EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ÇİFTLİ GRAFLARIN TAM BOYANMASI

Zeynep YORGANCIOĞLU

Tez Danışmanı :Prof.Dr.Pınar DÜNDAR

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 403.06.01

Sunuş Tarihi : 28.12.2010

Bornova-İZMİR
2010

Zeynep YORGANCIOĞLU tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan "ÇİFTLİ GRAFLARIN TAM BOYANMASI" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 28.12.2010 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**:**Prof.Dr.Pınar DÜNDAR	**....................**
Üye	**:**Yard.Doç.Dr.Aysun AYTAÇ	**....................**
Üye	**:**Yard.Doç.Dr.Gökşen B. TURAN	**....................**

ÖZET

ÇİFTLİ GRAFLARIN TAM BOYANMASI

YORGANCIOĞLU, Zeynep

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Pınar DÜNDAR
Aralık 2010, 33 sayfa

Bu tezde öncelikle graflarda boyama ölçümleri üzerine günümüze kadar yapılan çalışmalarda elde edilen bilgilere yer verilmiştir. Ardından çiftli grafların tam boyanması çalışılmıştır.

İlk bölümde, graf boyama tarihinden, günlük yaşantıdaki kullanım alanlarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, bu tezi anlamada kolaylık sağlayacak; temel graf tanımlarına ve bazı teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, graflarda boyama ölçümleri olan tepe boyama, ayrıt boyama ve tam boyama özel graflarda incelenmiş, tanımlar verilmiş ve teoremler ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, çiftli grafların tam boyanması üzerine teoremler ispatlanmıştır.

Anahtar sözcükler: Graf boyama, tam boyama, çiftli graf.

ABSTRACT

TOTAL COLORING OF DOUBLE VERTEX GRAPHS

YORGANCIOGLU, Zeynep

MSc in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Pinar DUNDAR
December 2010, 33 pages

In this thesis some knowledges of graph coloring that have been gathered are stated. Next total coloring in double vertex graph is studied.

In the first chapter, the history of graph coloring and the usage of graph coloring in real world is mentioned and also the subject of the thesis is introduced.

In the second chapter some basic definitions for graphs are given in order to make reading of the thesis easy.

In the third chapter some definitions about graph colorings such as vertex coloring, edge coloring and total coloring are given and theorems are proved.

In the fourth chapter the theorems about total coloring in graphs are proved.

Keywords: Graph coloring, total coloring, double vertex graph.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren, seminerlerde önemli açıklamalarda bulunan, gerekli kaynakların sağlanmasında yardımcı olup kıymetli görüşlerini benimle paylaşan, değerli Hocam Sayın Prof. Dr. Pınar DÜNDAR' a, yüksek lisans eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım tüm değerli hocalarıma ve tez çalışmalarım sırasında benden maddi-manevi desteğini esirgemeyen sevgili aileme ve eşime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Graf boyama, 1852 yılında ortaya atılan bir problem sonucu doğmuştur. Problem; siyasi haritalarda komşu ülkeler farklı şekilde boyanmak üzere haritanın renklendirilmesi için gerekli en az renk sayısını sorgulamaktadır.

Bir haritanın boyanması için dört rengin yeterli olacağını ilk sezinleyen, 1852 de öğrenci olan ileride matematikçi olacak Francis Guthrie dir. Kardeşi Frederick Guthrie'ye bundan bahsetmiş, bunun matematiksel ispatının nasıl olacağını sormuştur. Soruya cevap bulamayan Frederick de problemi hocası Augustus De Morgan'a götürmüştür. Ancak De Morgan da sorunun cevabını bilmemektedir. Problem 1976 yılında Kenneth Appel ve Wolfgang Haken tarafından çözüme kavuşturulmuştur. Problemin daha basit bir ispatı 20 yıl sonra Robin Thomas, Daniel Sanders, Paul Seymour ve Neil Robetson tarafından verilmiştir. Söz konusu ispat bilgisayar destekli olup, matematiksel basit kanıt için hala uğraşılmaktadır. (Berkman, 2010)

Graf boyama fikri birçok planlama probleminin çözümünde kullanılmaktadır. Örneğin sınav zaman çizelgelerinin çakışmayacak şekilde hazırlanmasında, kimya labaratuarlarına kimyasalların tepkime vermeyecek şekilde yerleştirilmesinde kullanılır. Bu durumda planlama problemleri tepe boyama problemine dönüşür.

Bu çalışmada ilk olarak tezi anlamada kolaylık sağlayacak bazı tanım ve özellikler sunulmuştur. Graflarda tepe boyama, ayrıt boyama ve tam boyama tanımları, bazı teoremler verilmiş, özel graflarda bu tanımlar incelenmiştir. Son olarak özel grafların çiftli graflarında tam boyama konusunda çalışılmış, teoremlerin ispatı yapılarak genellemelere ulaşılmıştır.

2.ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Graf Tanımları

Bu bölümde, bazı temel graf tanımları ve teoremleri verilmiştir.

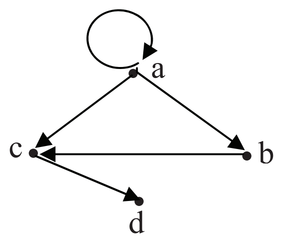
Tanım 2.1.1 Graf (G); bağıntının şekilsel gösterimidir. Elimizdeki problemin çözümü için bize görsel olarak kolaylık sağlayan bir yapıdır.

V, boştan farklı, n elemanlı bir tepeler kümesi, V→V ye, bir R bağıntısı da grafın ayrıtlar kümesi olan E yi göstermek üzere; G = (V, E) ye bir “graf (graph)” denir. Bir G grafının tepeleri, düzlemde noktalar ile gösterilir. Gerçekte bu tepeler, günlük yaşamdaki herhangi bir nesneye karşılık getirilebilir. Benzer şekilde bir grafın ayrıtları, düzlemde iki noktayı birleştiren bir çizgi olup, günlük yaşamda iki nesne arasındaki ilişkiyi belirtir. Bir G grafında v_i, $v_j \in$ V için, ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$) her bir ayrıtı (v_i, v_j) ikilileri şeklinde ifade edilir. V tepeler kümesinin eleman sayısı |V|, E ayrıtlar kümesinin eleman sayısı |E| ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 Bir G grafı ayrıtının başlangıç ve bitiş tepesi aynı tepe ise bu ayrıta “bukle (loop)” denir.

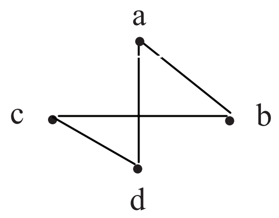
Tanım 2.1.3 Bir G grafında bir tepe çifti iki veya daha fazla ayrıt ile bağlanmışsa bu grafa “katlı ayrıtlı graf (multi edge graph)” denir.

Tanım 2.1.4 Simetrik olmayan bağıntıların graflarına “yönlendirilmiş graf (directed graph)” denir. Yönlendirilmiş grafların her ayrıtı yönlüdür.



