



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ KOORDİNASYON BİRİMİ

**SHEFFER STROKE NELSON CEBİRLERİ
VE FUZZY YAPILARI**

Proje No:FGA-2021-22747

Genel Araştırma Projesi

SONUÇ RAPORU

Proje Yürütücüsü:
Prof. Dr. Tahsin ÖNER
Matematik Bölümü

Araştırmacının Adı Soyadı:
Tuğçe KATICAN
Matematik Bölümü

Haziran 2022
İZMİR

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Sheffer stroke işleminden ve Nelson cebirlerden yararlanarak yeni bir cebirsel yapı tanımlanmıştır ve bu yeni yapının aksiyomlarının bağımsızlığı gösterilerek bu yapı üzerinde sıralama, kongrüans bağıntısı, idealleri, fuzzy yapıları ile bu kavramlar arası ilişkiler detaylı olarak incelenmiştir. Bu çalışmanın hazırlanmasında, planlanmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda, engin bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşmaktan asla çekinmeyen, sunmuş olduğu desteği ile birlikte yaptığı yönlendirmelerle, bilgilendirmelerle ve eleştirilerle kendimi ve akademik bilgimi geliştirmemi sağlayan, akademik yaşamıma ismi altında başlamaktan ve akademik çalışma hayatıma birlikte devam etmekten onur duyduğum değerli danışmanım Prof. Dr. Tahsin ÖNER'e ve FGA-2021-22747 numaralı projeye desteklerinden dolayı Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğüne teşekkürlerimi sunarım.

TUĞÇE KATICAN
Haziran 2022

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iii
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. ÖNBİLGİLER	3
3. SHEFFER STROKE NELSON CEBİRLER	4
4. İDEALLER	9
5. BÖLÜM S-NELSON CEBİRLERİ	12
6. FUZZY ALTKÜMELER	16
7. HESİTANT FUZZY ALTKÜMELER	20
8. TARTIŞMA VE SONUÇ	22
KAYNAKLAR DİZİNİ	24

TABLolar DİZİNİ

Tablo

Sayfa

3.1 N üzerinde ikili işleminin tablosu.....	4
3.2 N üzerinde ikili işleminin tablosu.....	4
3.3 A üzerinde Sheffer stroke işleminin tablosu.....	4
3.4 A üzerinde birli ve ikili işlemlerin tablosu.....	7
3.5 B üzerinde birli ve ikili işlemlerin tablosu.....	8
3.6 B üzerinde Sheffer stroke işleminin tablosu.....	8
5.7 B/ λ üzerindeki $ \lambda$ Sheffer stroke işleminin tablosu.....	14

ÖZET

SHEFFER STROKE NELSON CEBİRLERİ VE FUZZY YAPILARI

ÖNER, Tahsin ve KATICAN, Tuğçe

Bu çalışmada, kısaca s-Nelson cebirleri olarak adlandırılan Sheffer stroke Nelson cebirleri ve bu cebirsel yapıların idealleri, yarı-altcebirleri ve bölüm grupları tanıtılarak Nelson cebirleri ve Sheffer stroke işlemi ile donatılmış bu yeni yapılar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca, bir s-Nelson cebirinin bir sınırlı, dağılmalı modüler kafes yapısı oluşturduğu ve bu cebirsel yapı üzerinde tanımlanan tüm ideallerin ailesinin bir tam dağılmalı modüler kafes belirttiği gösterilmiştir. Bunların yanı sıra, s-Nelson cebirlerinin idealleri yardımıyla bu cebirsel yapılar üzerinde bir kongrüans bağıntısı tanımlanmıştır. Sonrasında, bu kongrüans bağıntısı kullanılarak s-Nelson cebirlerinin bölüm grupları inşa edilmiştir ve inşa edilen bölüm gruplarının da s-Nelson cebiri belirttiği ispatlanmıştır. Sonuç olarak, eğer ele alınan ideal bir ultra ideal ise inşa edilen bölüm grubunun bir tam sıralı s-Nelson cebiri olduğu ve bu grubun eleman sayısının 2 den küçük veya eşit olduğu ifade edilmiştir. Bunların yanı sıra, s-Nelson cebirlerin (inf-hesitant) fuzzy yarı-altcebirleri ve yarı-altcebirleri sunulmuştur. Bu cebirsel yapıların (ultra) idealleri yardımıyla (ultra inf-hesitant) fuzzy idealleri inşa edilmiştir ve (ultra inf-hesitant) fuzzy idealleri kullanılarak (ultra) ideallerinin inşa edildiği gösterilmiştir. Son olarak, bir s-Nelson cebirinin her (inf-hesitant) fuzzy idealinin bir (inf-hesitant) fuzzy yarı altcebir olduğu fakar ifadenin tersinin özel koşullar altında gerçekleştiği ispatlanmıştır.

Anahtar sözcükler: Sheffer stroke, Nelson cebiri, s-Nelson cebiri, (ultra inf-hesitant fuzzy) ideal, (inf-hesitant fuzzy) yarı-altcebir.

ABSTRACT

SHEFFER STROKE NELSON ALGEBRAS AND FUZZY STRUCTURES

ÖNER, Tahsin ve KATICAN, Tuğçe

In this study, Sheffer stroke Nelson algebras (briefly, s-Nelson algebras), (ultra) ideals, quasi-subalgebras and quotient sets on these algebraic structures are introduced. The relationships between s-Nelson and Nelson algebras are analyzed. Also, it is shown that a s-Nelson algebra is a bounded distributive modular lattice, and the family of all ideals forms a complete distributive modular lattice. A congruence relation on s-Nelson algebra is determined by its ideal and quotient s-Nelson algebras are constructed by this congruence relation. It is indicated that a quotient s-Nelson algebra defined by the ultra ideal is totally ordered and that the cardinality of the quotient is less than or equals to 2. Moreover, (hesitant) fuzzy structures on s-Nelson algebras are given. Then relationships between (inf-hesitant) fuzzy quasi-subalgebras and quasi-subalgebras are described on s-Nelson algebras. Indeed, (ultra inf-hesitant) fuzzy ideals are constructed by means of (ultra) ideals on these algebraic structures and vice versa. Finally, it is illustrated that every (inf-hesitant) fuzzy ideal of a s-Nelson algebra is the (inf-hesitant) fuzzy quasi-subalgebra, and that the inverse is satisfied under the special condition.

Keywords: Sheffer stroke, Nelson algebra, s-Nelson algebra, (ultra inf-hesitant fuzzy) ideal, (ultra inf-hesitant fuzzy) quasi-subalgebra.

1. GİRİŞ

H. M. Sheffer, klasik mantıkta matematiksel olarak tanımlanan tüm bağlaçları tek başına ifade edebilen bir işlem (*McCune et al., 2002*) olan Sheffer stroke işlemini tanıttı (*Sheffer, 1913*). Bir diğer ifadeyle, bu işlem, diğer hiçbir mantıksal işleme ihtiyaç duymaksızın formal bir sistemi inşa etmek için tek başına yeterlidir ancak diğer birli veya ikili mantıksal işlemler bunu tek başlarına sağlayamazlar. Bu nedenle, Sheffer stroke işleminin bilgisayar bilimlerinde, teknolojiye ve endüstride birçok uygulaması mevcuttur. Bunların içerisinde en bilinen ve yaygın uygulaması; Sheffer stroke işleminin bir bilgisayarda işlemciyi oluşturan çiplerdeki bütün diodlara sahip olmasıdır yani bu işlem için tek bir diod yeterli olmaktadır fakat diğer mantıksal işlemlerin her biri için farklı diodlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu da diğer işlemler için farklı diodlar üretmekten daha kolay ve daha az maliyetlidir. Bilgisayarların teorik temelini oluşturan klasik önermesel mantığın cebir yapıları olan Boole cebirlerinde tanımlı olan Sheffer stroke işlemi değişme özelliğine sahip olduğundan bu işlemi diğer mantıksal cebirlere uygulamak birçok kullanışlı sonuç elde edilmesini ve bu cebirlerin aksiyom sistemlerinin indirgenerek daha kolay denetlenebilir hale gelmesini sağlamaktadır. Literatürde Sheffer stroke işlemiyle donatılmış cebirsel yapılara örnek olarak orthoimplication cebirler (*Abbott, 1967*), orto kafesler (*Chajda, 2005*), güçlü Sheffer stroke birleşmeli olmayan MV-cebirleri (*Chajda, 2019*) ve süzgeçleri (*Oner, 2021a*), Sheffer stroke Hilbert cebirleri (*Oner, 2021c*) ve fuzzy süzgeçleri (*Oner, 2021b*), Sheffer stroke BL-cebirlerin nötrosofik N-yapıları (*Katican, 2021*), Sheffer stroke BCK-cebirleri (*Oner, 2022*) verilebilir. Ayrıca, güçlü cebirsel kapalı cebirlerin, Sheffer stroke cebirlerin ve Visser cebirlerin gösterimleri (*Molkhasi ve Shum, 2019*), (*Molkhasi, 2021*) ile Sheffer stroke işlemine göre Boole cebirleri için en kısa 2-baz ayrıntılı olarak çalışılmıştır (*Veroff, 2003*). Bunların yanı sıra, Sheffer stroke işleminin ve ortomodüler kafes kavramlarının involüsyona sahip ilişkisel sistemlere genişletilmesi (*Chajda ve Länger, 2022*) de ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Sezgisel tense mantık IKT; P, F, H ve G birli operatörlerine sahip sezgisel önermesel mantığın bir genelleştirilmesi olarak tanıtıldı (*Ewald, 1986*) ve IKT-cebirlerin IKT varyetesi verilerek bir IKT sistemin cebirsel yapısının IKT-cebirler olduğu gösterildi (*Figallo ve Pelaitay, 2014*). Sonrasında H. Rasiowa, Nelson ve Markov (*Markov, 1950*) tarafından tanımlanan güçlü değilme işlemine sahip yapısal mantığın cebirsel altyapısı olan yarı-sözde Boole cebirleri (*Rasiowa, 1974*) denilen Nelson cebirlerini ya da N-kafesleri tanıttı (*Rasiowa, 1969*). Ayrıca, iki tense operatörüne sahip Nelson cebirlerinin, diğer bir deyişle tense Nelson cebirlerinin, varyetesi ve (merkezi tense) Nelson cebirleri ile IKT-cebirleri arasındaki ilişkiler ayrıntılı olarak incelendi (*Figallo, 2020*). Özellikle, her zaman involütif değillemeyi içermeyen Nelson cebirlerinin bir genellemesi sunularak (*Rivieccio ve Spinks, 2020*) yarı-Nelson cebirlerin varyetesi tanıtıldı (*Rivieccio ve Jansana, 2021*). Literatürde, Nelson cebirlerindeki güçlü, zayıf veya sezgisel değillemeler arasındaki ilişkiler üzerine detaylı araştırmalar mevcuttur (*Gomez ve Marcos, 2022*).

