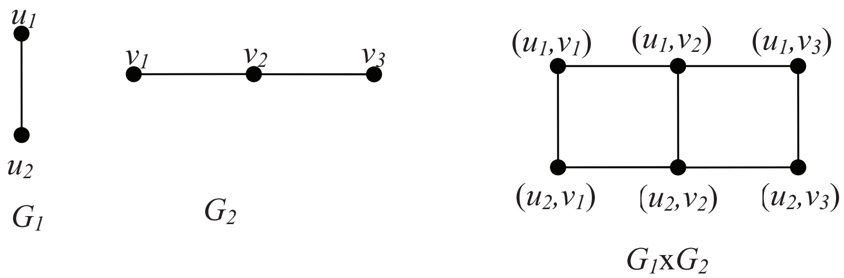
(ii) m>n ise $TA(C_m+K_{1,n-1})=(n+2)+2$

İspat: Teorem 4.3.10 a benzer şekildedir.

Tanım 4.3.12 Graflarda Kartezyen Çarpım İşlemi

G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı $G=G_1xG_2$ ile gösterilir, bu yeni çarpım grafının tepeler kümesi $V=V_1xV_2$ den oluşur. Oluşan grafın ayrıtlar kümesi ise şöyle tanımlıdır. Eğer $u_1=u_2$ ve v_1 ile v_2 komşu ise yada $v_1=v_2$ ve u_1 ile u_2 komşu ise (u_1,v_1) ve (u_2,v_2) tepeleri G_1xG_2 grafında komşudur, (**Harary F.** 1994)

Örneğin,



Teorem 4.3.13: P_m, P_n grafları ve m=3 için,

$$TA(P_3xP_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor .4$$

olarak hesaplanır.

İspat: Burada çarpma işlemi sonucunda oluşan graftaki komşulukları ve dolayısıyla oluşacak erişilebilir (accessible) kümeleri belirleyici değer P_n grafının baskınlık (dominating) sayısı belirlemektedir. P_n deki baskınlık değeri ise P_n grafının tepe sayısına bağlı olarak değişir. P_3 grafıyla çarpım işlemi yapıldığında oluşan yapıda erişilebilirlik tanımına uygun tepeler seçildiği anda bu seçim P_n grafının baskın tepelerine karşılık gelir. Bu tepelerin dereceleri ise 4 tür. n tepe sayısının mod 3 e göre değişen değerleri için eşitlik durumu veya daha küçük olma durumu ortaya çıkar. Böylece $TA(P_3xP_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor .4$ olarak hesaplanır.

Teorem 4.3.14: C_n ve C_m grafları için, $TA(C_n\mathrm{x}C_m)= \eta((C_m)x(C_n))\,\mathrm{x}6$ dır.

İspat: $C_n\mathrm{x}C_m$ grafları 4 regüler graflar oluşturmaktadır. Her çevre graf tanımından çevredeki her tepe 2 tepe ile bitişiktir. Çarpımdan önceki her bir çevre graftaki bitişiklik de göz önüne alınırsa çarpım graflarında her tepenin derecesi 4 olur. Burada çarpım işlemi sonucu oluşan grafın erişilebilirlik sayısı bulunursa her tepenin derecesi aynı olduğundan *TA* kolaylıkla hesaplanabilir. *TA* nın tanımından her bir tepe için ayrıca bu erişilebilir kümedeki her tepe için 2 değeri geleceğinden,

TA($C_n\mathrm{x}C_m$)= $\eta(C_m x C_n)\,\mathrm{x}(4+2)= \eta(C_m x C_n)\,.6$ olarak elde edilir.

Teorem 4.3.15: P_m ve $K_{1,n-1}$ grafları için $TA(P_m\mathrm{x}K_{1,n-1})= \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil .(3+n)$ dir.

İspat: *TA* değeri tanımından tepe derecesi önem taşıdığı ve $K_{1,n-1}$ de erişilebilirlik (accessibility) değeri 1 olduğundan, çarpım işleminde P_m grafının baskınlık (dominating) sayısı önem taşır. n ne kadar büyük olursa olsun çarpma işleminin sonucunda oluşan grafta accessibility sayısını P_m deki tepe sayısı ve tepelerin konumu belirler. Bu durumda n+1 tane tepe için gelecek olan tepe dereceleri toplam değeri $\sigma\ (P_m).(n+1)$ ve *TA* tanımından oluşacak $\sigma\ (P_m).2$ değerleri elde edilir ve sonuç olarak,

$$TA(P_m\mathrm{x}K_{1,n-1})= \sigma\ (P_m).(n+1)+ \sigma\ (P_m).2$$

$$= \sigma\ (P_m)\mathrm{x}(n+3)$$

$$= \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil .(3+n)$$ elde edilir.