Şekil 2.1 Yönlendirilmiş Graf

Tanım 2.1.5 Simetrik bağıntıların graflarına “yönlendirilmemiş graf (undirected graph)” denir**.** Yönlendirilmemiş graflar genelde “G” harfi ile gösterilir.



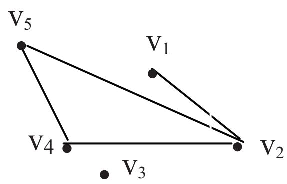
Şekil 2.2 Yönlendirilmemiş Graf

Tanım 2.1.6 Yönlendirilmemiş, katlı ayrıtlı olmayan ve bukle içermeyen graflara “basit graf (simple graph)” denir.

Tanım 2.1.7 Bir G grafında (v_i, v_j) ayrıtının tepelerine “bitişik tepeler (adjacent vertex)” denir.

Tanım 2.1.8 Bir G grafının herhangi bir v_i tepesine bağlı ayrıtların sayısına o tepenin derecesi denir ve deg(v_i) ile gösterilir. Tepe derecelerinin en büyüğüne o grafın en büyük tepe derecesi, en küçüğüne ise en küçük tepe derecesi denir ve sırasıyla Δ (G) ve δ(G) ile gösterilir. Yönlendirilmiş bir grafta ise v_i de başlayan ayrıtların sayısı $\deg^{+}(v_i)$ şeklinde, v_i de biten ayrıtların sayısı $\deg^{-}(v_i)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.9 Sıfırıncı dereceden tepeye “ayrık tepe (izolated vertex) ” denir.



G Grafı

G grafının tepe dereceleri: deg(v_1) =1, deg(v_2) = 3, deg(v_3) = 0, deg(v_4) = 2,

deg (v_5) = 2 ve v_3 tepesi ayrık tepedir.

Teorem 2.1.1 Bir G grafında tepe derecelerinin toplamı, ayrıt sayısının 2 katına eşittir. (West, 2001)

Teorem 2.1.2 Bir G grafında tek dereceli tepelerin sayısı çiftir. (West, 2001)

Tanım 2.1.10 Bir G grafının tepe ve ayrıt kümesi boş küme ise bu grafa "boş–graf (empty graph)" denir.

Tanım 2.1.11 Bir G grafının tüm tepelerine ait dereceler r ye eşit ise bu grafa "r-düzenli graf (r-regular graph)" denir.

Tanım 2.1.12 Ayrıtlar kümesi boş olan grafa "sıfır graf (null graph)" denir. n tepeli sıfır graf N_n ile gösterilir.

Tanım 2.1.13 Başlangıç ve bitiş tepeleri tek dereceli olup diğer tepeleri iki dereceli olan graflara "yol graf (path graph)" denir ve n tepeli yol graf P_n ile gösterilir.

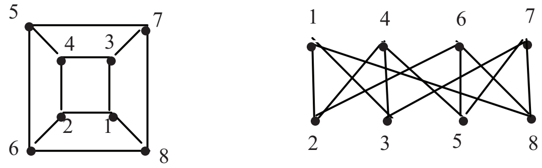
Tanım 2.1.14 Her tepesi 2 dereceli olan grafa "çevre graf (cycle graph)" adı verilir ve n tepeli çevre graf C_n ile gösterilir.

Tanım 2.1.15 Bir G grafının her bir tepesi, grafın diğer tepelerinin her birine bir ayrıt ile birleştirilmiş ise bu grafa "tam graf (complete graph)" denir ve n tepeli bir tam graf K_n ile gösterilir.

Tanım 2.1.16 n tepeli bir çevre grafın her bir tepesine bir tek tepeden ayrıtlar çizilerek oluşturulan grafa "tekerlek graf (wheel graph)" denir ve n+1 tepeli bir tekerlek graf $W_{1,n}$ ile gösterilir. Tekerlek grafı K_1+C_n şeklinde de ifade etmek mümkündür.

Tanım 2.1.17 Bir G grafı C_3 (ya da K_3) ise bu grafa "üçgen graf (triangle graph)" denir.

Tanım 2.1.18 Bir G grafının tepeler kümesi birleşimleri V yi veren, arakesitleri boş olan ($V_1 \cup V_2 = V$ ve $V_1 \cap V_2 = \varnothing$) ve her ayrıtının bir tepesi V_1 de diğer tepesi V_2 de olacak şekilde iki kümeye ayrılabiliyorsa bu grafa "iki parçalı graf (bipartite graph)" denir. V_1 ve V_2 kümelerinin eleman sayıları sırasıyla m ve n olmak üzere iki parçalı bir graf $G_{m,n}$ ile gösterilir. Bu iki kümeden herhangi birinin her bir tepesi diğer kümenin her bir tepesine bir ayrıtla birleştirilmiş ise bu grafa "iki parçalı tam graf (complete bipartite graph)" denir ve (m+n) tepeli böyle bir graf $K_{m,n}$ ile gösterilir.

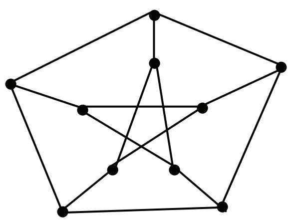


$G_{4,4}$ $G_{4,4}$

Şekil 2.7 İki Parçalı Tam Graf

Tanım 2.1.19 İki parçalı bir tam grafta m=1 ise bu grafa "yıldız graf (star graph)" denir ve n+1 tepeli bir yıldız graf $S_{1,n}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.20 Bir G grafı 10 tepeli ve 3-düzenli graf ise bu grafa "Petersen grafı" denir.



Şekil 2.4 Petersen Grafı

Tanım 2.1.21 G grafında |V|=n olmak üzere elemanları;

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{i tepesi j tepesine bitişik ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı A_{nxn} matrisine G nin "bitişiklik matrisi (adjacency matrix)" denir.

Tanım 2.1.22 G grafında |V|=n ve |E|=m olmak üzere elemanları;

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ i tepesi j ayrıtına bitişik ise,} \\ \\ 0, \text{ aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı B_{nxm} matrisine "komşuluk matrisi (incidence matrix)" denir.

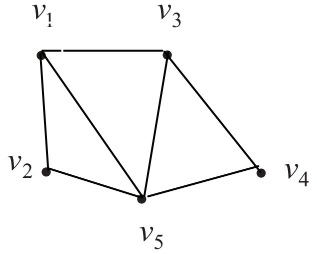
Tanım 2.1.23 G = (V,E) grafı verilsin. $V_1 \subset V$ ve $E_1 \subset E$ olacak şekilde tanımlanan $G_1 = (V_1, E_1)$ grafına G grafının bir "alt grafı (sub graph)" denir.

Tanım 2.1.24 G = (V,E) grafı verilsin. $V_1 = V$ ve $E_1 \subset E$ olacak şekilde tanımlanan $G_1 = (V, E_1)$ grafına G grafının bir "dallanmış alt grafı (spanning sub graph)" denir.

Tanım 2.1.25 Bir G grafında, u tepesinden başlayarak v tepesine erişen, ayrıt ve tepelerden istenildiği kadar geçilen iletişime bir "yürüyüş (walk)" denir.