Fuzzy ya da bulanık teori kavramı Zadeh tarafından klasik kümeler teorisinin bir genelleştirmesi olarak tanımlandı (*Zadeh, 1965*). Kümeler teorisinde bir elemanın bahsi geçen kümenin elemanı olup olmama durumu araştırılır fakat fuzzy teoride böyle bir durum söz konusu değildir. Fuzzy kümeler üyelik fonksiyonları yardımıyla tanımlanırlar ve elemanın fuzzy kümeye aitliği değil bahsi geçen kavrama ne kadar uygun olduğu incelenir. Bu nedenle, fuzzy teori insan zekasını ve davranışlarını taklit eden cihazların üretilmesinde yaygın bir şekilde kullanılır ve yapay zeka ile teknoloji alanlarında önemli bir yere sahiptir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde okunabilirliği kolaylaştıracak ve çalışmanın devamında yararlanılacak olan Sheffer stroke işlemi ve Nelson cebirler ile ilgili temel

bilgilere yer verilecektir. Üçüncü bölümde, kısaca s-Nelson cebirler olarak adlandırılacak olan Sheffer stroke Nelson cebirler tanımlanarak bu cebirsel yapı üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı ve s-Nelson cebirlerine ait farklı özellikler sunulacaktır. Ayrıca, bir s-Nelson cebirinin teorik yönü ayrıntılı olarak incelenerek çeşitli örneklerle desteklenecektir. Dördüncü bölümde ise s-Nelson cebirlerin idealleri tanımlanarak ideal konseptine ait çeşitli özellikler ve kavramlar verilecektir. Beşinci bölümde, şdeal kavramından ve özelliklerinden yararlanılarak bir kongrüans bağıntısı tanıtılacaktır ve bu kongrüans bağıntısı kullanılarak s-Nelson cebirlerin bölüm grupları oluşturulacaktır. Oluşturulan bu grupların da s-Nelson cebiri belirttiği ifade edilecektir ve bu grupların özellikleri ayrıntılı olarak incelenecektir. Çalışmanın son kısmında, çalışma boyunca yapılanlar ve elde edilen bulgular özetlenecektir.

2. ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, okunabilirliği kolaylaştırmak amacıyla gerekli olan temel kavramlar, tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. (McCune et al., 2002) $A=(A, |)$ bir grupoid olsun. Her $x, y, z \in A$ için

$$(S1) \ x|y = y|x,$$

$$(S2) \ (x|x)|(x|y) = x,$$

$$(S3) \ x|((y|z)|(y|z)) = ((x|y)|(x|y))|z,$$

$$(S4) \ (x|((x|x)|(y|y))|(x|((x|x)|(y|y)))) = x$$

aksiyomlarını gerçekliyorsay $|$ işlemine bir Sheffer stroke işlemi denir. Buna ek olarak,

$$(S5) \ y|(x|(x|x)) = y|y$$

özdeşliğini gerçekliyorsay bir ortho-Sheffer stroke işlemi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2. (Figallo, 2020) Bir Nelson cebiri, her $x, y, z \in N$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $(2, 2, 2, 1, 0)$ tipinde bir $N = \langle N, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1 \rangle$ cebiridir:

$$(N1) \ x \vee 1 = 1,$$

$$(N2) \ x \wedge (x \vee y) = x,$$

$$(N3) \ x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x),$$

$$(N4) \ \sim \sim x = x,$$

$$(N5) \ \sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y,$$

$$(N6) \ x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y),$$

$$(N7) \ x \rightarrow x = 1,$$

$$(N8) \ x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge (\sim x \vee y),$$

$$(N9) \ (x \wedge y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z),$$

$$(N10) \ (x \rightarrow y) \wedge (\sim x \vee y) = \sim x \vee y,$$

$$(N11) \ x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z).$$

3. SHEFFER STROKE NELSON CEBİRLER

Bu bölümde, Sheffer stroke Nelson cebirler tanıtılarak çeşitli özellikleri verilecektir.

Tanım 3.1. Bir Sheffer stroke Nelson cebiri (kısaca, s-Nelson cebiri), her $x, y, z \in N$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $(2, 0)$ tipinde bir $N=(N, |, 1)$ cebiridir ve $0=1|1$:

- (sn1) $x|(x|x)=1$,
- (sn2) $x|(y|z)=((x|(y|y))|(x|(z|z)))|((x|(y|y))|(x|(z|z)))$.

Not 3.2. (sn1) ve (sn2) aksiyomları bağımsızdır.

- (sn1) aksiyomunun bağımsızlığı: Çizelge 3.1’ deki işlem tablosuna sahip bir $N=\{0, \alpha, 1\}$ kümesi ele alınsın:

	0	α	1
0	1	1	1
α	1	α	α
1	1	α	0

Çizelge 3.1. N üzerindeki | ikili işleminin tablosu

O halde (sn2) aksiyomu sağlanır fakat $1 \neq \alpha = \alpha | (\alpha | \alpha)$ olduğundan (sn1) sağlanmaz.

- (sn2) aksiyomunun bağımsızlığı: Çizelge 3.2’ deki işlem tablosuna sahip bir $N=\{0, \alpha, 1\}$ kümesi ele alınsın:

	0	α	1
0	1	1	1
α	1	0	α
1	1	α	0

Çizelge 3.2. N üzerindeki | ikili işleminin tablosu

O halde (sn1) aksiyomu gerçekleşir fakat $\alpha = \alpha | (0|1) \neq 0 = \alpha | \alpha = (\alpha | 1) | (\alpha | 1) = ((\alpha | (0|0)) | (\alpha | (1|1))) | ((\alpha | (0|0)) | (\alpha | (1|1)))$ olduğundan (sn2) gerçekleşmez.

Örnek 3.3. $A=\{0, w_1, w_2, 1\}$ bir küme ve A üzerindeki | işlemi Çizelge 3.3’ deki işlem tablosuna sahip bir ikili işlem olsun. O halde $(A, |, 1)$ yapısı bir s-Nelson cebiri belirtir.

	0	w_1	w_2	1
0	1	1	1	1
w_1	1	w_2	1	w_2
w_2	1	1	w_1	w_1
1	1	w_2	w_1	0

Çizelge 3.3. A üzerindeki | Sheffer stroke işleminin tablosu

Lemma 3.4. $(N, |, 1)$ bir s-Nelson cebiri olsun. O zaman her $x, y, z \in N$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $x|(1|1)=1$,
2. $1|(x|x)=x$,
3. $(x|1)|(x|1)=x$,
4. $x|x=x|1$,
5. $(x|1)|1=x$,
6. $x|(x|1)=1$,
7. $((x|y)|(x|z))|((x|y)|(x|z))=x|((y|y)|(z|z))$,
8. $((x|y)|y)|y=x|y$,
9. $x|x=x|y \Leftrightarrow x|(y|y)=1$,
10. $x|(x|y)=x|(y|y)$,
11. $x|0 = 1$.

İspat.

1. (sn1), (S2) ve (S3)' den $x|(1|1)=x|((x|(x|x))|(x|(x|x))))=((x|x)|(x|x))|(x|x)=x|(x|x)=1$ elde edilir.
2. (sn1), (S1) ve (S2)' den $1|(x|x) = (x|(x|x))|(x|x)=x$ sonucu çıkar.
3. (sn1), (S1) ve (S2)2 den

$$\begin{aligned} (x|1)|(x|1) &= (x|(x|(x|x))))|(x|(x|(x|x)))) \\ &= (((x|x)|(x|x))|((x|x)|x))|(((x|x)|(x|x))|((x|x)|x)) \\ &= x \end{aligned}$$
 dir.

Benzer şekilde, 5-11 özellikleri de (sn1)-(sn2) ve (S1)-(S4) koşulları kullanılarak ispatlanır. $\square$

Lemma 3.5. $(N, |, 1)$ bir s-Nelson cebiri olsun. O zaman N üzerinde

$$x \leq y \Leftrightarrow x|(y|y)=1$$

biçiminde tanımlanan $\leq$ ikili bağıntısı N üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat. (sn1)-(sn2), (S1)-(S2) ve Lemma 3.4 (2)-(3) özelliklerinden yararlanılarak ispat tamamlanır. Ayrıca, 0 elemanının N ' nin en küçük elemanı ve 1 elemanının N ' nin en büyük elemanı olduğu sonucu çıkar. $\square$

Lemma 3.6. $(N, |, 1)$ bir s-Nelson cebiri ve $\leq$ bağıntısı N üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. O zaman her $x, y \in N$ için $x \vee y = (x|x)|(y|y)$ ve $x \wedge y = (x|y)|(x|y)$ olacak şekilde $(N, \leq)$ (ya da $(N, \vee, \wedge, 0, 1)$) yapısı bir sınırlı, dağılmalı modüler kafestir.