Teorem 4.3.16: C_m ve $K_{1,n-1}$ grafları için

$TA(C_m x K_{1,n-1}) = \sigma\ (C_m).(2+(n\text{-}1)) + \sigma\ (C_m).2$

İspat: C_m grafının baskınlık (dominating) sayısı önem taşımaktadır. Çünkü yıldız grafın baskınlık (dominating) sayısı 1 dir. C_m grafındaki baskınlık (dominating) sayı kadar k tane tepe seçilsin. Seçilen her tepenin derecesi ise C_m grafının genel tanımından dolayı en az 2 dir ve $K_{1,n-1}$ den dolayı çarpma işlemi sonunda her tepesi ile yeni bir tepe üreteceğinden ve $K_{1,n-1}$ deki tepe derecesi ilişkisinden n-1 derece eklenir. Sonuç olarak dıştaki tepenin derecesi=(2+n-1)=n+1 olur. Bu durumda

$TA(C_m x K_{1,n-1}) = \sigma\ (C_m).(2+(n\text{-}1)) + \sigma\ (C_m).2$ olur.

5. Total Accessibility Sayısını bulan Algoritma

Bu bölümde, verilmiş birleştirilmiş bir G grafının Total Accessibility sayısını bulan bir algoritma tasarlanmıştır. Algoritmada grafın bitişiklik matrisi kullanılarak, uzaklık matrisi oluşturulmuş ve bu matris üzerinden 2 uzaklıklı olan tepeler incelenerek erişilebilir (accessible) kümeleri bulunmuştur. Daha sonra toplam erişilebilirlik (Total Accessibility) tanımına uygun olarak bitişiklik matrisinden bu erişilebilir (Accessible) kümelerdeki tepelerin dereceleri toplamı hesaplanmış ve en küçük olan değer elde edilmiştir. Algoritmamızda matris çarpımı ve toplamında işlemler mod 2 ye göre yapılmıştır.

Adım algoritması dışında Sparks Dilinde aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

N : grafın tepe sayısı

A[i,j] : grafın bitişiklik matrisi

V[i] : Grafın tepelerinin incelenip incelenmediğini belirleyen dizi

```
FOR I=1 TO N DO
        FOR J=1 TO N DO
                Readln(A[i,j]);
{Tepelerin sırayla kontrol edildiği ve komşuluklarının tarandığı kısım}
FOR K=1 TO N DO
        FOR I=1 TO N DO
                FOR J=1 TO N DO
                Readln(A[i,j])
{Burada A[i, j] matrisi tekrar verilmeli vi ler yeniden 1 değeri yapılmalıdır}
```

```
FOR M=1 TO N DO
        V[M]=1 ; {Kullanılan tepe işaretleniyor.}
FOR I= K  TO N DO
        IF V[I]< >0 THEN BEGIN
                        FOR J=1 TO N DO
                         IF V[J]< >0 THEN BEGIN
                        {Seçilen tepenin komşuları araştırılıyor.}
                                IF A[i,j]=1 THEN V[J]=0 ENDIF
                                        END
                        REPEAT
        END
         AS[I]=AS[I]+V[I]
        {Seçilen her tepe için ayrı accessible kümeler oluşturuluyor.}
        REPEAT
REPEAT
FOR J=1 TO N DO
        FOR I=1 TO N DO
                Top[j]=deg[AS[I]]+2;
Enb=top[1];
FOR J=1 TO N DO
IF top[i]> enb then enb=top[i];
Print "Grafın total accessibility değeri= ", enb
```

6. SONUÇ

Bu çalışmada iletişim ağlarının zedelenebilirliğinde kullanılan bazı ölçümler ele alınmış, bunların temel graflar üzerindeki sonuçları verilmiştir. Total Redundance ölçümünden söz edilerek, temel graflar üzerinde aldığı değerler ve graf işlemleri altındaki ilişkisi incelenmiştir. Bu tezde, accessibility (erişilebilirlik) tanımına dayanan; bir ağın zedelenebilirlik derecesini belirleyen yeni bir ölçüm olan **Total Accessibility** (toplam erişilebilirlik) kavramı tanımlanmış ve temel graflardaki değeri ile graf işlemleri ile elde edilen sonuçları ortaya konmuştur. Total Accessibility (toplam erişilebilirlik) üzerine teoremler verilmiş ve ispatları yapılmıştır. Yeni bir ölçüm olan Total Acccessibility kavramının, iletişim ağlarının zedelenebilirlik ölçümleri içinde hesaplanabilirliği diğer ölçümlere oranla daha kolaydır. Bu nedenle zedelenebilirlik açısından önemli olduğunu düşünmekteyiz.