Tanım 2.1.26 Bir G grafında, u tepesini v tepesine bağlayan bir yürüyüşte kullanılan her ayrıt sadece bir kez kullanılmışsa bu iletişime bir "zincir (chain)" denir.

Tanım 2.1.27 Bir G grafında, u tepesini v tepesine bağlayan bir zincirde kullanılan her tepe sadece bir kez kullanılmışsa bu iletişime bir "yol (path)" denir.



G Grafı

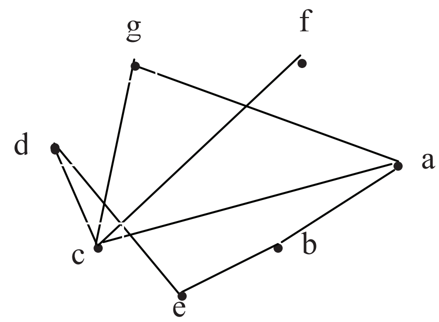
Şekildeki G grafına ait v_1 tepesinden v_5 tepesine bir yürüyüş; v_1, v_3, v_4, v_3, v_1, v_2, v_1, v_3, v_5

Şekildeki G grafına ait v_1 tepesinden v_5 tepesine bir zincir; v_1, v_3, v_4, v_5, v_1, v_2, v_5

Şekildeki G grafına ait v_1 tepesinden v_5 tepesine bir yol; v_1, v_3, v_4, v_5

Tanım 2.1.28 Bir G grafında u tepesini v tepesine bağlayan bir iletişimde kullanılan ayrıt sayısına “iletişimin uzunluğu” denir.

Tanım 2.1.29 Bir G grafının her tepe çifti arasında bir yol varsa bu grafa “birleştirilmiş graf (connected graph)” denir.



Şekil 2.5 Birleştirilmiş Graf

Tanım 2.1.30 Bir G grafının çevre içermeyen birleştirilmiş bir alt grafına G nin bir “ağacı (tree)” denir.

- n tepeli bir ağaç (n-1) tane ayrıt içerir.
- Her tepe çifti arasında sadece bir tane yol vardır.

Bu tez çalışmasında basit, birleştirilmiş graflar kullanılmıştır.

3. GRAFLARDA BOYAMA ÖLÇÜMLERİ

Tez çalışmasının bu bölümünde graf boyama tanımları, algoritmaları, teoremleri ve kromatik polinoma yer verilmiştir.

3.1 Tepe Boyama

"Kimya bölümündeki kimyasal maddelerin odalara yerleştirilmesi gerekiyor. Ancak birbiriyle etkileşim halinde olan kimyasallar aynı odada olmamalıdır. Bu durumda kimyasalların yerleşmesi için en az kaç oda gereklidir?" şeklindeki problemlere tepe boyama ile cevap bulunabilir. Bu problem G = (V,E) grafına taşınacak olursa, tepeler kümesi kimyasal maddeleri, ayrıtlar kümesi de birbiriyle etkileşimde olan kimyasal maddeler arasındaki bağları gösterir. G grafının tepe boyanması için gerekli en az renk sayısı, en az oda sayısına eşittir. Bu sayı da G grafının kromatik sayısını verir.

Tanım 3.1.1 Bir G grafının tepelerinin birbirine bitişik olan iki tepesinin farklı renkte olacak şekilde boyanmasına "tepe boyama (vertex coloring)" denir. Tepe boyama için gerekli en az renk sayısına da grafın "kromatik sayısı (chromatic number)" denir ve $\chi(G)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.1 G basit bir graf olsun. O zaman

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

dir. (Aldous, 2006)

Teorem 3.1.2 Brooks Teoremi

G birleştirilmiş basit bir graf olsun. G grafı tepe sayısı tek olan çevre graftan ve tam graftan farklı olmak üzere

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

dir. (Xu, 2003)

Teorem 3.1.3 G ve H bir graf olsun. Eğer H grafı G grafının bir alt grafı ise

$$\chi(H) \leq \chi(G)$$

dir. (Chartrand, 1996)

3.2 Tepe Boyama Algoritması

Tepe boyama için geliştirilmiş etkili bir algoritma yoktur. Ancak gerçek değere yaklaştıran sezgisel algoritmalar vardır. Bunlardan biri de Greedy Algoritmasıdır.

Greedy Algoritması:

A0: Bir G grafı ve renklerin bir listesini oluşturarak başla,

A1: Tepeleri a, b, c, ... harfleri ile etiketle,

A2: Alfabetik sırada ilk önce gelen boyanmamış tepeyi belirle, bitişik tepelerle aynı renk olmayacak şekilde listedeki ilk renkle bu tepeyi boya,

A3: Tüm tepeler boyanıncaya kadar A2 yi tekrarla,

A4: Son.

3.3 Özel Graflarda Kromatik Sayı

Özel grafların kromatik sayılarını kullanarak, grafların kromatik sayısı bulunabilir. (Gross, 1999) kitabından alınan teoremler aşağıdadır.

Teorem 3.3.1 K_n n tepeli bir tam graf olsun. O zaman

$$\chi(K_n) = \text{n}$$

dir.

Teorem 3.3.2 $G_{m,n}$ iki parçalı bir graf olsun. O zaman

$$\chi(G_{m,n}) = 2$$

dir.

Teorem 3.3.3 P_n n tepeli bir yol graf olsun. O zaman

$$\chi(P_n) = 2$$

dir.

Teorem 3.3.4 T bir ağaç graf olsun. O zaman

$$\chi(T) = 2$$

dir.

Teorem 3.3.5 $S_{1,n}$ bir yıldız graf olsun. O zaman

$$\chi(S_{1,n}) = 2$$

dir.

Teorem 3.3.6 C_n n tepeli bir çevre graf olsun. O zaman

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n = 2k \quad k = \overline{1,n} \\ 3, & n = 2k+1 \quad k = \overline{1,n} \end{cases}$$

dir.

Teorem 3.3.7 $W_{1,n}$ bir tekerlek graf olsun. O zaman

$$\chi(W_{1,n}) = \begin{cases} 3, & n = 2k \quad k = \overline{1,n} \\ 4, & n = 2k+1 \quad k = \overline{1,n} \end{cases}$$

dir.

3.4 Kromatik Polinom

Tanım 3.4.1 Ayrıt büzme; graftan ayrıt silerken silinen ayrıta ait tepeleri birleştirme işlemidir. Ayrıt silme işlemi ise silinecek ayrıtın graftan çıkarılmasıdır.

Tanım 3.4.2 Bir G grafının $P_G(\lambda)$ ile gösterilen kromatik polinomu, $\lambda \in$ N için, bitişik tepeler farklı renk olmak üzere, λ renk kullanarak G grafının tepelerinin kaç farklı şekilde boyanacağını hesaplar.

Kromatik Polinom hesaplama metodlarından biri Silme ve Büzme Algoritmasıdır (Deletion and Contraction). Bu algoritma, graftan ayrıt silerek ve büzerek grafı; kromatik polinomunun hesaplanması daha kolay olan sıfır grafa indirgemektedir. Bu sıfır grafların kromatik polinomları toplanarak grafın kromatik polinomuna ulaşılır. (Tang, 2005)

G bir graf olsun.