İspat. $N, |, 1)$ bir s-Nelson cebiri ve $\leq$ bağıntısı N üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. O halde (S1), (S3) ve Lemma 3.4 (1)' den $((x|y)|(x|y))|(y|y)=x|((y|(y|y))|(y|(y|y))))=x|(1|1)=1$ ve $((x|y)|(x|y))|(x|x)=y|((x|(x|x))|(x|(x|x))))=y|(1|1)=1$ olduğundan $(x|y)|(x|y) \leq x$ ve $(x|y)|(x|y) \leq y$ dir. Öyleyse $(x|y)|(x|y)$, x ve y ' nin bir alt sınırıdır. Şimdi $(x|y)|(x|y)$ ' nin x ve y ' nin en büyük alt sınırı olduğu gösterilsin. $z \leq x, y$ olsun. Bu durumda, $z|(x|x)=z|(y|y)=1$ dir. (S2) ve (sn2)' den

$$\begin{aligned} z|(((x|y)|(x|y))|((x|y)|(x|y)))) &= z|(x|y) \\ &= ((z|(x|x))|(z|(y|y))|((z|(x|x))|(z|(y|y)))) \\ &= (1|1)|(1|1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan $z \leq (x|y)|(x|y) \leq x$, y sonucu çıkar. Buradan $x \wedge y = (x|y)|(x|y)$, x ve y ' nin en büyük altsınırı (infimum) dır. Benzer şekilde, $x \vee y = (x|x)|(y|y)$, x ve y ' nin en küçük üstsınırı (supremum) dır. Böylece, $(N, \leq)$ bir kafestir. Ayrıca, (sn2), Lemma 3.4 (6) ve (S2)' den

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x|x)|(y|z) \\ &= (((x|x)|(y|y))|((x|x)|(z|z)))|(((x|x)|(y|y))|((x|x)|(z|z))) \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= (x|((y|y)|(z|z)))|(x|((y|y)|(z|z))) \\ &= (x|y)|(x|z) \\ &= (((x|y)|(x|y))|((x|y)|(x|y)))|(((x|z)|(x|z))|((x|z)|(x|z))) \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{aligned}$$

olduğundan $(N, \leq)$ bir dağılmalı kafestir. Her dağılmalı kafes modüler olduğundan $(N, \leq)$ aynı zamanda bir modüler kafestir. Lemma 3.4 (1)-(3) ve (S1)' den $x \vee 1 = (x|x)|(1|1) = 1$, $x \vee 0 = (x|x)|(0|0) = 1|(x|x) = x$ ve $x \wedge 0 = (n|0)|(n|0) = (n|(1|1))|(n|(1|1)) = 1|1 = 0$, $x \wedge 1 = (x|1)|(x|1) = x$ olduğundan $(N, \leq)$ sınırlıdır. Öyleyse, $(N, \leq)$ bir sınırlı, dağılmalı modüler kafestir. $\square$

Lemma 3.7. $(N, |, 1)$ bir s-Nelson cebiri ve $\leq$ bağıntısı N üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. O zaman her $x, y, z \in N$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $x \leq y \Leftrightarrow y|y \leq x|x$,
2. $x \leq y$ implies $y|z \leq x|z$,
3. $x \leq y|(x|x)$,
4. $y|y \leq y|(x|x)$,
5. $x \leq (x|y)|y$,
6. $x \leq y|(z|z) \Leftrightarrow (x|y)|(x|y) \leq z$,
7. $(x|(z|z))|(x|(z|z)) \leq (x|(y|y))|(y|(z|z))$,
8. $x|(y|y) \leq (y|(z|z))|((x|(z|z))|(x|(z|z)))$,
9. $x|(y|y) \leq (z|(x|x))|((z|(y|y))|(z|(y|y)))$.

İspat. İspat Lemma 3.4, Lemma 3.5, (sn1)-(sn2) ve (S1)-(S4)' den elde edilir. $\square$

Teorem 3.8. $(N, |, 1)$ bir s-Nelson cebiri olsun Eğer her $x, y \in N$ için $x \rightarrow y := x|(y|y)$, $x \vee y := (x|x)|(y|y)$, $x \wedge y := (x|y)|(x|y)$ ve $\sim x := x|x$ ise o zaman $N = \langle N, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1 \rangle$ yapısı bir Nelson cebir belirtir.

İspat. İspat Lemma 3.4 (1), (3), Lemma 3.6, (sn1)-(sn2) ve (S1)-(S3)' den elde edilir. $\square$

Örnek 3.9. Örnek 3.3' deki $(A, |, 1)$ s-Nelson cebirini göz önünde bulunduralım. O halde bu s-Nelson cebiri yardımıyla tanımlanan $\langle N, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1 \rangle$ yapısı Çizelge 3.4'deki işlem tablolarına sahip bir Nelson cebiridir.

$\rightarrow$	0	w_1	w_2	1
0	1	1	1	1
w_1	w_2	1	w_2	1
w_2	w_1	w_1	1	1
1	0	w_1	w_2	1

p	$\sim p$
0	1
w_1	w_2
w_2	w_1
1	0

$\vee$	0	w_1	w_2	1
0	0	w_1	w_2	1
w_1	w_1	w_1	1	1
w_2	w_2	1	w_2	1
1	1	1	1	1

$\wedge$	0	w_1	w_2	1
0	0	0	0	0
w_1	0	w_1	0	w_1
w_2	0	0	w_2	w_2
1	0	w_1	w_2	1

Çizelge 3.4. A üzerindeki birli ve ikili işlemlerin tablosu

Teorem 3.10. $N = \langle N, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1 \rangle$ yapısı 0 elemanına sahip bir Nelson cebir olsun. Eğer her $x, y \in N$ için $x|y := \sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y = x \rightarrow \sim y$ ise o zaman $(N, |, 1)$ yapısı bir s-Nelson cebiridir.

İspat. $N = \langle N, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1 \rangle$ yapısı 0 elemanına sahip bir Nelson cebir olsun ve her $x, y \in N$ için $x|y := \sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y = x \rightarrow \sim y$ şeklinde tanımlansın. O halde (N2), (N4), (N7) ve (N11)' den

- (S1): $x|y = \sim x \vee \sim y = \sim y \vee \sim x = y|x$,
(S2): $(x|x)|(x|y) = \sim(\sim x \wedge (\sim x \vee \sim y)) = \sim \sim x = x$,
(S3): $x|((y|z)|(y|z)) = \sim x \vee (\sim y \vee \sim z) = (\sim x \vee \sim y) \vee \sim z = ((x|y)|(x|y))|z$,
(S4): $(x|((x|x)|(y|y))|(x|((x|x)|(y|y)))) = x \wedge (x \vee y) = x$,
(sn1): $x|(x|x) = x \rightarrow x = 1$ ve
(sn2): $x|(y|z) = x \rightarrow (y \wedge z)$
 $= (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$
 $= (x \rightarrow \sim \sim y) \wedge (x \rightarrow \sim \sim z)$
 $= ((x|(y|y))|(x|(z|z)))|((x|(y|y))|(x|(z|z)))$

koşulları sağlandığından $(N, |, 1)$ yapısı bir s-Nelson cebiri belirtir. $\square$

Örnek 3.11. $B = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$ bir küme ve N üzerindeki $\wedge, \vee, \rightarrow$ ikili işlemleri ve $\sim$ birli işlemi Çizelge 3.5' deki işlem tablolarına sahip olmak üzere $\langle B, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1 \rangle$ Nelson cebiri göz önünde bulundursun. :

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	f	1	f	f	1	1	f	1
b	e	e	1	e	1	e	1	1
c	d	d	d	1	d	1	1	1
d	c	e	f	c	1	e	f	1
e	b	d	b	f	d	1	f	1
f	a	a	d	e	d	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	1

$\vee$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	a	b	c	d	e	f	1
a	a	a	d	e	d	e	1	1
b	b	d	b	f	d	1	f	1
c	c	e	f	c	1	e	f	1
d	d	d	d	1	d	1	1	1
e	e	e	1	e	1	e	1	1
f	f	1	f	f	1	1	f	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

p	$\sim p$
0	1
a	f
b	e
c	d
d	c
e	b
f	a
1	0

$\wedge$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	0	a	a	0	a
b	0	0	b	0	b	0	b	b
c	0	0	0	c	0	c	c	c
d	0	a	b	0	d	a	b	d
e	0	a	0	c	a	e	c	e
f	0	0	b	c	b	c	f	f
1	0	a	b	c	d	e	f	1

Çizelge 3.5. B üzerindeki birli ve ikili işlemlerin tablosu

O halde bu Nelson cebiri yardımıyla tanımlanan $(B, |, 1)$ yapısı Çizelge 3.6' daki işlem tablosuna sahip bir s-Nelson cebiri belirtir.

$ $	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	1	f	1	1	f	f	1	f
b	1	1	e	1	e	1	e	e
c	1	1	1	d	1	d	d	d
d	1	f	e	1	c	f	e	c
e	1	f	1	d	f	b	d	b
f	1	1	e	d	e	d	a	a
1	1	f	e	d	c	b	a	0

Çizelge 3.6. B üzerindeki $|$ Sheffer stroke işlem tablosu

4. İDEALLER

Bu bölümde, s-Nelson cebirlerin yarı-altcebirleri ve ideallerini tanımlanarak çeşitli özellikleri incelenmiştir. Bu bölümden itibaren, aksi belirtilmedikçe, N bir s-Nelson cebirini ifade etmektedir.

Tanım 4.1. N bir s-Nelson cebiri olsun. Eğer N' nin boştan farklı bir M altkümesi her $x, y \in M$ için $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in M$ koşulunu sağlıyorsa, o zaman M altkümesine N' nin bir yarı-altcebiridir.

Example 4.2. Örnek 3.11'deki B s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O halde B' nin $M = \{0, b, e, 1\}$ altkümesi B' nin bir yarı-altcebiridir.

Tanım 4.3. N bir s-Nelson cebiri olsun. Eğer N' nin boştan farklı bir I altkümesi her $x, y \in N$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, o zaman I altkümesine N' nin bir ideali denir:

$$(NI1) 0 \in I$$

$$(NI2) y \in I \text{ ve } (x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I \text{ ise o zaman } x \in I \text{ dır.}$$

Örnek 4.4. Örnek 3.11' deki B s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman B' nin kendisi, $\{0\}$, $\{0, a, d, b\}$ ve $\{0, c\}$ altkümeleri B' nin bazı idealleridir.

Lemma 4.5. I , bir N s-Nelson cebirinin boştan farklı bir altkümesi olsun. O zaman I , N' nin bir idealidir ancak ve ancak her $x, y \in N$ için

$$(NI3) x \leq y \text{ ve } y \in I \text{ ise o zaman } x \in I, \text{ ve}$$

$$(NI4) x, y \in I \text{ ise o zaman } x \vee y \in I.$$

İspat. I' nin N' nin bir ideali olduğu kabul edilsin. $x \leq y$ ve $y \in I$ olsun. O zhalde Lemma 3.5 ve (NI1)' den $(x|(y|y))|(x|(y|y)) = 1|1 = 0 \in I$ dir. (NI2)' den $x \in I$ elde edilir. $x, y \in I$ olsun. (S1), (S3), Lemma 3.6, (sn1) ve (NI1)' den

$$\begin{aligned} & (((x \vee y)|(y|y))|(x \vee y)|(y|y))|(x|x))|(((x \vee y)|(y|y))|((x \vee y)|(y|y))|(x|x)) \\ & = ((x \vee y)|((x \vee y)|(x \vee y))|((x \vee y)|((x \vee y)|(x \vee y))) \\ & = 1|1 \\ & = 0 \in I \end{aligned}$$

olduğundan (NI2) gereği $x \vee y \in I$ sonucu çıkar.