Bu bilgiler göz önüne alınarak; tepe sayısı aynı olan, iki farklı graf karşılaştırıldığında Total Accessibility değeri büyük olan grafın, bir başka deyişle iletişim ağının, diğerine göre daha az zedelenebilir olduğu sonucuna vardık.

KAYNAKLAR

[1] Chvatal V., (1973) Tough Graphs and Hamiltonian Circuits, *Discrete Math.*5, 215- 218.

[2] Barefoot, C. A.- Entringer, R.- Swart, H., (1987), Vulnerability in Graphs-A Comparative Survey, Proceedings of the first Carbondale combinatorics conference (Carbondale, Ill., 1986) *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 1, 13-22.

[3] Barefoot, C.A. - Entringer, R. - Swart, H., (1987), Integrity of Trees and Powers of Cycles, Eighteenth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Boca Raton, Fla.,), *Congr. Numer*. 58, 103-114.

[4] Beineke, L.W- Bagga, K.S.-Lipman, M.J.- Pippert, R.E. and Sedlmeyer, R.L. (1988), A Good Algorithm for The Computation of The Edge-integrity of Trees, Nineteenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Baton Rouge, LA, 1988) *Congres. Numer.* 67, 225-232.

[5] Beinike, L.W.- Goddard, W., -Hamburger, P.- Kleitman, D.J.- Lipman, M.J. and Pippert, R.E, (1991), The Integrity of the Cube is Small, *J.Combin.Math.Combin.Comput*.9, 191-193.

[6] Bagga, K.S., -Beineke, L.W., and Pippert, R. E., (1992), A Survey of Integrity, *Discrete Appl. Math*. Vol.37/38, 13- 28.

[7] Bagga, K.S., -Beineke L.W., -Pippert R.E., and Sedlmeyer R.L, (1993), Some Bounds and An Algorithm For The Edge-Integrity of Trees, *Ars Combin.* 35-A, 225- 238.

[8] Bagga, K.S., -Beineke L.W., -Lipman M.J. and Pippert R.E, (1993), On the Honesty of Graph Complements, *Discrete Math.* 122, 1-6.

[9] Bagga, K.S.- Beineke, L.W - Pippert, R.E., (1994): Edge-integrity: A survey. Graphs and combinatorics (Qawra), *Discrete Math*. 124, 3-12.

[10] Cozzens M., -Moazzami D., and Stueckle S., (1995) The Tenacity of A Graph, Graph Theory, Combinatorisc and Algorithms Vol 1, 2. Kalamazoo, MI, USA, June15, New York, NY.Wiley, 1111-1122.

[11] Cozzens M., - Moazzami D., and Stueckle S., (1994), The Tenacity of Harary Graphs, *J.Combin. Math. Combin. Comput*. 16, 33-56.

[12] Cozzens, M. B., (1994), Stability Measures and Data Fusion Networks, *Graph Theory Notes of Newyork* XXVI, 8-14.

[13] Bagga, K.S. and Deogun, J.S., (1995): On The Pure Edge-Integrity of Graphs, *Graph Theory, Combinatorics and Algorithms,* vol 1, 2, (Kalamazoo, MI) 301-310.

[14] Cozzens, M.B. - Wu, S.Y., (1996): Vertex Neighbour-integrity of Trees, *Ars. Combin*. Vol.43, 169-180.

[15] Cozzens M.,- Wu S.S.Y., (1997), Bounds of Edge-neighbour-integrity of Graphs, *Australas. J. Combi.* 15, 71-80.

[16] Dündar, P.,(1998): The Stability Measures of Static Interconnection Networks and Binary Trees, *Proceeding of the Third International Symposium on Computer Networks*, Turkey, 240-245.

[17] Dündar, P., (1999): Neighbour-integrity of Boolean Graphs and Its Compounds, Int. *J. of Comput. Math*, Vol.72, 441-447.

[18] Dündar,P., (1999), The Tenacity of Hypercube Graphs and Its Some Compounds, *Neural Networks World* 3, 225-234.