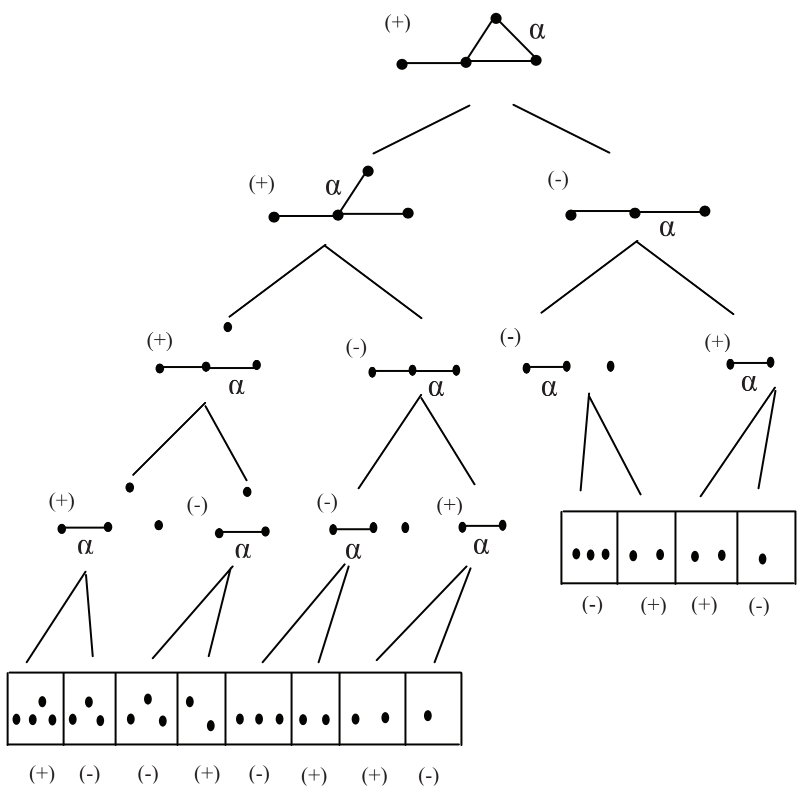
1. G ye pozitif değer ver.

2. Bir ayrıtı α ile işaretlenmiş graf olduğunda,

i) Ayrıtı α ile işaretlenmiş ve izole olmayan grafı seç.

ii) α ile işaretlenmiş ayrıtı graftan çıkar; ayrıt çıkarırken grafın işaretini koru, ayrıt büzerken grafın işaretinin tersini al.

3. Geriye kalan sıfır grafların kromatik polinomlarını uygun işaretleriyle topla.



Şekil 3.1 Silme ve Büzme Algoritması Kullanarak
4 - tepeli bir Grafın Sıfır Grafa İndirgenmesi

Şekil 3.1 de alınan 4- tepeli grafa uygulanan Silme ve Büzme algoritmasının sonunda sadece sıfır graflar kalmıştır. n tepeli sıfır grafların kromatik polinomu λ^n dir. Bu durumda algoritmanın sonunda elde edilen sıfır grafların kromatik polinomlarının toplamı,

$$P_G(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^1 - \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^1$$
$$= \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda^1$$

grafın kromatik polinomunu verir.

Teorem 3.4.1 G grafı n tepeli, m ayrıtlı ve G_1, G_2, ... , G_k gibi k birleşenden oluşan bir graf olsun. (Harary, 1994)

1. $P_G(\lambda)$, n derecelidir.

2. $P_G(\lambda)$ da λ^n nin katsayısı 1 dir.

3. $P_G(\lambda)$ da λ^{n-1} nin katsayısı (–m) dir.

4. $P_G(\lambda)$ nın sabit terimi 0 dır.

Teorem 3.4.2 Eğer $\lambda < \chi(G)$ ise $P_G(\lambda) = 0$ olur. (Harary, 1994)

Teorem 3.4.3 $P_G(\lambda) > 0$ için en küçük λ sayısı G grafının kromatik sayısıdır. (Harary, 1994)

Teorem 3.4.4 G grafı, K_n tam grafı ise,

$$P_{K_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots (\lambda - n + 1)$$

dir. (Harary, 1994)

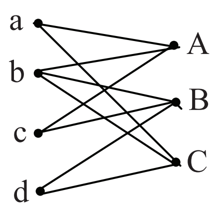
Teorem 3.4.5 n tepeli bir G grafının ağaç graf olması için gerek ve yeterli koşul

$$P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$$

olmasıdır. (Harary, 1994)

3.5 Ayrıt Boyama

"Öğretim dönemi sonunda öğrenciler eğitmenleri tarafından bir saat süren mülakatlara alınmaktadır. Bu mülakatlar en az kaç periyotta tamamlanabilir?" şeklindeki problemlere ayrıt boyama ile cevap bulunabilir. Bu problem daha basite indirgenecek olursa; a, b, c, d öğrenciler ve A, B, C eğitmenler olsun. a öğrencisinin eğitmenleri A ve C, b öğrencisinin eğitmenleri A, B ve C, c öğrencisinin eğitmenleri A ve B, d öğrencisinin eğitmenleri B ve C olsun. Bu problem G = (V,E) grafına taşınacak olursa;



iki parçalı G grafı elde edilir. İki parçalı grafın ayrıt boyanması için gerekli en az renk sayısı mülakatların en az kaç periyotla gerçekleşeceğini verir. Bu G grafının ayrıtları en az 3 renkle boyanır. Yani mülakatlar 3 periyotta gerçekleşebilir. Örneğin; {aA, bB, dC} mülakatı saat 9:00 da, {aC, bA, cB} mülakatı saat 10:00 da, {bC, cA, dB} mülakatı saat 11:00 de gerçekleşebilir.

Tanım 3.5.1 Bir G grafının ayrıtlarının birbirine bitişik olan iki ayrıt farklı renkte olacak şekilde boyanmasına "ayrıt boyama (edge coloring)" denir. Ayrıt boyama için gerekli en az renk sayısına da grafın "ayrıt boyama sayısı (edge coloring number)" denir ve $\chi_1(G)$ ile gösterilir.

Teorem 3.5.1 Vizing Teoremi

G basit bir graf olsun. O zaman

$$\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G)+1$$

dir. (Aldous, 2006)

Teorem 3.5.2 Shannon Teoremi

G basit bir graf olsun. O zaman

$$\Delta(G) \text{ çift ise; } \Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \frac{3\Delta(G)}{2} \ ,$$

$$\Delta(G) \text{ tek ise; } \Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \frac{3\Delta(G)-1}{2} \ ,$$

dir. (Aldous, 2006)

Teorem 3.5.3 König Teoremi

G iki parçalı bir graf olsun. O zaman

$$\chi_1(G) = \Delta(G)$$

dir. (Aldous, 2006)

Teorem 3.5.4 K_n n tepeli bir tam graf olsun. O zaman

$$\chi_1(K_n) = \begin{cases} n-1, & n = 2k \quad k = \overline{1,n} \\ n, & n = 2k+1 \quad k = \overline{1,n} \end{cases}$$

dir. (Matematik Dünyası, 2003)

3.6 Ayrıt Boyama Algoritması

Greedy Algoritması:

A0: Bir G grafı ve renklerin bir listesini oluşturarak başla,

A1: Ayrıtları a, b, c, ... harfleri ile etiketle,

A2: Alfabetik sırada ilk önce gelen boyanmamış ayrıtı belirle, komşu ayrıtlarla aynı renk olmayacak şekilde listedeki ilk renkle bu ayrıtı boya,

A3: Tüm ayrıtlar boyanıncaya kadar A2 yi tekrarla,

A4: Son.