Diğer yandan, (NI3) ve (NI4) koşullarını sağlayan N' nin boştan farklı bir I altkümesi göz önünde bulundursun. 0 , N' nin en küçük elemanı olduğundan $0 \leq n$ ve $n \in I$ olduğundan (NI3) koşulundan $0 \in I$ dır. $y \in I$ ve $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I$ olsun. Lemma 3.6, Lemma 3.4 (1), (S1)-(S2), (sn2), (NI4)' den ve her $x, y \in I$ için $x \leq x \vee y$ olduğundan

$$\begin{aligned} x \vee y & = (x|x)|(y|y) \\ & = (((n1|n1)|(n2|n2))|1)|(((n1|n1)|(n2|n2))|1) \\ & = (((y|y)|(x|x))|(y|y)|((y|y)|(y|y))|(((y|y)|(x|x))|(y|y)|((y|y)|(y|y)))) \\ & = (x|(y|y))|(y|y) \\ & = ((x|(y|y))|(x|(y|y))) \vee y \in I \end{aligned}$$

dir ve (NI3)' den $x \in I$ sonucu çıkar. □

Lemma 4.6. Bir N s-Nelson cebirinin her ideali N' nin bir yarı-altcebiridir.

İspat. I , N' nin bir ideali ve $x, y \in I$ olsun. (S1), (S3), (sn1) ve Lemma 3.4 (1)' den

$$\begin{aligned} & ((x|(y|y))|(x|(y|y)))|(((x|x)|(y|y))|(x|x)|(y|y))) \\ &= (y|y)|((x|((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))))|(x|(((x|x)|(y|y))|(x|x)|(y|y)))) \\ &= (y|y)|(((x|(x|x))|(x|(x|x))|(y|y))|(((x|(x|x))|(x|(x|x))|(y|y)))) \\ &= (y|y)|(((y|y)|(1|1))|(y|y)|(1|1))) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan Lemma 3.5 ve 3.6 kullanılarak $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \leq (x|x)|(y|y) = x \vee y$ elde edilir. Lemma 4.5' den dolayı $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I$ dir. Öyleyse, I ideali aynı zamanda N' nin bir yarı-altcebiridir. □

Fakat s-Nelson cebirlerde her yarı-altcebir her zaman bir ideal belirtmez.

Örnek 4.7. Örnek 3.11' deki B s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman B' nin $I = \{0, c, d, 1\}$ altkümesi B' nin bir yarı-altcebiridir fakat $(a|(d|d))|(a|(d|d)) = 0 \in I$ ve $d \in I$ iken $a \notin I$ olduğundan I altkümesi B' nin bir ideali değildir.

Teorem 4.8. Bir N s-Nelson cebirinin tüm ideallerinin I_N sınıfı bir tam dağılmalı modüler kafes oluşturur.

İspat. $\{I_i : i \in N\}$ kümesi N' nin ideallerinin bir sınıfı olsun. Her $i \in N$ için $0 \in I_i$ olduğundan $0 \in \bigcup_{i \in N} I_i$ ve $0 \in \bigcap_{i \in N} I_i$ dir. $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in \bigcap_{i \in N} I_i$ ve $y \in \bigcap_{i \in N} I_i$ olduğu varsayalım. Her $i \in N$ için $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I_i$ ve $y \in I_i$ olduğundan $x \in I_i$ elde edilir ve buradan $x \in \bigcap_{i \in N} I_i$ dir. O halde $\bigcap_{i \in N} I_i$ kümesi N' nin bir idealidir. X kümesi N' nin $\bigcup_{i \in N} I_i$ yi kapsayan tüm ideallerinin kümesi olsun. Bu durumda, $\bigcap X$ kümesi de bir idealdir. Eğer $\bigwedge_{i \in N} I_i = \bigcap_{i \in N} I_i$ ve $\bigvee_{i \in N} I_i = \bigcap X$ ise o zaman $(I_N, \vee, \wedge)$ yapısı bir tam kafestir. $\vee$ ve $\wedge$ işlemlerinin tanımlarından $(I_N, \vee, \wedge)$ dağılmalı kafestir. Her dağılmalı kafes modüler olduğundan $(I_N, \vee, \wedge)$ kafesi aynı zamanda modülerdir. □

Sonuç 4.9. V , bir N s-Nelson cebirinin bir altkümesi olsun. O zaman V altkümesini kapsayan N' nin bir $\langle V \rangle$ minimal ideali mevcuttur.

Tanım 4.10. I , bir N s-Nelson cebirinin bir ideali olsun. O zaman I' ya N' nin bir ultra ideali denir ancak ve ancak her $x, y \in I$ için $x \wedge y \in I$ ise $x \in I$ veya $y \in I$ dir.

Örnek 4.11. Örnek 3.11' deki B s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman $\{0, a, b, d\}$, B' nin bir ultra idealidir.

Not 4.12. Bir N s-Nelson cebirinin her ultra ideali N' nin bir idealidir fakat ifadenin tersi her zaman doğrudur değildir.

Örnek 4.13. Örnek 3.11' deki B s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman $I = \{0, b\}$, B' nin bir idealidir fakat $d \wedge f = b \in I$ iken $d, f \notin I$ olduğundan I ideali B' nin ultra ideali değildir.

Önerme 4.14. I , bir N s-Nelson cebirinin bir ideali olsun. O zaman I ideali N' nin bir ultra idealdir ancak ve ancak I ideali aşağıdaki koşulu sağlar:

Her $x \in N$ için $x \in I$ veya $x|x \in I$ dir.....(4.1)

İspat. I ideali N' nin bir ultra ideali olsun. Lemma 3.6 ve $(sn1)'$ den $x \wedge (x|x) = (x|(x|x))|(x|(x|x)) = 1|1 = 0 \in I$ olduğundan her $x \in N$ için $x \in I$ veya $x|x \in I$ dir. Diğer yandan, N' nin herhangi bir I ideali (4.1) koşulunu sağlasın ve $x \wedge y \in I$ olsun. Bir $x \in N$ için $x \notin I$ olsun. O halde $x|x \in I$ olsun. $(S1)$, $(S2)$ ve Lemma 3.6' dan $(y|((x|x)|(x|x))|(y|((x|x)|(x|x)))) = (x|y)|(x|y) = x \wedge y \in I$ olduğundan $(NI2)$ koşulundan $y \in I$ elde edilir. Bir $y \in N$ için $y \notin I$ olsun. Bu durumda, $y|y \in I$ dir. Benzer şekilde, $(S2)$ ve Lemma 3.6' dan $(x|((y|y)|(y|y))|(x|((y|y)|(y|y)))) = (x|y)|(x|y) = x \wedge y \in I$ olduğundan $(NI2)$ den $x \in I$ sonucu çıkar. Öyleyse, I ideali N' nin bir ultra idealidir. $\square$

Önerme 4.15. I , bir N s-Nelson cebirinin bir ideali olsun. O zaman I ideali N' nin bir ultra idealdir ancak ve ancak I ideali aşağıdaki koşulu sağlar:

Her $x, y \in N$ için $x \notin I$ ve $y \notin I$ ise $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I$ veya $(y|(x|x))|(y|(x|x)) \in I$ dir.....(4.2)

İspat. İspat, Önerme 4.14, Lemma 3.7 (1), (3) ve $(S2)'$ den elde edilir. $\square$

Önerme 4.16. I , bir N s-Nelson cebirinin bir ideali olsun. O zaman I ideali N' nin bir ultra idealdir ancak ve ancak I ideali aşağıdaki koşulu sağlar:

Her $x, y \in N$ için $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I$ veya $(y|(x|x))|(y|(x|x)) \in I$ dir.....(4.3)

İspat. Lemma 3.6, $(S1)$ -($S3$), $(sn1)$, Lemma 3.4 (1), (10) ve $(NI2)'$ den ispatlanır.

5. BÖLÜM S-NELSON CEBİRLERİ

Bu bölümde, s-Nelson cebirler üzerinde idealler yardımıyla kongrüans bağıntısı tanımlanmıştır ve bu kongrüans bağıntısı kullanılarak bölüm s-Nelson cebirleri inşa edilmiştir. Elde edilen cebirlerin çeşitli özellikleri kanıtlanmıştır.

Tanım 5.1. R, bir N s-Nelson cebiri üzerinde bir denklik bağıntısı ve her x, y, z için $(x, y) \in R$ ise $(x|z, y|z) \in R$ olsun. O zaman R bağıntısına N üzerinde bir kongrüans bağıntısı denir.

Örnek 5.2. Örnek 3.3’ deki A s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman $R = \{(0, 0), (w_1, w_1), (w_2, w_2), (1, 1), (0, w_1), (w_1, 0), (w_2, 1), (1, w_2)\}$ bağıntısı a üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.

Lemma 5.3. Bir N s-Nelson cebiri üzerindeki bir R denklik bağıntısı N üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır ancak ve ancak her $x, y, m, n \in N$ için $(x, y) \in R$ ve $(m, n) \in R$ ise $(x|m, y|n) \in R$ dir.

İspat. R denklik bağıntısı N üzerinde bir kongrüans bağıntısı, $(x, y) \in R$ ve $(m, n) \in R$ olsun. (S1)’ den $(x|m, y|m) \in R$ ve $(y|m, y|n) \in R$ olduğundan R’ nin geçişme özelliğinden yararlanarak $(x|m, y|n) \in R$ dir. Diğer yandan, her $x, y, m, n \in N$ için $(x, y) \in R$ ve $(m, n) \in R$ ise $(x|m, y|n) \in R$ olacak şekilde R bağıntısı N üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Herhangi $x, y, z \in R$ için $(x, y) \in R$ olduğu varsayalım. $(z, z) \in R$ olduğundan $(x|z, y|z) \in R$ sonucu çıkar. Öyleyse R, N üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır. $\square$

Lemma 5.4. I, bir N s-Nelson cebirinin bir ideali olsun ve N üzerinde λ_I ikili bağıntısı

$$\text{her } x, y \in N \text{ için } (x, y) \in \lambda_I \Leftrightarrow (x|(y|y))(x|(y|y)) \in I \text{ ve } (y|(x|x))(y|(x|x)) \in I$$

biçiminde tanımlansın. O zaman λ_I bağıntısı N üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.