[19] Dündar, P., (1999): New Notions In Network Reliability: Stability Numbers of Sequential Joined Graphs, *Neural Networks World*,Vol.5, 403-411.

[20] Dündar, P.- Ozan, A., (2000): Neighbour-integrity of Sequential Joined Graphs, *Int. J. of Comput.Math.*,Vol.74, 45-52.

[21] Dündar, P.,(2001): Stability Measures of Some Static Interconnection Networks, *Int.J. Comput. Math.,* Vol.76 No.4, 455-462.

[22] Dündar, P., (2001): Accessibility Number and The Neighbour-integrity of Generalised Petersen Graphs, *Neural Networks World*, Vol.2, 167-174.

[23] Merwe, Lucas C.- Mynhardt, Chiristina M., -Haynes, Teresa W., (2001): Total domination edge critical graphs with maximum diameter, Discuss.Math. Graph theory 21/2, 187-205

[24] Goddart, W., -Oellermann, Ortrud R., -Slater, Peter J., and Swart, Henda C.,(2000): Bounds on the total redundance and efficiency of a graph, *Ars. Combin.* 54, 129-138.

[24] Henning, Michael A., -Oellermann, Ortrud R., and Swart Henda C. (2003): Distance Domination critical graphs., *J. Combin.Math. Combin. Comput*. 44 , 33-45

[25] Beineke L.W., - Oellermann Ortrud R. – Pippert, R.E., (2002), The Average Connectivity of A Graph, *Discrete Math.*, 252, 31-45.

[26] Dündar P.,- Kilic E., (2003), A Fault Tolerant Routing Algorithm On Neighbour-Faulty Hypercube, *EURO 2003, EURO/INFORMS Conference in Istanbul*,

[27] Dündar P., - Aytac A., (2004), Integrity of Total Graphs via Some Parameters, *Mathematical Notes* Vol.76, N5 (November), p.665-672.

[28] Dündar P.,-.Aytaç A., (2004), Stability of Two Dimensional Mesh and Torus Graph, *Neural Network World, International Journal on Neural and Mass-Parallel Computing and Information Systems,*,vol.2, 119-126.

[29] Dündar P., (2004), Accessibility Number of Identifying Graphs", WSEAS Transactions on Systems, vol.3/2, 489-493.

[30] Dündar P., Aytaç A., Aytaç V., (2005) Calculation of Accessibility Number and Neighbour-integrity of a Graph, *Mathematical Notes* Vol..78, N5 (Nov).

[31] Dündar P.-Kilic E., (2006), Two Number for Stability of Extended Fibonacci Cubes, *Neural Network World*, Vol5/06, 411-419.

[32] Kumar V., Grama A. – Gupta A, Karpis G., (1994), *Introduction To Parallel Computing,* The Benjamin Cummings Pub. California

[33] Lesniak L., Chartrand G., 1986), *Graphs and Digraphs*, California Wadsworth & Brooks

[34] West D.B., (2001), *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, NJ.

[35] Buckley, F. and Harary, F. (1990), *Distance in Graphs*, Addison Wesley Pub., California

[36] Frank Harary, (1969), *Graph Theory*, Addison Wesley Pub., Massachusetts,California

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Malatya' da doğdu. İlkokul öğrenimine Bursa-Gemlik de başladı ve Trabzon' da tamamladı. Ortaokul öğrenimine 1987' de Trabzon Anadolu Lisesi'nde başladı. 1995 yılında Üsküdar Hüseyin Avni Sözen Anadolu Lisesi' nden iyi dereceyle mezun oldu. 1995' de Ege Üniversitesi Matematik Bölümünü kazanarak yüksek öğrenime başladı. 1999 yılında aynı bölümden iyi dereceyle mezun oldu. 1999 yılında Matematik Bölümünün yüksek lisans sınavını kazanarak yüksek lisans öğrenimine başladı. 2002 yılında Matematik Bölümünden yüksek lisans derecesi ile mezun oldu. 2002 de Matematik Bölümünde doktora öğrenimine başladı. 30 Aralık 1999' da araştırma görevlisi olarak matematik bölümünde çalışmaya başladı ve bu görevine devam etmektedir. Erasmus programı ile 1 dönem (2008 güz) Aberdeen Üniversitesi'n de çalışma alanı ile ilgili inceleme ve araştırmalarda bulundu. Çok iyi düzeyde İngilizce ve orta düzeyde Almanca bilmektedir. Doğa sporları, yüzme ve resimle ilgilenmektedir.