3.7 Özel Graflarda Ayrıt Boyama Sayısı

Özel grafların ayrıt boyama sayıları kullanılarak, grafların ayrıt boyama sayısı bulunabilir.

Teorem 3.7.1 P_n n tepeli bir yol graf olsun. O zaman

$$\chi_1(P_n) = \Delta(P_n) = 2 \quad (n>2)$$

dir.

İspat: Yol graflar iki parçalı graflar olduğundan Teorem 3.5.3 den, ayrıt boyama sayısı, yol grafın en büyük tepe derecesi olan 2 ye eşittir.
(Gross, 1999) kitabında aynı sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.7.2 T bir ağaç graf olsun. O zaman

$$\chi_1(T) = \Delta(T)$$

dir.

İspat: Ağaç graflar iki parçalı graflar olduğundan Teorem 3.5.3 den, ayrıt boyama sayısı ağaç grafın en büyük tepe derecesine eşittir.
(Gross, 1999) kitabında aynı sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.7.3 $S_{1,n}$ bir yıldız graf olsun. O zaman

$$\chi_1\,(S_{1,n}) = \Delta(S_{1,n}) = \mathrm{n}$$

dir.

İspat: Yıldız graflar iki parçalı graflar olduğundan Teorem 3.5.3 den, ayrıt boyama sayısı yıldız grafın en büyük tepe derecesine eşittir.
(Gross, 1999) kitabında aynı sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.7.4 C_n n tepeli bir çevre graf olsun. O zaman

$$\chi_1\,(C_n) = \begin{cases} 2, & \mathrm{n} = 2\mathrm{k} \quad \mathrm{k} = \overline{1,n} \\ & \\ 3, & \mathrm{n} = 2\mathrm{k}+1 \quad \mathrm{k} = \overline{1,n} \end{cases}$$

dir.

İspat: C_{2k} çevre grafı iki parçalı graf olduğundan Teorem 3.5.3 den, ayrıt boyama sayısı $\Delta(C_n) = 2$ ye eşittir. C_{2k+1} çevre grafının ayrıtları $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, ..., \mathrm{e}_{2\mathrm{k}+1}$ olsun. Alt indisi tek olan ayrıtlar bir renk, çift olan ayrıtlar ise bir renk olacaktır. Ancak e_1 ayrıtı ile e_{2k+1} ayrıtı komşu olduğundan aynı renkler çakışır. C_{2k+1} çevre grafının ayrıtlarını boyamak için 3 renk gereklidir.
(Gross, 1999) kitabında aynı sonuçlar elde edilmiştir.

3.8 Tam Boyama

Tam boyama terimi ve tam boyama varsayımı ifadesi 1964 ve 1968 yılları arasında Behzad ve Vizing tarafından ileri sürülmüştür. Bu varsayımın tüm iki parçalı graflar gibi diğer birkaç önemli graflar sınıfında da geçerli olduğu bilinmektedir.

Tanım 3.8.1 Bir G grafının; bitişik tepeleri ve komşu ayrıtları farklı renkte olacak ve her bir ayrıt ile o ayrıtın bitiş tepeleri aynı renk olmayacak şekilde, grafın tepe ve ayrıtlarının boyanmasına "tam boyama (total coloring)" denir. Tam boyama için gerekli en az renk sayısına grafın "tam boyama sayısı (total coloring number)" denir ve $\chi_T(G)$ ile gösterilir. (Saetung, 2010)

Teorem 3.8.1 G bir graf olsun. O zaman

$$\chi_T(G) \geq \chi(G)$$

dir.

İspat : Tam boyama yapmak için hem tepe boyama hem de ayrıt boyama yapıldığından bu eşitsizlik vardır.

Teorem 3.8.2 G bir graf olsun. O zaman

$$\chi_T(G) \geq \chi_1(G)$$

dir.

İspat : Tam boyama yapmak için hem tepe boyama hem de ayrıt boyama yapıldığından bu eşitsizlik vardır.

Teorem 3.8.3 G, boştan farklı bir graf olsun. O zaman

$$\chi_T(G) \geq \frac{1}{2}\ [\,\chi(G) + \chi_1(G)\,]$$

dir.

İspat : $\chi_T(G) \geq \chi(G)$ ve $\chi_T(G) \geq \chi_1(G)$ eşitsizliklerini taraf tarafa toplamak yeterlidir.

Teorem 3.8.4 G bir graf olsun. O zaman

$$\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$$

dir. (Wikipedia, 2010)

Teorem 3.8.5 Behzad ve Vizing Tam Boyama Varsayım Teoremi

G bir graf olsun. O zaman

$$\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$$

dir. (Saetung, 2010)

Teorem 3.8.6 G bir graf olsun. O zaman

$$\Delta(G) = 3 \ \text{ise}\ \chi_T(G) \leq 6$$

dır. (Chen, 2008)

Teorem 3.8.7 T bir ağaç graf olsun. O zaman

$$\Delta(T) + 1 \leq \chi_T(T) \leq \Delta(T) + 2$$

dir. (Wang, 2009)

3.9 Özel Graflarda Tam Boyama Sayısı

Teorem 3.9.1 P_n n tepeli bir yol graf olsun. O zaman

$$\chi_T(P_n) = \Delta(P_n) + 1 = 3$$

dür.

İspat: Yol grafın tepe ve ayrıtlarını en az renkle boyamak için en büyük dereceli tepe ve bu tepeye bitişik ayrıtlar boyanmalıdır. $\Delta(P_n) = 2$ dir ve 2+1=3 olduğundan $\chi_T(P_n) = 3$ elde edilir.
Yol grafta tam boyama; tepe, ayrıt, tepe sıralamasıyla yapıldığında $\chi_T(P_n) = 3$ dür.

Teorem 3.9.2 C_n, n tepeli bir çevre graf olsun. O zaman

$$\chi_T(C_n) = \begin{cases} \Delta(C_n) + 1 = 3, & \text{n=3k} \quad k = \overline{1,n} \\ \Delta(C_n) + 2 = 4, & \text{n=3k+1} \quad k = \overline{1,n} \\ \Delta(C_n) + 2 = 4, & \text{n=3k+2} \quad k = \overline{1,n} \end{cases}$$

dir.

İspat: n= 3k için; Çevre grafın tepe ve ayrıtlarını en az renkle boyamak için en büyük dereceli tepe ve bu tepeye bitişik ayrıtlar boyanmalıdır. $\Delta(C_n) = 2$ dir. 2+1= 3 olduğundan $\chi_T(C_n) = 3$ olur.