İspat. I, N’ nin bir ideali olsun ve N üzerinde λ_I ikili bağıntısı

$$\text{her } x, y \in N \text{ için } (x, y) \in \lambda_I \Leftrightarrow (x|(y|y))(x|(y|y)) \in I \text{ ve } (y|(x|x))(y|(x|x)) \in I$$

biçiminde tanımlansın.

- λ_I ’nin yansıma özelliği (sn1)’ den elde edilir.
- λ_I ’nin simetri özelliği tanımından açıktır.
- λ_I ’nin geçişme özelliği: $(x, y) \in \lambda_I$ ve $(y, z) \in \lambda_I$ olsun. O halde $(x|(y|y))(x|(y|y)), (y|(x|x))(y|(x|x)), (y|(z|z))(y|(z|z)), (z|(y|y))(z|(y|y)) \in I$ dir. Lemma 3.6, (S2) ve (NI4)’ den $(x|(y|y))(y|(z|z)) = ((x|(y|y))(x|(y|y))) \vee ((y|(z|z))(y|(z|z))) \in I$ olduğundan Lemma 3.7 (7) ve (NI3)’ den $(x|(z|z))(x|(z|z)) \in I$ olur. Benzer şekilde, Lemma 3.6, (S2) ve (NI4)’ den $(z|(y|y))(y|(x|x)) = ((z|(y|y))(z|(y|y))) \vee ((y|(x|x))(y|(x|x))) \in I$ olduğundan Lemma 3.7 (7) ve (NI3)’ den $(z|(x|x))(z|(x|x)) \in I$ sonucu çıkar. Bu durumda, $(x, z) \in \lambda_I$ dir. Öyleyse λ_I bağıntısı N üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Let $(x, y) \in \lambda_I$ and $(m, n) \in \lambda_I$ olsun. O halde $(x|(y|y))(x|(y|y)), (y|(n|n))(y|(n|n)), (m|(n|n))(m|(n|n)), (n|(m|m))(n|(m|m)) \in I$ dir.

1. (S1), (S2) ve Lemma 3.7 (9)’ dan

$$\begin{aligned}
x|(y|y) &= (y|y)|((x|x)|(x|x)) \\
&\leq (m|((y|y)|(y|y)))|((m|((x|x)|(x|x)))|(m|((x|x)|(x|x)))) \\
&= (m|y)|((m|x)|(m|x))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
y|(x|x) &= (x|x)|((y|y)|(y|y)) \\
&\leq (m|((x|x)|(x|x)))|((m|((y|y)|(y|y)))|(m|((y|y)|(y|y)))) \\
&= (m|x)|((m|y)|(m|y))
\end{aligned}$$

olduğundan, Lemma 3.7 (1) ve (S1)' den $((y|m)|((x|m)|(x|m)))|((y|m)|((x|m)|(x|m))) \leq (x|(y|y))|(x|(y|y))$ ve $((x|m)|((y|m)|(y|m)))|((x|m)|((y|m)|(y|m))) \leq (y|(x|x))|(y|(x|x))$ elde edilir. Bu durumda, (NI3)' den $((y|m)|((x|m)|(x|m)))|((y|m)|((x|m)|(x|m))) \in I$ ve $((x|m)|((y|m)|(y|m)))|((x|m)|((y|m)|(y|m))) \in I$ dır ve buradan $(x|m, y|m) \in \lambda_I$ sonucu çıkar.

2. Eğer 1. durumda eş zamanlı olarak $[x:=m]$, $[y:=n]$ ve $[m:=y]$ ikamesi yapılırsa, o zaman (S1)' den that $(y|m, y|n) \in \lambda_I$ olur ve λ_I nın geçişme özelliğinden $(x|m, y|n) \in \lambda_I$ elde edilir. Öyleyse λ_I, N üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır. $\square$

Aşağıdaki teorem, Lemma 5.4' de verilen kongrüans bağıntısı yardımıyla inşa edilen bir s-Nelson cebirinin bölüm grubunun da bir s-Nelson cebiri olduğunu göstermektedir.

Teorem 5.5. I , bir N s-Nelson cebirinin bir ideali ve λ ise I ideali yardımıyla Lemma 5.4' deki gibi tanımlanan bir kongrüans bağıntısı olsun. O zaman $N/\lambda = \{[x]_\lambda : x \in N\}$ bölüm kümesi, N/λ kümesi üzerindeki $|_\lambda$ ikili işlemi $[x]_\lambda |_\lambda [y]_\lambda = [x|y]_\lambda$ biçiminde tanımlı ve $[1]_\lambda |_\lambda [1]_\lambda = [0]_\lambda = I$ olacak şekilde $(N/\lambda, |_\lambda, [1]_\lambda)$ yapısı bir s-Nelson cebiridir.

İspat. I , bir N s-Nelson cebirinin bir ideali ve λ ise I ideali yardımıyla Lemma 5.4' deki gibi tanımlanan bir kongrüans bağıntısı olsun. Her $x, y, z \in N$ için

$$\begin{aligned}
(S1): [x]_\lambda |_\lambda [y]_\lambda &= [x|y]_\lambda = [y|x]_\lambda = [y]_\lambda |_\lambda [x]_\lambda, \\
(S2): ([x]_\lambda |_\lambda [x]_\lambda) |_\lambda ([x]_\lambda |_\lambda [y]_\lambda) &= [(x|x)|(x|y)]_\lambda = [x]_\lambda, \\
(S3): [x]_\lambda |_\lambda ([y]_\lambda |_\lambda [z]_\lambda) |_\lambda ([y]_\lambda |_\lambda [z]_\lambda) &= [x|((y|z)|(y|z))]_\lambda \\
&= [((x|y)|(x|y))|z]_\lambda \\
&= ((([x]_\lambda |_\lambda [y]_\lambda) |_\lambda ([x]_\lambda |_\lambda [y]_\lambda)) |_\lambda [z]_\lambda), \\
(S4): ([x]_\lambda |_\lambda ([x]_\lambda |_\lambda [x]_\lambda) |_\lambda ([y]_\lambda |_\lambda [y]_\lambda)) |_\lambda ([x]_\lambda |_\lambda ([x]_\lambda |_\lambda [x]_\lambda) |_\lambda ([y]_\lambda |_\lambda [y]_\lambda)) &= [x|((x|x)|(y|y))]_\lambda \\
&= [(x|(x|x)|(y|y))|(x|(x|x)|(y|y))]_\lambda \\
&= [x]_\lambda, \\
(sn1): [x]_\lambda |_\lambda ([x]_\lambda |_\lambda [x]_\lambda) &= [x|(x|x)]_\lambda = [1]_\lambda \text{ ve} \\
(sn2): [x]_\lambda |_\lambda ([y]_\lambda |_\lambda [z]_\lambda) &= [x|(y|z)]_\lambda \\
&= [((x|(y|y)|(x|(z|z))))|(x|(y|y)|(x|(z|z))))]_\lambda \\
&= ((([x]_\lambda |_\lambda ([y]_\lambda |_\lambda [y]_\lambda)) |_\lambda ([x]_\lambda |_\lambda ([z]_\lambda |_\lambda [z]_\lambda))) |_\lambda \\
&\quad (([x]_\lambda |_\lambda ([y]_\lambda |_\lambda [y]_\lambda)) |_\lambda ([x]_\lambda |_\lambda ([z]_\lambda |_\lambda [z]_\lambda))))
\end{aligned}$$

olduğundan $(N/\lambda, |_\lambda, [1]_\lambda)$ yapısı bir s-Nelson cebiridir. Ayrıca, $[1]_\lambda |_\lambda [1]_\lambda = [1|1]_\lambda = [0]_\lambda$ dır. $x \in [0]_\lambda$ olsun. $(x, 0) \in \lambda$ olduğundan, Lemma 3.4 (1), (3) ve (S1)' den $x = (x|1)|(x|1) = (x|(0|0))|(x|(0|0)) \in I$ ve $0 = 1|1 = ((x|x)|(1|1))|((x|x)|(1|1)) = (0|(x|x))|(0|(x|x)) \in I$ olur. Bu durumda, $[0]_\lambda \subseteq I$. Şimdi, $x \in I$ olduğu varsayalım. Lemma 3.4 (1), (3) ve (S1)'den $(x|(0|0))|$

$(x|(0|0))=(x|1)|(x|1)=x \in I$ ve $(0|(x|x))|(0|(x|x)) = ((x|x)|(1|1))|((x|x)|(1|1))=1|1=0 \in I$ olduğundan $(x, 0) \in \lambda$ elde edilir. O halde $I \subseteq [0]_\lambda$ dir. Öyleyse, $I=[0]_\lambda$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Örnek 5.6. Örnek 3.11’ deki B s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman B’ nin $I=\{0, c\}$ ideali için B üzerindeki $\lambda=\{(0, 0), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (1, 1), (0, c), (c, 0), (d, 1), (1, d), (a, e), (e, a), (b, f), (f, b)\}$ bağıntısı B üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır. O halde $B/\lambda=\{[0]_\lambda, [b]_\lambda, [e]_\lambda, [1]_\lambda\}$ bölüm kümesi ve Çizelge 5.7’ deki işlem tablosuna sahip $|\lambda$ işlemi B/λ kümesi üzerinde bir Sheffer stroke işlemi olmak üzere $(B/\lambda, |\lambda, [1]_\lambda)$ yapısı bir s-Nelson cebiri belirtir.

$ \lambda$	$[0]_\lambda$	$[b]_\lambda$	$[e]_\lambda$	$[1]_\lambda$
$[0]_\lambda$	$[1]_\lambda$	$[1]_\lambda$	$[1]_\lambda$	$[1]_\lambda$
$[b]_\lambda$	$[1]_\lambda$	$[e]_\lambda$	$[1]_\lambda$	$[e]_\lambda$
$[e]_\lambda$	$[1]_\lambda$	$[1]_\lambda$	$[b]_\lambda$	$[b]_\lambda$
$[1]_\lambda$	$[1]_\lambda$	$[e]_\lambda$	$[b]_\lambda$	$[0]_\lambda$

Çizelge 5.7. B/λ üzerindeki $|\lambda$ Sheffer stroke işleminin tablosu

Lemma 5.7. I, bir N s-Nelson cebirinin bir ideali ve λ ise I ideali yardımıyla Lemma 5.4’ deki gibi tanımlanan bir kongrüans bağıntısı olsun. O zaman N/λ üzerinde

$$[x]_\lambda \leq_\lambda [y]_\lambda \Leftrightarrow (x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I$$

biçiminde tanımlanan $\leq_\lambda$ bağıntısı N/λ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat. Teorem 5.5, (sn1), (S2), Lemma 3.6, Lemma 3.7 (7) ve (NI3)’ den Lemma 3.5’ e benzer şekilde elde edilir. $\square$

Teorem 5.8. I, bir N s-Nelson cebirinin bir ideali olsun. O zaman I, N’ nin bir ultra idealidir ancak ve ancak $(N/\lambda, |\lambda, [1]_\lambda)$ s-Nelson cebiri tam sıralıdır ve $|N/\lambda| \leq 2$ dir.