Çevre grafta (n= 3k için) tam boyama; tepe, ayrıt, tepe sıralamasıyla yapıldığında $\chi_T(C_n) = 3$ dür.

n= 3k+1 için; Çevre grafta tam boyama yapılırken 3 renkle tepeler ve ayrıtlar boyanır ancak tam boyama kuralından dolayı komşu ayrıtlar ve bitişik tepeler farklı renk olacağından bir renge daha gerek vardır. Bu sebeple boyama için gerekli en az renk sayısı 4 dür.

n= 3k+2 için; Çevre grafta tam boyama yapılırken tepe, ayrıt, tepe sıralamasıyla 3 renkle boyama yapılır. Ancak bu 3 renkle grafın başlangıç tepesiyle bitiş ayrıtı aynı renk olacağından farklı bir renge daha gereksinim vardır. Bu sebeple boyama için gerekli en az renk sayısı 4 dür.

Teorem 3.9.3 K_n , n tepeli bir tam graf olsun. O zaman

$$\chi_T(K_n) = \begin{cases} \Delta(K_n) + 2, & n = 2k \quad k = \overline{1,n} \\ \Delta(K_n) + 1, & n = 2k+1 \quad k = \overline{1,n} \end{cases}$$

dir. (Saetung, 2010)

Teorem 3.9.4 G, iki parçalı bir graf olsun. O zaman

$$\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$$

dir.

İspat: İki parçalı G grafının kromatik sayısı 2 dir. Tepelerin boyanması için gerekli 2 renkle ayrıtlar boyanamaz. Çünkü boyama kuralına göre tepelere bitişik ayrıtlar farklı renkte boyanmalıdır. İki parçalı G grafının ayrıt boyama sayısı $\Delta(G)$ dir. İki parçalı graflarda tam boyama yapmak için hem tepe boyama hem de ayrıt boyama yapıldığından, iki parçalı grafın tam boyanma sayısı $\Delta(G)+2$ dir.

Teorem 3.9.5 $S_{1,n}$, bir yıldız graf olsun. n $\neq$ 1 için

$$\chi_T(S_{1,n}) = \Delta(S_{1,n}) + 1 = (n+1)$$

dir.

İspat: Yıldız grafın tepe ve ayrıtlarını en az renkle boyamak için en büyük dereceli tepe ve bu tepeye bitişik ayrıtlar boyanmalıdır. $\Delta(S_{1,n}) = $ n olduğundan $\chi_T(S_{1,n})$ = n+1, (n$\neq$1 için) dir.

3.10 Tam Boyama Algoritması

A0: Bir G grafı ve renklerin bir listesini oluşturarak başla,

A1: En büyük dereceli tepeyi belirle,

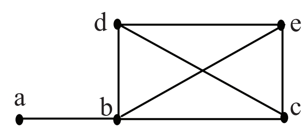
A2: Bu tepeyi ve bu tepeye bitişik ayrıtları farklı renklerle boya,

A3: Grafın geri kalan tepe ve ayrıtlarını; herbir ayrıt ile o ayrıtın bitişik tepeleri ayrı renk olacak şekilde kullanılan renklerle boya. Gerekirse listeden farklı renk seç.

A4: Tüm tepeler ve ayrıtlar boyanıncaya kadar A3 ü tekrarla.

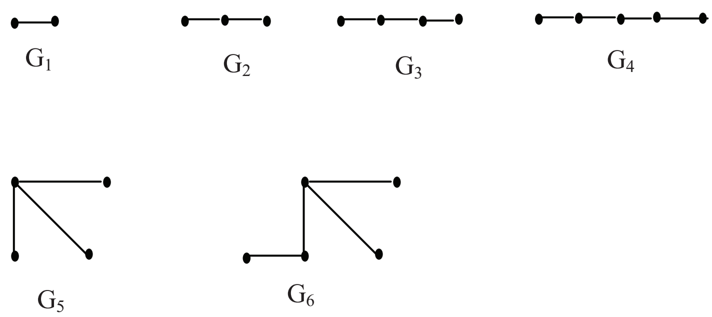
A5: Son.

Boyama ölçümleri aşağıda verilen G grafı üzerinde uygulanmıştır:



G Grafı

G grafının kromatik sayısının, ayrıt boyama sayısının ve tam boyama sayısının bulunması için özel graflardan yararlanılır. 4 tepeli tam graf bu G grafının bir alt grafıdır. K_n tam grafının kromatik sayısı Teorem 3.3.1' den "n", ayrıt boyama sayısı Teorem 3.5.4' den n=2k için "n-1", tam boyama sayısı ise Teorem 3.9.3' den n=2k için "$\Delta(K_n)+2$" dir. Bu genellemelerden yararlanılarak, $\chi(G)$= 4, $\chi_1(G)$= 4, $\chi_T(G)$= 5 elde edilir. G grafının kromatik sayısı ve tam boyama sayısı, K_n tam grafının kromatik sayısı ve tam boyama sayısı ile aynıdır. Ancak tam grafın ayrıtlarını boyamak için gerekli renk sayısı G grafının ayrıtlarını boyamak için yeterli değildir çünkü ayrıt boyamada en büyük tepe derecesine sahip tepeden başlanılır; $\Delta(G) = 4$ olduğundan G grafının ayrıt boyama sayısı 4 dür.



Şekil 3.2a G Grafının Ağaç Grafları G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6

Ağaç grafların kromatik sayısı Teorem 3.3.4 den, $\chi(T) = 2$, ayrıt boyama sayısı Teorem 3.7.2 den, $\chi_1(T) = \Delta(T)$ dir. Tam boyama sayısı ise Teorem 3.8.7 den $\Delta(T)+1 \leq \chi_T(T) \leq \Delta(T)+2$ aralığındadır. G grafının ve G grafının ağaçlarının boyama ölçümleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

	Kromatik sayısı	**Ayrıt Boyama sayısı**	**Tam Boyama sayısı**
G grafı	4	4	5
G_1 grafı	2	1	3
G_2 grafı	2	2	3
G_3 grafı	2	3	3
G_4 grafı	2	2	3
G_5 grafı	2	3	5
G_6 grafı	2	3	5

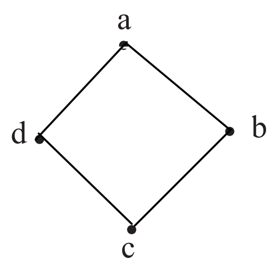
Şekil 3.2b G Grafının Ağaçlarının Boyama Ölçümlerinin Sayıları

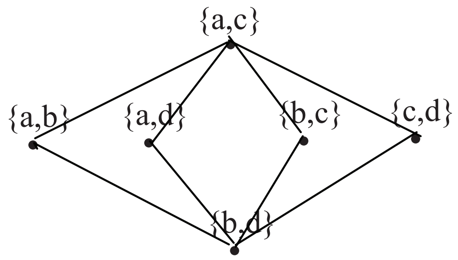
G grafının ağaçlarının kromatik sayısı, ayrıt boyama sayısı ve tam boyama sayısı incelendiğinde; G grafının ağaçlarının kromatik sayısı en fazla G grafının kromatik sayısı kadar, ayrıt boyama sayısı en fazla G grafının ayrıt boyama sayısı kadar ve tam boyama sayısı ise en fazla G grafının tam boyama sayısı kadar olduğu görülür.