İspat. ($\Rightarrow$) , N’ nin bir ultra ideali olsun. Teorem 5.5’ den $(N/\lambda, |\lambda, [1]_\lambda)$ yapısı bir s-Nelson cebiridir. Önerme 4.16’ dan her $x, y \in N$ için $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I$ veya $(y|(x|x))|(y|(x|x)) \in I$ olduğundan $[x]_\lambda \leq_\lambda [y]_\lambda$ veya $[y]_\lambda \leq_\lambda [x]_\lambda$ dir ve buradan $(N/\lambda, |\lambda, [1]_\lambda)$ s-Nelson cebiri tam sıralıdır. $|N/\lambda| > 2$ olduğu kabul edilsin. $[0]_\lambda <_\lambda [x]_\lambda <_\lambda [1]_\lambda$ olacak şekilde bir $[x]_\lambda \in N/\lambda$ elemanı var olsun. I, N’ nin bir ultra ideali olduğundan, Önerme 4.14 gereği her $x \in N$ için $x \in I$ veya $x|x \in I$ dir. $x|x \in I$ olduğu varsayalım. Lemma 3.4 (1)-(2) ve (NI1)’ den $(1|(x|x))|(1|(x|x))=x|x \in I$ ve $(x|(1|1))|(x|(1|1))=1|1=0 \in I$ olduğundan $(x, 1) \in \lambda$ sonucu çıkar ve bu durumda $[x]_\lambda = [1]_\lambda$ olur. Bu ise $[x]_\lambda <_\lambda [1]_\lambda$ ile çelişir. Öyleyse, $|N/\lambda| \leq 2$ dir.

($\Leftarrow$) I, N’ nin bir ideali ve $(N/\lambda, |\lambda, [1]_\lambda)$ tam sıralı bir s-Nelson cebiri olsun. $[x]_\lambda \leq_\lambda [y]_\lambda$ veya $[y]_\lambda \leq_\lambda [x]_\lambda$ olduğundan her $x, y \in N$ için $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I$ veya $(y|(x|x))|(y|(x|x)) \in I$ dir. O halde Önerme 4.14’ den I ideali N’ nin bir ultra idealidir. $\square$

Sonuç 5.9. I, bir N s-Nelson cebirinin bir ideali olsun. O zaman $(N/\lambda, |\lambda, [1]_\lambda)$ s-Nelson cebiri tam sıralıdır ancak ve ancak her $x \in N$ için $x \in I$ veya $x|x \in I$ dir.

Sonuç 5.10. I , bir N s-Nelson cebirinin bir ideali olsun. O zaman $(N/\lambda, |\lambda, [1]_\lambda)$ s-Nelson cebiri tam sıralıdır ancak ve ancak her $x, y \in N$ için $x \notin I$ ve $y \notin I$ ise $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I$ veya $(y|(x|x))|(y|(x|x)) \in I$ dır.

Sonuç 5.11. I , bir N s-Nelson cebirinin bir ideali olsun. O zaman $(N/\lambda, |\lambda, [1]_\lambda)$ s-Nelson cebiri tam sıralıdır ancak ve ancak her $x, y \in N$ için $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \in I$ veya $(y|(x|x))|(y|(x|x)) \in I$ dır.

6. FUZZY ALTKÜMELER

Bu bölümde, s-Nelson cebirlerin fuzzy yarı-altcebirleri ve idealleri tanımlanarak bu yeni yapıların çeşitli özellikleri sunulacaktır.

Tanım 6.1. N bir s-Nelson cebiri olsun. Her $x, y \in N$ için $f((x|(y|y))|(x|(y|y))) \leq f(x) \vee f(y)$ koşulunu sağlayan N 'nin bir f fuzzy altkümesine N 'nin fuzzy yarı-altcebir denir.

Örnek 6.2. Örnek 3.3' deki A s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman A üzerinde $f(0) = f(1) = 0.34$ ve $f(w_1) = f(w_2) = 0.97$ biçiminde tanımlanan f fuzzy altkümesi A 'nın bir fuzzy yarı-altcebiridir.

Tanım 6.3. N bir s-Nelson cebiri olsun. Eğer N 'nin bir f fuzzy altkümesi her $x, y \in N$ için

$$(FN1) f(0) \leq f(x),$$

$$(FN2) f(x) \leq f((x|(y|y))|(x|(y|y))) \vee f(y)$$

koşullarını sağlıyorsa f fuzzy altkümesine N 'nin bir fuzzy ideali denir.

Örnek 6.4. Örnek 3.3' deki A s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman A üzerinde $f(0) = f(w_1) = 0.2$ ve $f(w_2) = f(1) = 0.41$ biçiminde tanımlanan f fuzzy altkümesi A 'nın bir fuzzy idealidir.

Lemma 6.5. f , bir N s-Nelson cebirinin bir fuzzy altkümesi olsun. O zaman f fuzzy altkümesi N 'nin bir fuzzy idealidir ancak ve ancak her $x, y \in N$ için f fuzzy altkümesi

$$(FN3) x \leq y \text{ ise } f(x) \leq f(y),$$

$$(FN4) f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

koşullarını sağlar.

İspat. f , bir N s-Nelson cebirinin bir fuzzy ideali ve $x \leq y$ olsun. Lemma 3.5' den $(x|(y|y))|(x|(y|y)) = 1|1 = 0$ olduğundan, sırasıyla (FN2) ve (FN1)' den

$$f(x) \leq f((x|(y|y))|(x|(y|y))) \vee f(y) = f(0) \vee f(y) = f(y)$$

dir. Her $x, y \in N$ için $x, y \leq x \vee y$ olduğundan $f(x), f(y) \leq f(x \vee y)$ dir ve buradan $f(x) \vee f(y) \leq f(x \vee y)$ elde edilir. Lemma 3.6, Lemma 3.7 (1), (5) ve (S2)' den

$$\begin{aligned} ((x \vee y)|(y|y))|((x \vee y)|(y|y)) &= (((x|x)|(y|y))|(y|y))|(((x|x)|(y|y))|(y|y)) \\ &\leq (x|x)|(x|x) \\ &= x \end{aligned}$$

oldüğünden (FN2) koşulu gereği $f(x \vee y) \leq f(((x \vee y)|(y|y))|((x \vee y)|(y|y))) \vee f(y) \leq f(x) \vee f(y)$ sonucu çıkar. Öyleyse, her $x, y \in N$ için $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ dir,

Diğer yandan f , N 'nin (FN3) ve (FN4) koşullarını sağlayan bir fuzzy altkümesi olsun. Her $x \in N$ için $0 \leq x$ olduğundan (FN3) koşulundan $f(0) \leq f(x)$ dir. Lemma 3.7 (5), (FN3), (S2), Lemma 3.6 ve (FN4)' den

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f((x|(y|y))|(y|y)) \\ &= f((((x|(y|y))|(x|(y|y)))|(x|(y|y))|(x|(y|y))))|(y|y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=f(((x|(y|y))|(x|(y|y)))) \vee y) \\
&=f((x|(y|y))|(x|(y|y))) \vee f(y)
\end{aligned}$$

olduğundan f , N' nin bir fuzzy idealidir. $\square$

Önerme 6.6. Bir N s-Nelson cebirinin her fuzzy ideali N' nin bir fuzzy yarı-altcebiridir.

İspat. f , N' nin bir fuzzy ideali olsun. Lemma 3.7 (1) ve (4)' den $(x|(y|y))|(x|(y|y)) \leq x$ olduğundan (FN3) koşulu gereği her $x, y \in N$ için $f((x|(y|y))|(x|(y|y))) \leq f(x) \leq f(x) \vee f(y)$ dir. O halde f , N' nin bir fuzzy yarı-altcebiridir. $\square$

Fakat s-Nelson cebirlerde her fuzzy yarı-altcebir her zaman bir fuzzy ideal değildir.

Örnek 6.7. Örnek 6.2' deki A s-Nelson cebirinin f fuzzy yarı-altcebirini $f((w_1|(1|1))|(w_1|(1|1))) \vee f(1)=f(0) \vee f(1)=f(1) < f(w_1)$ olduğundan N' nin bir fuzzy ideali değildir.

Önerme 6.8. f , bir N s-Nelson cebirinin her $x, y \in N$ için $f((x|(y|y))|(y|y))=\max\{f(x), f(y)\}$ koşulunu sağlayan bir fuzzy yarı-altcebirini olsun. O zaman f , N' nin bir fuzzy idealidir.

İspat. f , N' nin her $x, y \in N$ için $f((x|(y|y))|(y|y))=\max\{f(x), f(y)\}$ koşuluna sağlayan bir fuzzy yarı-altcebirini ve $x \leq y$ olsun. Lemma 3.5' den $x|(y|y)=1$ dir. Lemma 3.4 (2)' den $f(y)=f(1|(y|y))=f((x|(y|y))|(y|y))=\max\{f(x), f(y)\}$ olduğundan $f(x) \leq f(y)$ elde edilir. Ayrıca, her $x, y \in N$ için $f(x) \leq f(x \vee y)$ ve $f(y) \leq f(x \vee y)$ olduğundan $f(x) \vee f(y) \leq f(x \vee y)$ dir. Lemma 3.6, Lemma 3.7 (9), (S1) ve (S2)' den $x \vee y=(x|x)|(y|y) \leq (x|(y|y))|(y|y)$ olduğundan her $x, y \in N$ için $f(x \vee y) \leq f((x|(y|y))|(y|y))=\max\{f(x), f(y)\}=f(x) \vee f(y)$ dir. O halde her $x, y \in N$ için $f(x \vee y)=f(x) \vee f(y)$ olur. Lemma 6.5' den f , N' nin bir fuzzy idealidir. $\square$

Önerme 6.9. f , bir N s-Nelson cebirinin her $x, y \in N$ için $f(x \vee y)=f(x) \vee f(y)$ koşulunu sağlayan bir fuzzy yarı-altcebirini olsun. O zaman f , N' nin bir fuzzy idealidir.