4. ÇİFTLİ GRAFLAR VE ÖZEL GRAFLARIN ÇİFTLİ GRAFLARININ TAM BOYANMA SAYISI

Tez çalışmasının bu bölümünde çiftli graf tanımına ve özel grafların çiftli graflarının tam boyama sayısı ile ilgili teorem ve ispatlarına yer verilmiştir.

Tanım 4.1. G = (V,E) grafı tepe sayısı 2 ya da 2 den büyük bir graf olsun. G grafının çiftli grafı olan $U_2(G)$ grafının tepe kümesi V nin tüm 2 li alt kümelerinden oluşur öyle ki iki farklı tepesi {x,y} ve {u,v} ancak ve ancak $|\{x,y\} \cap \{u,v\}| = 1$ ise komşudur ve $x = u$ olduğunda y ve v G de komşudur ya da $y = v$ olduğunda x ve u G de komşudur. (Alavi, 2002)





Şekil 4.1

4 – Tepeli Çevre Graf

4 – Tepeli Çevre Grafın Çiftli Grafı

Teorem 4.1 Bir G grafı için $|V| = p$ olsun. O zaman G grafının çiftli grafının tepelerinin eleman sayısı $p\frac{(p-1)}{2}$ dir. (Alavi, 2002)

Teorem 4.2 U_2 (G) nin bir çevre graf olması için gerek ve yeterli koşul $G = K_3$ veya $G = K_{1,3}$ olmasıdır. (Alavi, 2002)

Teorem 4.3 G birleştirilmiş graf ise U_2 (G) nin bir ağaç graf olması için gerek ve yeterli koşul $G = K_2$ veya $G = P_3$ olmasıdır. (Alavi, 2002)

Teorem 4.4 G birleştirilmiş bir graf olsun. G grafı tam graf veya $K_{1,3}$ ise U_2 (G) bir düzenli graftır. (Alavi, 2002)

Teorem 4.5 G birleştirilmiş bir graf olsun. G grafı iki parçalı graf ise U_2 (G) grafı iki parçalı graftır. (Alavi, 2002)

Teorem 4.6 G grafının çiftli grafının tam boyanma sayısı

$$\chi_T\left[U_2(G)\right] \geq \Delta\left[U_2(G)\right] + 1$$

dir.

İspat : Tam boyama sayısı; bitişik tepeler ve komşu ayrıtlar farklı renkte olacak şekilde boyandığında elde edilen en az boyama sayısıdır. Ayrıt boyamak için en büyük tepe derecesi kadar renge ihtiyaç vardır. Tam boyama yapabilmek için tepeler de boyanacağından, U_2(G) grafının tam boyama sayısı en büyük tepe derecesinin bir fazlasından büyük eşittir.

Teorem 4.7 G grafının çiftli grafının tam boyama sayısı ile G grafının bir H alt grafının çiftli grafının tam boyanma sayısı arasında

$$\chi_T\left[U_2(G)\right] \geq \chi_T\left[U_2(H)\right]$$

ilişkisi vardır.

İspat : H grafının tepe ve ayrıt sayısı G grafının tepe ve ayrıt sayısından daha azdır. H grafının çiftli grafının en büyük tepe derecesi de G grafının çiftli grafının en büyük tepe derecesinden küçük eşittir. $U_2(H)$ grafında ayrıt veya tepe boyamak için gerekli renk sayısı, $U_2(G)$ grafında ayrıt veya tepe boyamak için gerekli olan renk sayısından küçük eşittir. Tam boyama yapmak için hem tepe boyama hemde ayrıt boyama yapıldığından, $U_2(H)$ grafının tam boyama sayısı, $U_2(G)$ grafının tam boyama sayısından küçük eşittir.

Teorem 4.8 P_n, n tepeli yol grafın çiftli grafının tam boyanma sayısı

$$\chi_T(U_2(P_n)) = 5, \qquad (n \geq 5)$$

dir.

İspat : Yol grafın çiftli grafının tepe ve ayrıtlarını en az renkle boyamak için öncelikle en büyük dereceli tepe ve bu tepeye bitişik ayrıtlar boyanmalıdır. $n \geq 5$ için $\Delta(U_2(P_n)) = 4$ dür. (4+1=5) den $\chi_T(U_2(P_n)) = 5$ dir. $U_2(P_3)$ ve $U_2(P_4)$ graflarının en büyük tepe derecesi ise (n-1) dir. En az (n-1) tane renk, ayrıt boyamak için ve bir renk te bu ayrıtların bitişik olduğu tepe için gereklidir. (n-1+1 = n) den $\chi_T(U_2(P_3)) = 3$, $\chi_T(U_2(P_4)) = 4$ dür.

Teorem 4.9 C_n n tepeli çevre grafının çiftli grafının tam boyanma sayısı

$$\chi_T(U_2(C_n)) = 5, \ (n \geq 4)$$

dir.

İspat: Çevre grafın çiftli grafının tepe ve ayrıtlarını en az renkle boyamak için öncelikle en büyük dereceli tepe ve bu tepeye bitişik ayrıtlar boyanmalıdır. n>3 için $U_2(C_n)$ grafının en büyük tepe derecesi 4 dür. En az $\Delta(U_2(C_n))$ tane renk ayrıt boyamak için ve bir renkte bu ayrıtların bitişik olduğu tepe için gereklidir. (4 + 1=5)' den $\chi_T[U_2(C_n)] = 5$ dir. $U_2(C_3)$ grafının en büyük tepe derecesi 2, (2 + 1 = 3)' den $\chi_T[U_2(C_3)] = 3$ dür.

Teorem 4.10 $S_{1,n}$ yıldız grafının çiftli grafının tam boyanma sayısı,

$$\chi_T[U_2(S_{1,n})] = n, \ (n>2)$$

dir.

İspat : Yıldız grafın çiftli grafının tepe ve ayrıtlarını en az renkle boyamak için öncelikle en büyük dereceli tepe ve bu tepeye bitişik ayrıtlar boyanmalıdır. $U_2(S_{1,n})$ grafının n>2 için en büyük tepe derecesi (n-1) dir. En az (n-1) tane renk ayrıt boyamak için ve bir renk bu ayrıtların bitişik olduğu tepe için gereklidir. (n-1+1=n)' den $\chi_T[U_2(S_{1,n})] = $ n dir. n $\leq$ 2 için; $U_2(S_{1,2}) = U_2(P_3)$ =P_3 olduğundan $\chi_T[U_2(S_{1,2})] = 3$ dür. $U_2(S_{1,1}) =$ N_1 olduğundan $\chi_T[U_2(S_{1,1})] = 1$ dir.

Teorem 4.11 n tepeli K_n tam grafının çiftli grafının tam boyanma sayısı;

$$\chi_T(U_2(K_n)) = \begin{cases} 2n-3, & n=2k \quad k = \overline{1,n} \\ 3n-6, & n=2k+1 \quad k = \overline{1,n} \end{cases}$$

dir.