İspat. f , bir N s-Nelson cebirinin her $x, y \in N$ için $f(x \vee y)=f(x) \vee f(y)$ koşuluna sağlayan bir fuzzy yarı-altcebirini olsun. O halde (sn1)' den her $x \in N$ için $f(0)=f(1|1)=f((x|(x|x))|(x|(x|x))) \leq f(x) \vee f(x)=f(x)$ dir. Lemma 3.6, (S1)-(S2) ve Lemma 3.4 (10)' dan

$$\begin{aligned}
f(x) &\leq f(x) \vee f(y) \\
&=f(x \vee y) \\
&=f((x|x)|(y|y)) \\
&=f((x|(y|y))|(y|y)) \\
&=f(((x|(y|y))|(x|(y|y)))) \vee y) \\
&=f((x|(y|y))|(x|(y|y))) \vee f(y)
\end{aligned}$$

olduğundan f , N' nin bir fuzzy idealidir. $\square$

Tanım 6.10. N bir s-Nelson cebiri olsun. N' nin her $x, y \in N$ için $f(x) \wedge f(y)=f(x \wedge y)$ koşulunu sağlayan bir f fuzzy ideale N' nin ultra fuzzy ideali denir.

Örnek 6.11. Örnek 3.11’ deki B s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman B üzerinde $f(0)=f(a)=f(b)=f(d)=0.11$ ve $f(c)=f(e)=f(f)=f(1)=0.75$ biçiminde tanımlanan f fuzzy ideali B’ nin bir ultra fuzzy idealidir.

Lemma 6.12. f, bir N s-Nelson cebirinin bir fuzzy ideali olsun. O zaman f fuzzy ideali N’ nin bir ultra fuzzy idealidir ancak ve ancak her $x \in N$ için $f(x)=f(0)$ veya $f(x|x)=f(0)$ dır.

İspat. f, N’ nin bir ultra fuzzy ideali olsun. Lemma 3.6 ve (sn1)’ den $f(x) \wedge f(x|x)=f(x \wedge (x|x))=f((x|(x|x))|(x|(x|x)))=f(1|1)=f(0)$ olduğundan her $x \in N$ için $f(x)=f(0)$ veya $f(x|x)=f(0)$ dır.

Diğer yandan, her $x \in N$ için $f(x)=f(0)$ veya $f(x|x)=f(0)$ olacak şekilde f, N’ nin bir fuzzy ideali olsun. Eğer $f(x)=f(0)$ veya $f(y)=f(0)$ ise o zaman (FN1) ve (FN2)’ den ispat tamamlanır. $f(x) \neq f(0)$ ve $f(y) \neq f(0)$ olduğu kabul edilsin. O halde $f(x|x)=f(0)$ ve $f(y|y)=f(0)$ dır. Sırasıyla, (FN2), (S2), Lemma 3.6 ve (FN1)’ den

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f((x|((y|y)|(y|y))|(x|((y|y)|(y|y)))) \vee f(y|y) \\ &= f((x|y)|(x|y)) \vee f(y|y) \\ &= f(x \wedge y) \vee f(0) \\ &= f(x \wedge y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(y) &\leq f((y|((x|x)|(x|x))|(y|((x|x)|(x|x)))) \vee f(x|x) \\ &= f((y|x)|(y|x)) \vee f(x|x) \\ &= f(y \wedge x) \vee f(0) \\ &= f(x \wedge y) \vee f(0) \\ &= f(x \wedge y) \end{aligned}$$

oldüğundan her $x, y \in N$ için $f(x) \wedge f(y) \leq f(x \wedge y)$ dir. Ayrıca, $x \wedge y \leq x, y$ olduğundan (FN3)’ den her $x, y \in N$ için $f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y)$ dir. Buradan her $x, y \in N$ için $f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y)$ elde edilir. Öyleyse f, N’ nin bir ultra fuzzy idealidir. $\square$

Lemma 6.13. f, bir N s-Nelson cebirinin bir fuzzy ideali olsun. O zaman f fuzzy ideali N’ nin bir ultra fuzzy idealidir ancak ve ancak her $x, y \in N$ için $f(x) \neq f(0)$ ve $f(y) \neq f(0)$ ise $f((x|(y|y))|(x|(y|y)))=f(0)$ veya $f((y|(x|x))|(y|(x|x)))=f(0)$ dır.

İspat. Lemma 3.2, (FN1)-(FN2), (S1)-(S3), (sn1), Lemma 3.4 (1)-(3)’ den ispatlanır.

Aşağıdaki iki lemma idealler ve fuzzy idealler arasındaki yakın ilişkileri göstermektedir.

Lemma 6.14. M, bir N s-Nelson cebirinin boştan farklı bir altkümesi olsun ve N’ nin λ_M fuzzy altkümesi, $m_1 < m_2$ olmak üzere $m_1, m_2 \in [0, 1]$ için $x \in M$ ise $\lambda_M(x)=m_1$ ve $x \notin M$ ise $\lambda_M(x)=m_2$ biçiminde tanımlansın. O zaman λ_M , N’ nin bir (ultra) fuzzy idealdir ancak ve ancak M altkümesi N’ nin bir (ultra) idealdir. Ayrıca, $N_\lambda = \{x \in N: \lambda_M(x)=\lambda_M(0)\} = M$ dir.

İspat. (FN1), (NI1), (NI2) ve (FN3)’ den elde edilir.

Lemma 6.15. f , bir N s-Nelson cebirinin bir fuzzy altkümesi olsun. O zaman f , N ' nin bir (ultra) fuzzy idealdir ancak ve ancak $\lambda_\epsilon = \{x \in N: f(x) \leq \epsilon\} \neq \emptyset$ altkümesi N ' nin bir (ultra) idealdir.

İspat. (FN1)' den açıktır.

7. HESİTANT FUZZY ALTKÜMELER

Bu bölümde, s-Nelson cebirlerin inf-hesitant fuzzy yarı-altcebirleri ve idealleri tanımlanarak farklı özellikleri araştırılmıştır.

Tanım 7.1. N bir s-Nelson cebiri ve $\delta: N \rightarrow \wp([0, 1])$ bir hesitant fuzzy altküme olsun. O zaman her $x, y \in N$ için $\inf \delta((x|(y|y))|(x|(y|y))) \leq \bigvee \{\inf \delta(x), \inf \delta(y)\}$ koşulunu sağlayan N 'nin δ hesitant fuzzy altkümeye N 'nin bir inf-hesitant fuzzy yarı-altcebiridir.

Örnek 7.2. Örnek 3.3' deki A s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman A üzerinde $\delta(0)=\delta(1)=(0, 0.71)$ ve $\delta(w_1)=\delta(w_2)=(0.11, 1]$ biçiminde tanımlanan N 'nin bir δ hesitant fuzzy altkümeye N 'nin bir inf-hesitant fuzzy yarı-altcebiridir.

Tanım 7.3. N bir s-Nelson cebiri olsun. Eğer N 'nin bir δ hesitant fuzzy altkümeye her $x, y \in N$ için

$$\begin{aligned} (IF1) \quad & \inf \delta(0) \leq \inf \delta(x), \\ (IF2) \quad & \inf \delta(x) \leq \bigvee \{\inf \delta((x|(y|y))|(x|(y|y))), \inf \delta(y)\} \end{aligned}$$

koşullarını sağlıyorsa δ hesitant fuzzy altkümeye N 'nin bir inf-hesitant fuzzy ideali denir.

Örnek 7.4. Örnek 3.11' deki B s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman B üzerinde her $x \in B - \{0, c\}$ için $\delta(0)=\delta(c)=(0.02, 0.87)$ ve $\delta(x) = [0.3, 0.41]$ biçiminde tanımlı N 'nin δ hesitant fuzzy altkümeye N 'nin bir inf-hesitant fuzzy idealidir.

Aşağıdaki lemmaların, önermelerin ve teoremlerin ispatları fuzzy ideallerdeki karşılıklarına benzer şekildedir.

Lemma 7.5. δ , bir N s-Nelson cebirinin bir hesitant fuzzy altkümeye olsun. O zaman δ , N 'nin bir inf-hesitant fuzzy idealidir ancak ve ancak her $x, y \in N$ için

$$\begin{aligned} (IF3) \quad & x \leq y \text{ ise } \inf \delta(x) \leq \inf \delta(y), \\ (IF4) \quad & \inf \delta(x \vee y) = \bigvee \{\inf \delta(x), \inf \delta(y)\} \end{aligned}$$

dir.

Önerme 7.6. Bir N s-Nelson cebirinin her inf-hesitant fuzzy ideali N 'nin bir inf-hesitant fuzzy yarı-altcebiridir.

Fakat s-Nelson cebirlerde her inf-hesitant fuzzy yarı-altcebir bir inf-hesitant fuzzy ideal olmayabilir.

Örnek 7.7. Örnek 7.2' deki A 'nın δ inf-hesitant fuzzy yarı altcebir, $\bigvee \{\inf \delta((w_2|(1|1))|(w_2|(1|1))), \inf \delta(1)\} = \bigvee \{\inf \delta(0), \inf \delta(1)\} = 0 < 0.11 = \inf \delta(w_2)$ olduğundan A 'nin bir inf-hesitant fuzzy ideali değildir.

Önerme 7.8. δ , bir N s-Nelson cebirinin her $x, y \in N$ için $\inf \delta((x|(y|y))|(y|y)) = \bigvee \{\inf \delta(x), \inf \delta(y)\}$ koşulunu sağlayan bir inf-hesitant fuzzy yarı-altcebir olsun. O zaman δ , N 'nin bir inf-hesitant fuzzy idealidir.

Önerme 7.9. δ , bir N s-Nelson cebirinin her $x, y \in N$ için $\inf \delta(x \vee y) = V\{\inf \delta(x), \inf \delta(y)\}$ koşulunu sağlayan bir inf-hesitant fuzzy yarı-altcebiri olsun. O zaman δ , N' nin bir inf-hesitant fuzzy idealidir.

Tanım 7.10. N bir s-Nelson cebiri olsun. N' nin her $x, y \in N$ için $\wedge\{\inf \delta(x), \inf \delta(y)\} = \inf \delta(x \wedge y)$ koşulunu sağlayan bir δ inf-hesitant fuzzy idealine N' nin ultra inf-hesitant inf-hesitant fuzzy ideali denir.

Örnek 7.11. Örnek 3.11' deki B s-Nelson cebiri göz önünde bulundursun. O zaman B üzerinde $\delta(0) = \delta(a) = \delta(c) = \delta(e) = [0.03, 0.7]$ ve $\delta(b) = \delta(d) = \delta(f) = \delta(1) = (0.42, 0.53)$ biçiminde tanımlanan δ inf-hesitant fuzzy ideali B' nin bir ultra inf-hesitant fuzzy idealidir.

Lemma 7.12. δ , bir N s-Nelson cebirinin bir inf-hesitant fuzzy ideali olsun. O zaman δ inf-hesitant fuzzy ideali N' nin bir ultra inf-hesitant fuzzy idealidir ancak ve ancak her $x \in N$ için $\inf \delta(x) = \inf \delta(0)$ veya $\inf \delta(x|x) = \inf \delta(0)$ dır.

Lemma 7.13. δ , bir N s-Nelson cebirinin bir inf-hesitant fuzzy ideali olsun. O zaman δ inf-hesitant fuzzy ideali N' nin bir ultra inf-hesitant fuzzy idealidir ancak ve ancak her $x, y \in N$ için $\inf \delta(x) \neq \inf \delta(0)$ ve $\inf \delta(y) \neq \inf \delta(0)$ ise $\inf \delta((x|(y|y))|(x|(y|y))) = \inf \delta(0)$ veya $\inf \delta((y|(x|x))|(y|(x|x)))) = \inf \delta(0)$ dır.

Aşağıdaki üç lemma idealler, fuzzy idealler ve inf-hesitant fuzzy idealler arasındaki ilişkileri göstermektedir.

Lemma 7.14. δ , bir N s-Nelson cebirinin bir hesitant fuzzy altkümesi olsun. O zaman δ , N' nin bir (ultra) inf-hesitant fuzzy idealidir ancak ve ancak $\delta_\epsilon = \{x \in N: \inf \delta(x) \leq \epsilon\} \neq \emptyset$ altkümesi N' nin bir (ultra) idealidir.

Lemma 7.15. λ , bir N s-Nelson cebirinin bir fuzzy altkümesi olsun ve N' nin δ^λ hesitant fuzzy altkümesi her $x \in N$ için $\delta^\lambda(x) = \{\lambda(x)\}$ yani $\inf \delta^\lambda(x) = \lambda(x)$ olacak biçimde tanımlansın. O zaman λ , N' nin bir (ultra) fuzzy idealidir ancak ve ancak δ^λ , N' nin bir (ultra) inf-hesitant fuzzy idealidir.

Lemma 7.16. δ , bir N s-Nelson cebirinin bir hesitant fuzzy altkümesi olsun ve N' nin λ^δ fuzzy altkümesi her $x \in N$ için $\lambda^\delta(x) = \inf \delta(x)$ olacak biçimde tanımlansın. O zaman δ , N' nin bir (ultra) inf-hesitant fuzzy idealidir ancak ve ancak λ^δ , N' nin bir (ultra) fuzzy idealidir.

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, Sheffer stroke Nelson cebirleri işe bu cebirsel yapılar üzerinde tanımlanan çeşitli idealler, yarı-altcebirler, bölüm grupları ve farklı fuzzy yapıları sunulmuştur. İlk olarak, bir Sheffer stroke Nelson, kısaca s-Nelson, cebir tanımlanarak bu cebir yapısının aksiyomlarının bağımsızlığı gösterilmiştir. Sonrasında, s-Nelson cebirler üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanıtılarak bu cebir yapısının bir sınırlı, dağılmalı modüler kafes belirttiği ifade edilmiştir. Ayrıca, her s-Nelson cebirin bir Nelson cebir olduğu fakat bir Nelson cebirin s-Nelson cebir belirtmesi için özel koşullara sahip olması gerektiği ispatlanmıştır. Ardından, s-Nelson cebirlerin yarı-altcebirleri ve (ultra) idealleri tanımlanarak her idealinin bir yarı-altcebir olduğu ancak ifadenin tersinin genelde doğru olmadığı belirtilmiştir. Dahası, bir s-Nelson cebirin tüm ideallerinin sınıfının bir tam dağılmalı modüler kafes oluşturduğu gösterilmiştir. Özellikle, (ultra) ideal tanımına denk olan oldukça kullanışlı ve farklı ifadeler kanıtlanmıştır. Bu ideallerden yararlanılarak s-Nelson cebirler üzerinde bir kongrüans bağıntısı tanımlanmıştır ve bu kongrüans bağıntısı kullanılarak bölüm s-Nelson cebirleri inşa edilmiştir. Eğer yararlanılan ideal bir ultra ideal ise bölüm s-Nelson cebirinin tam sıralı bir yapı oluşturduğu ve kardinalitesinin 2 veya daha az olduğu görülmüştür. Bunların yanı sıra, teknoloji, endüstri ve özellikle yapay zeka alanlarında oldukça yaygın kullanılan fuzzy teori kavramının s-Nelson cebirler üzerindeki teorik uygulamaları verilmiştir. S-Nelson cebirlerin (ultra inf-hesitant) fuzzy yarı-altcebirleri ve idealleri tanımlanmıştır ve bir s-Nelson cebirin bir (inf-hesitant) fuzzy idealinin bir (inf-hesitant) fuzzy yarı-altcebi olduğu gösterilmiştir. Bir s-Nelson cebirin bir (inf-hesitant) fuzzy yarı-altcebirinin bir (inf-hesitant) fuzzy ideal olduğunun kanıtlanması için özel koşullara ihtiyaç duyulmuştur. Bir s-Nelson cebirin (ultra inf-hesitant)) fuzzy ideal kavramlarına denk ifadelerle yer verilerek bahsi geçen yapılar arasındaki ilişkiler detaylı olarak incelenmiştir. Böylece, fuzzy yapılar ve Sheffer stroke işlemine sahip Nelson cebir yapıları arasındaki benzerlik ve farklılıklar ortaya konmaya çalışılarak bilgisayar bilimleri ve teorik matematik arasındaki ilişkilere katkı sağlanmıştır.

Sonuç olarak, yapılan bu çalışma daha az sayıda, daha kolay denetlenebilir, daha anlaşılır ve daha basit aksiyom sistemine sahip yeni bir cebirsel yapı inşa edilmesini sağlayarak bu yapının teorik altyapı olarak yaygın biçimde kullanıldığı karmaşık bilgisayarlar, yapay zeka ve insan düşünce ve davranışlarını taklit eden robotların geliştirilmesine büyük ölçüde yardımcı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Abbott, J.**, 1967, Implicational algebras, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie*, 11 (1), 3-23.
- Chajda, I.**, 2005, Sheffer operation in ortholattices, *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, 44 (1), 19-23.
- Chajda, I., Halás, R. and Länger, H.**, 2019, Operations and structures derived from non-associative MV-algebras, *Soft Computing*, 23 (12), 3935-3944.
- Chajda, I. and Länger, H.**, 2022, Sheffer operation in relational systems, *Soft Computing*, 26 (1), 1-9.
- Ewald, W. B.**, 1986, Intuitionistic tense and modal logic, *Journal of Symbolic Logic*, 51 (1), 166-179.
- Figallo, A. V. and Pelaitay, G.**, 2014, An algebraic axiomatization of the Ewald's intuitionistic tense logic, *Soft Computing*, 18 (10), 1873-1883.
- Figallo, A. V. and Pelaitay, G., Sarmiento, J.**, 2020, An algebraic study of tense operators on Nelson algebras, *Studia Logica*.
- Rivieccio, U. and Spinks, M.**, 2020, *Quasi-Nelson; 39 or, non-involutive Nelson algebras*, In: Fazio, D., Ledda, A. and Paoli, F. (editors). *Algebraic Perspectives on Substructural Logics*, Trends in Logic, Springer, 55, pp. 133-168.
- Rivieccio, U. and Jansana, R.**, 2021, Quasi-Nelson algebras and fragments, *Mathematical Structures in Computer Science*, 31 (3), 257-285.
- Gomez, C., Marcos, M. A. and San Martin, H. J.**, 2022, On the relation of negations in Nelson algebras, *Reports on Mathematical Logic*, 56, 15-56.
- Katican, T., Oner, T., Rezaei, A. and Smarandache, F.**, 2021, Neutrosophic N-structures applied to Sheffer stroke BL-algebras, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 129 (1), 355-372.
- Markov, A. A.**, 1950, A constructive logic, *Uspehi Matematicheskikh Nauk (N.S.)*, 5, 187-188 (in Russian).
- McCune, W., Veroff, R., Fitelson, B., Harris, K., Feist, A. and Wos, L.**, 2002, Short single axioms for Boolean algebra, *Journal of Automated Reasoning*, 29 (1), 1-16.
- Molkhasi, A. and Shum, K. P.**, 2019, Representations of strongly algebraically closed algebras, *Algebra and Discrete Mathematics*, 28 (1), 130-143.
- Molkhasi, A.**, 2021, Representations of Sheffer stroke algebras and Visser algebras, *Soft Computing*, 25, 8533-8538.
- Nelson, D.**, 1949, Constructible falsity, *Journal of Symbolic Logic*, 14 (1), 16-26.

Oner, T., Katican, T., Borumand Saeid, A. and Terziler, M., 2021a, Filters of strong Sheffer stroke non-associative MV-algebras, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 29 (1), 143-164.

Oner, T., Katican, T. and Borumand Saeid, A., 2021b, Fuzzy Filters of Sheffer stroke Hilbert algebras, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 40 (1), 759-772.

Oner, T., Katican, T. and Borumand Saeid, A., 2021c, Relation between Sheffer stroke and Hilbert algebras, *Categories and General Algebraic Structures with Applications*, 14 (1), 245-268.

Oner, T., Kalkan, T. and Borumand Saeid, A., 2022, Class of Sheffer stroke BCK-algebras, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 30 (1), 247-269.

Rasiowa, H., 1969, N-lattices and constructive logic with strong negation, *Journal of Symbolic Logic*, 34 (1), 118-118.

Rasiowa, H., 1974, *An algebraic aproach to non-classic logic*, North-Holland, Amsterdam.

Sankappanavar, H. P. and Burris, S., 1981, *A course in universal algebra*, Graduate Texts Math, Volume 78.

Sheffer, H. M., 1913, A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants, *Transactions of the American Mathematical Society*, 14 (4), 481-488.

Veroff, R., 2003, A shortest 2-basis for Boolean algebra in terms of the Sheffer stroke, *Journal of Automated Reasoning*, 31 (1), 1-9.

Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information Control*, 8, 338-353.