İspat : n çift için;

K_n tam grafının tepe boyama sayısı n dir. K_n tam grafının çiftli grafı K_{n-1} ler içerir. $U_2(K_n)$ grafının tepe boyama sayısı n-1 dir.

Tam grafın çiftli grafı düzenli bir graftır ve (2n-4) derecelidir. Böylece $U_2(K_n)$ grafının ayrıt boyama sayısı (2n-4)/2 dir. Tam boyama yapmak için hem tepe boyama hemde ayrıt boyama yapıldığından

$$\chi_T[U_2(K_n)] = n - 1 + (2n-4)/2 = 2n - 3$$

bulunur.

n tek için;

Tam grafın çiftli grafı düzenli bir graftır ve (2n-4) derecelidir. Tepelerden (2n-4) tanesi farklı renkte boyanmalıdır. $U_2(K_n)$ grafının ayrıt boyama sayısı (2n-4)/2 dir.

Tam boyama yapmak için hem tepe boyama hemde ayrıt boyama yapıldığından

$$\chi_T\left[U_2(K_n)\right] = 2n - 4 + (2n-4)/2 = 3n - 6$$

elde edilir.

Teorem 4.12 İki parçalı tam grafın çiftli grafının tam boyanma sayısı,

$$\chi_T\left[U_2(K_{m,n})\right] = \Delta\left[U_2(K_{m,n})\right] + 2$$

dir.

İspat : İki parçalı grafların tepe boyama sayısı 2 dir. Birleştirilmiş iki parçalı grafın çiftli grafı da birleştirilmiş iki parçalı graftır. $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafının çiftli grafında, çakışık iki tane $K_{m,n}$ grafı vardır. İki parçalı tam grafın çiftli grafının tepe boyama sayısı da 2 dir.

Tepelerin boyanması için gerekli 2 renkle ayrıtlar boyanamaz. Çünkü boyama kuralına göre tepelere bitişik ayrıtlar farklı renkte boyanmalıdır. $U_2(K_{m,n})$ grafının en büyük tepe derecesi max{m,n} dir. Bu durumda ayrıt boyama için gerekli en az renk sayısı $U_2(K_{m,n})$ grafının en büyük tepe derecesi olan max{m,n} kadardır. Tam boyama yapmak için hem tepe boyama hemde ayrıt boyama yapıldığından

$$\chi_T\left[U_2(K_{m,n})\right] = \Delta\left[U_2(K_{m,n})\right] + 2$$

bulunur.

Teorem 4.13 $\chi_T(P_3) = \chi_T\,[U_2(P_3)] = 3$ dür.

İspat : P_3 yol grafının çiftli grafı da P_3 yol grafı olduğundan tam boyama sayıları eşittir.

Teorem 4.14 $\chi_T(K_3) = \chi_T\,[U_2(K_3)] = 3$, $\chi_T(C_6) = \chi_T\,[U_2(K_{1,3})] = 3$ dür.

İspat : K_3 tam grafının çiftli grafı C_3 çevre grafıdır. n=3k için $\chi_T(C_n) = 3$ olduğundan $\chi_T\,[U_2(K_3)] = \chi_T(K_3) = \chi_T(C_3) = 3$ dür. $K_{1,3}$ iki parçalı tam grafının çiftli grafı C_6 çevre grafıdır. $\chi_T(C_6) = 3$ olduğundan $\chi_T\,[U_2(K_{1,3})] = \chi_T(C_6) = 3$ olur.

5. SONUÇ

Bu tezde, geçmişte tanımlanan tepe boyama ve ayrıt boyama ölçümlerine ek olarak son yıllarda tanımlanan tam boyama ve tam boyama sayısı üzerine bilgi birikimi sağlanmış ardından özel grafların çiftli graflarının tam boyanması çalışılmıştır.

Bir grafın boyama ölçümlerini hesaplamak kolay değildir. Grafların boyama ölçümleri özel grafların boyama ölçümlerinden yararlanılarak hesaplanabilir. Burada da bu düşünceyle, özel graflardaki tam boyama özellikleri incelenmiş, bu özelliklerden yararlanarak, özel grafların çiftli graflarındaki tam boyama sayıları incelenmiş ve bulunan sonuçlar teoremlerle ifade edilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alavi, Y., Lick, R., D. and Liu, J., 2002, Survey of Double Vertex Graphs, Graphs and Combinatorics, Springer – Verlag, 709-715p.

Aldous, J., M. and Wilson, J., R., 2006, Graphs and Applications, Springer, London.

Bacak, G., 2004, Vertex Coloring Of A Graph, MSc Thesis, Izmir Institute Of Technology, 46p.

Berkman, A., Doğanaksoy A. and Keyman, E., "Dört Renk Problemi" www.md.math.bilgi.edu.tr/arsiv/PDF.../91_1_7_10_DORTRENK.pdf (Erişim tarihi: 08 Mart 2010)

Chartrand, G. and Lesniak, L., 1996, Graphs and Digraphs, Chapman and Hall, London.

Chen, X., 2008, On The Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring Numbers Of Graphs With Δ=3, 4003-4007p.

Gross, J., L. and Yellen, J., 1999, Graph Theory And Its Applications, CRC, USA.

Harary, F., 1994, Graph Theory, Westview Press, Colorado.

Matematik Dünyası, 2003, "Çizgeleri Boyamak ve Dört Renk Problemi http://www.matematikdunyasi.org/arsiv/PDF/03_3_27_29_CIZGELERIBO YAMAK.pdf. (Erişim tarihi: 08 Mart 2010).

Saetung, A. and Chumni, W., "Behzad – Vizing Conjecture and Complete Graphs", http://www.math.sci.tsu.ac.th/nmath/download/Alongkorn_ Complete Graphs.pdf. (Erişim tarihi: 11 Ocak 2010)

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Tang, D., 2005, Deletion And Contraction Games: Chromatic Polynomial Proofs And Making Sense Of An Apple Tree, Honors Thesis, Ithaca College, 22p.

Wang, W. and Chen, D., 2009, Total Number Of Trees With Maximum degree three, Information Processing Letters, 805 – 810p.

West, D., B., 2001, Introduction To Graph Theory, Prentice Hall, USA.

Wikipedia, the free encylopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Total_coloring (Erişim tarihi: 11 Ocak 2010).

Xu, J., 2003, Theory and Application of Graphs, Kluwer Academic Publishers, London.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep Yorgancıoğlu, 1981 yılında İzmir'de doğdu. İlkokulu Karşıyaka Ankara İlkokulu'nda bitirdi. Orta ve lise öğrenimini İzmir Özel Türk Koleji'nde tamamladı. 1999 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı ve 2003 yılında mezun oldu. 2004 yılının Şubat ayında Ege Üniversite'si Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Alan Öğretmenliği Bölümünde tezsiz yüksek lisans eğitimine başladı ve 2005 yılında mezun oldu. 2006-2007 döneminde Başarı Koleji'nde Matematik Öğretmeni olarak görev aldı. 2007 Eylül ayında Yaşar Üniversite'si Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak işe başladı. 2008 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Yaşar Üniversitesi' nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmakta.